# MATHEMATISCHE
UND
# NATURWISSENSCHAFTLICHE
# BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL v. THAN.

REDIGIRT VON

I. FRÖHLICH.

DREIZEHNTER BAND.

(JANUAR 1895—DECEMBER 1895.)

ERSTE HÄLFTE.

MIT DREI TAFELN.

1896.

BERLIN, R. FRIEDLÄNDER & SOHN.

BUDAPEST, FRIEDRICH KILIAN.

In Redactionssachen wende man sich an Prof. Dr. **I. FRÖHLICH**, Budapest VIII., Eszterházy-utcza 3/b (Physikalisches Institut der Universität).

*Man beachte die Rückseite des Umschlages!*

# INHALT DER ERSTEN HÄLFTE.


Seite

1. Móritz Réthy: Ueber das Princip der kleinsten Action ... 1
2. Koloman v. Szily: Die Verfolgungscurve des Kreises bei constantem Abstande ... 22
3. A. D. Herzfelder: Das $\alpha_1$ $\alpha_2$-Thionapthalin und einige seiner Derivate 28
4. Mihael Bauer: Zur Theorie der quadratischen Formen ... 37
5. Anton Koch: Geologie der Fruscagora ... 45
6. Aladár Richter: Antiaris und Artocarpus ... 128
7. Karl Fuchs: Ueber eine neue Form des mechanischen Arbeitsintegrales ... 144
8. Julius Vályi: Ueber das räumliche Analogon des Desargues'schen Satzes ... 166
9. Julius Vályi: Mehrfach lineare Tetraëder auf einer Raumcurve vierter Ordnung vom ersten Geschlechte ... 183
10. Julius Vályi: Ueber die polarreciproken Tetraëder ... 189



MAGY. AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

# MATHEMATISCHE
UND
# NATURWISSENSCHAFTLICHE
# BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL v. THAN.

REDIGIRT VON

I. FRÖHLICH.

---

DREIZEHNTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

1897.

BERLIN, R. FRIEDLÄNDER & SOHN.

BUDAPEST, FRIEDRICH KILIAN.

300151

MAGY. AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN.

MAGY. AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

# INHALT DES XIII. BANDES.

## I. Abhandlungen.

Seite

1. Moritz Réthy: Ueber das Princip der kleinsten Action ... 1
2. Koloman v. Szily: Die Verfolgungscurve des Kreises bei constantem Abstande ... 22
3. A. D. Herzfelder: Das $\alpha_1 \alpha_2$-Thionapthalin und einige seiner Derivate 28
4. Michael Bauer: Zur Theorie der quadratischen Formen ... 37
5. Anton Koch: Geologie der Fruscagora ... 45
6. Aladár Richter: Antiaris und Artocarpus ... 128
7. Karl Fuchs: Ueber eine neue Form des mechanischen Arbeitsintegrales ... 144
8. Julius Vályi: Ueber das räumliche Analogon des Desargues'schen Satzes ... 166
9. Julius Vályi: Mehrfach lineare Tetraëder auf einer Raumcurve vierter Ordnung vom ersten Geschlechte ... 183
10. Julius Vályi: Ueber die polarreciproken Tetraëder ... 189
11. Roland Baron Eötvös: Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus (Vorläufige Mitteilung) ... 193
12. Julius Vályi: Ueber die mehrfachen Involutionen. Erste Mitteilung ... 244
13. Julius Vályi: Ueber die mehrfachen Involutionen. Zweite Mitteilung ... 259
14. Moritz Réthy: Das Princip der kleinsten Action und das Hamiltonsche Princip ... 270
15. Koloman Tellyesniczky: Ueber den Bau des Eidechsenhodens ... 303
16. Julius Vályi: Ueber die mehrfachen Involutionen. Dritte Mitteilung ... 343

*

Seite

17. Rudolf v. Kövesligethy: Ueber eine neue Methode der Morphometrie der Erdoberfläche ... 365
18. Rudolf v. Kövesligethy: Störungen im Vielkörpersystem ... 380
19. Ferdinand Gruber: Zur Theorie der *Fermat*'schen Congruenzen 413
20. Rudolf v. Kövesligethy: Neue geometrische Theorie der seismischen Erscheinungen ... 418

*Anmerkung der Redaction:* Die Sitzungsberichte und sonstigen Berichte mussten wegen Raummangels für den nächsten Band zurückgelegt werden.

MAGY. AKADEMIA
KÖNYVTÁRA

1.

# ÜBER DAS PRINCIP DER KLEINSTEN ACTION.

Gelesen in den Sitzungen der Akademie vom 19. November 1894 und 20. Mai 1895

von Dr. MORITZ RÉTHY,

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AM K. JOSEPHS-POLYTECHNIKUM ZU BUDAPEST.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie) Band XIII. pp. 1—15, und pp. 299—310.

I. Man war bezüglich des Princips der kleinsten Action bis 1887 der Meinung, dass seine Giltigkeit an die Bedingung gebunden sei, dass die Bewegung des Punktsystems gemäss dem Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft vor sich gehe. Die letzte in dieser Auffassung verfasste Abhandlung, die an Klarheit, Präcision und Eleganz ausgezeichnete Arbeit des Herrn A. MAYER,[1] bewog v. HELMHOLTZ[2] darauf aufmerksam zu machen, dass das Princip der kleinsten Action auch dann noch giltig sei, wenn das Potential der Kräfte, die auf das durch unveränderliche Verbindungen beschränkte Punktsystem wirken, von Coordinaten nicht nur innerer, sondern auch äusserer Punkte abhängt. Die v. HELMHOLTZ'sche Formulirung[3] des Princips unterscheidet sich von den

[1] Sächsische Berichte 1886, Bd. 38, pp. 343—55.

[2] Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin 1887, I. pp. 225—236.

[3] Ich nenne diese Formulirung die HELMHOLTZ'sche, obwohl nach v. HELMHOLTZ auch die Darstellung von LAGRANGE in den Miscellanea Taurinensia T. II. in diesem Sinne aufzufassen sein soll. Es ist mir nämlich nicht gelungen daselbst eine Stelle zu finden, die zu dieser Deutung einen *sicheren* Anhaltspunkt liefern würde, während an mehreren Stellen ganz bestimmt behauptet wird, dass die Giltigkeit des Princips an die Bedingung geknüpft sei, dass das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft für das System Bestand habe. Auch Oeuvres de LAGRANGE Tom. I. pag. 384, XIII. (SERRET'sche Ausgabe), wo diese Bedingung wiederholt ausge-

früheren darin, dass während bisher die Energie als unvariirbar und *unveränderlich* betrachtet wurde, bei v. HELMHOLTZ die Energie wohl unvariirbar, aber veränderlich ist.

Die Energie des Punktsystems läuft nämlich * dieselben Werte durch in der unvariirten, wie in der variirten Bewegung, und die Vergleichungsphasen sind bei Durchführung der Variation eben durch gleiche Energiewerte characterisirt. Eine zweite Vorschrift für die Durchführung der Variation, — die wohl nicht ausdrücklich hervorgehoben, jedoch in den Rechnungen enthalten ist,** — besteht darin, dass die Lagen der äusseren Punkte in den ursprünglichen und in den variirten Bewegungen dann identisch seien, wenn die Phasen — d. i. die Energiewerte — dieselben sind.

Ich habe versucht, diese Formulirung des Princips in dem Falle durchzuführen, wenn die Energie des Systems sowohl von Coordinaten, als auch von Geschwindigkeiten äusserer Punkte abhängt, indem ich die Actions-Geschwindigkeit allgemein setzte

$$= \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i',$$

unter $n$ die Anzahl der unabhängigen Coordinaten der inneren Punkte, unter $f$ aber das HAMILTON'sche $T + U$ verstanden, aufgefasst als Function der unabhängigen Coordinaten $q_i$ und deren Geschwindigkeiten $q_i'$. Es ergab sich, dass die nach der Vorschrift

---

sprochen wird, steht wohl folgendes: Wenn die Elementararbeit der Kräfte kein vollständiges Differential ist, daher die Gleichung

$$\delta T = \Sigma P \delta p$$

nicht mehr besteht, dann «cette équation ne pourra plus servir à trouver les conditions de la maximité ou de la minimité de la formule integrale $\int \Sigma m u d s$, mais elle servira toujours également pour trouver les mouvements des corps, ..., quelles que soient les forces, dont ils sont animés». Hierin ist mit klaren Worten der Satz ausgesprochen, den man den HAMILTON'schen zu nennen pflegt. Davon aber ist weder hier, noch anderswo die Rede, dass man in dem Fall, wo eine von äusseren beweglichen Punkten abhängige Kräftefunction existirt, mittels Feststellung der Variationsart $\delta T = \Sigma P \delta p$ setzen soll.

* l. c. pag. 231 al. 3; pag. 232 Gl. I*b*; pag. 234, Gl. 2*a*.

** l. c. pag. 234 al. 3.

von v. HELMHOLTZ berechnete Variation der Action *im Allgemeinen* für die natürliche Bewegung nicht verschwindet.

Soll daher das Princip der Action ebenso allgemein sein als das HAMILTON'sche, so sind die Bedingungen der Variation anders zu formuliren. Ich formulire dieselben, wie folgt:

*Sämmtliche gegebene Functionen der Zeit, die in die Bedingungs-Gleichungen der Bewegung und in das Kräftepotential eintreten, sind der Variation nur insoferne unterworfen, als die Zeit einer Variation unterliegt. Dasselbe gilt von der Gesammtenergie, insofern sie aufgefasst wird als Function der Zeit.*

Die folgenden Zeilen sind der Aufgabe gewidmet, zu zeigen, dass bei dieser Formulirung das Princip der Action sich mannigfaltig so aussprechen lässt, dass es ebenso allgemein giltig erscheint, wie das HAMILTON'sche. Von den verschiedenen Formen ist eine dadurch ausgezeichnet, dass sie, ebenso wie die HAMILTON'sche Form, keinen aus den LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen gebildeten Satz (also auch nicht den Satz von der lebendigen Kraft) *a priori* voraussetzt. In dieser Form ausgesprochen ist also das Princip dem HAMILTON'schen in jeder Hinsicht æquivalent; so dass dem HAMILTON'schen Princip vor dem der kleinsten Action nur der Vorzug grösserer Einfachheit übrig bleibt.

II. Bei der Behandlung des Problems befolge ich dieselbe Methode, wie Herr A. MAYER und halte auch seine Bezeichnungen fest. Es bezeichnen also im folgenden überall

$T$ die lebendige Kraft des Punktsystems,
$U$ das Potential « «
$q_i$ die unabhängigen Coordinaten des Punktsystems,
$a_i$, $b_i$ die Anfangs-, resp. Endwerthe dieser Coordinaten,
$t$ die veränderliche Zeit,
$t_1$ ein Zeitintervall,
$n$ die Anzahl der unabhängigen Coordinaten der innern Punkte.

Es bezeichnen ferner

$$q'_i = \frac{dq_i}{dt}, \tag{1}$$

$$= T + U, \tag{2}$$

$$F = \sum_1^n q_i' \frac{\partial f}{\partial q_i'} - f, \tag{3}$$

$$H = \int_0^{t_1} (T + U)\, dt = \int_0^{t_1} f dt. \tag{4}$$

Da die Bedingungsgleichungen der Bewegung die Zeit explicit enthalten, so ist $T$, daher auch $f$ keine homogene Function der $q_i'$.

$F$ ist die *Energie* des Systems.

Bei der Variation des Zeitintegrals $H$ soll auch $t$ der Variation unterliegen; wir führen daher als reihendes Element die unvariirbare Veränderliche $\varphi$ ein, und bezeichnen die Differentialquotienten der Zeit und der Coordinaten nach ihr, wie folgt:

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\varphi}, \tag{5}$$
$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{d\varphi}.$$

Es bestehen dann die Identitäten:

$$q_i' = \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}},$$
$$\frac{\partial q_i'}{\partial \dot{t}} = -\frac{\dot{q}_i}{\dot{t}^2} = -\frac{q_i'}{\dot{t}};$$
$$\dot{t}\frac{\partial f}{\partial \dot{t}} = \dot{t} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} \frac{\partial q_i'}{\partial \dot{t}} = -\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i';$$
$$-\frac{\partial (f\dot{t})}{\partial \dot{t}} = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f = F. \tag{6}$$

III. Wir supponiren bei der Berechnung der Variation des Zeitintegrals $H$, dass sämmtliche Punkte des Systems die *gegebenen* Anfangslagen *gleichzeitig*, zur Zeit $t=o$ verlassen, und in die *gegebenen* Endlagen gleichzeitig ankommen, dass jedoch die Zeitdauer der Ueberführung der Variation unterliegt; die Variation der Zeitdauer $t_1$ sei mit $\partial t_1$ bezeichnet. Es ergiebt sich dann, wie bekannt,

$$\delta\int_0^{t_1} f\,dt = \int_0^{\varphi_1} \sum_1^n \left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial q_i} - \frac{d}{d\varphi}\,\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,d\varphi$$

$$+\int_0^{\varphi_1}\left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial t} - \frac{d}{d\varphi}\,\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{t}}\right)\delta t\,d\varphi$$

$$+\left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{t}}\,\delta t\right)_{t_1};$$

daraus ergiebt sich mit Herbeiziehung der Gleichungen (5) und (6)

$$\delta\int_0^{t_1} f\,dt = \int_0^{t_1}\sum_1^n\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial q_i'}\right)\delta q_i\,dt$$

$$+\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dF}{dt}\right)\delta t\,dt - F_{t_1}\delta t_1, \qquad (7)$$

wo $F_{t_1}$ den Werth von $F$ bezeichnet zur Zeit $t_1$.

Die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen des Systems sind*:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial q_i'} = 0;\ [i=1,\ldots,n]. \qquad (8)$$

Eine Folge dieses Gleichungssystems bildet die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dF}{dt} = 0 \qquad (9)$$

Man hat nämlich die Identität (3)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' - f\right),$$

daher ist

$$\frac{dF}{dt} = \sum_1^n\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i'}\right)q_i' + \frac{\partial f}{\partial q_i'}\,\frac{dq_i'}{dt}\right) - \sum_1^n\left(\frac{\partial f}{\partial q_i'}\,\frac{dq_i'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\,\frac{dq_i}{dt}\right) - \frac{\partial f}{\partial t};$$

d. i.

$$\frac{dF}{dt} = \sum_1^n\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\right)q_i' - \frac{\partial f}{\partial t};$$

---

* LIPSCHITZ: Untersuchung eines Problems etc. Crelle's Journal Bd. 74.; E. SCHERING: Hamilton-Jacobische Theorie etc. Götting, Abhandl. 1873.

letztere Gleichung geht aber in Folge des Systems (8) in die Gleichung (9) über.

Demzufolge nimmt auch die Gleichung (7) die folgende einfache Form an:

$$\delta \int_0^{t_1} f dt + F_{t_1} \delta t_1 = 0. \tag{10}$$

IV. Wenn nicht nur die Anfangslage und Endlage des Punktsystems, sondern auch die Zeitdauer der Ueberführung unvariirbar, d. i. $\delta t_1 = o$ ist, so geht (10) über in

$$\delta \int_0^{t_1} f dt = 0. \tag{10a}$$

Dieser Satz und seine Umkehrung bilden, wie bekannt, den Inhalt des HAMILTON'schen *Princips*.

Ist hingegen $\delta t_1$ nicht $= o$, dafür aber den zu vergleichenden Bewegungen die Beschränkung auferlegt, dass die Energie $F$ die durch die LAGRANGE'schen Gleichungen bestimmte *gegebene* Function der Zeit $E_0(t)$ sei, so folgt aus der Gleichung (10) das *Princip* der *Action*.

Unterwirft man nämlich die Variaton der Bedingung, dass

$$F = E_0(t) \tag{11}$$

Bestand hat, so folgt aus dem Umstande, dass die Variation die Constanten der gegebenen Function $E_0(t)$, unberührt lässt (pag. 3), die Gleichung:

$$\delta \int_0^{t_1} F dt = \delta \int_0^{t_1} E_0(t)\, dt = E_0(t_1)\, \delta t_1 = F_{t_1}\, \delta t_1;$$

daher lässt sich die Gleichung (10), wie folgt, schreiben:

$$\delta \int_0^{t_1} (f + F)\, dt = 0, \tag{10b}$$

eine Gleichung, die bei Benützung der Bezeichnungen (3) die Form annimmt

$$\delta \int_0^{t_1} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' dt = 0. \tag{12}$$

Sind die Bedingungsgleichungen der Bewegung unabhängig von der Zeit und das Potential der freien Kräfte unabhängig von den Geschwindigkeiten $q_i'$, so hat man

$$\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' = \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' = 2T,$$

daher ist das Zeitintegral

$$\int_0^{t_1} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i' dt = A \tag{13}$$

in diesem Specialfall *die Action* des Punktsystems. *Dieselbe Form (13) enthält die Verallgemeinerung des Actionsbegriffes* für den allgemeinsten Fall. Demgemäss spricht die Gleichung (12) den Satz aus, dass die Variation der Action verschwindet für ein beliebiges $t_1$ und $\delta t_1$, vorausgesetzt, dass Anfangs- und Endlage unvariirt bleibt, und die Gleichung (11) als Bedingungsgleichung der Variation betrachtet wird. Dieser Satz und seine im Folgenden zu erbringende Umkehrung spricht aber das verallgemeinerte *Princip der Action* aus.

*Bemerkung.* Ist das Potential bloss Function der Coordinaten und der Zeit, so ist die Action

$$A = \int_0^{t_1} \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' dt;$$

Enthalten nun die Bedingungsgleichungen der Bewegung die Zeit explicit, so ist

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

wo $T_2$, $T_1$, $T_0$ homogene Functionen von $q_i'$ vom Grade 2, 1, 0 bedeuten. Man hat daher

$$A = \int_0^{t_1} 2T_2 dt + \int_0^{t_1} T_1 dt.$$

Die Action verliert daher im allgemeinen Fall jene einfache Bedeutung, die sie in dem Specialfall auszeichnet, in welchem die

Bedingungsgleichungen unabhängig sind von der Zeit und wo demzufolge $T_1$ verschwindet.

V. Zur Umkehrung des Satzes führt die Lösung des folgenden Problems:

*(A) Gesucht wird jene continuirliche Bewegung des Punktsystems, für welche die Gleichung (12) stattfindet bei variirendem $t_1$, falls der Bereich der Variation durch die Bedingungsgleichung beschränkt ist,*

$$\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f = E(t) \tag{14}$$

*wo $E(t)$ dieselbe Function sein soll für die gesuchte Bewegung wie für die variirte. Anfangs- und Endlage des Punktsystems unterliege keiner Variation, und es wird verlangt, dass die Gleichung (12) auch dann stattfinde, wenn eine beliebige Zwischenlage der gesuchten Bewegung zur Endlage wird.*

*Die Function $E(t)$ ist aber nicht im Vorhinein gegeben, sie ist vielmehr selbst auch eine Unbekannte des Problems.*

Wir wollen ein für allemal voraussetzen, dass

$$\sum_1^n i \sum_1^n j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} q_i' q_j'$$

während der Zeitdauer 0 bis $t_1$ nirgends verschwindet.

Man bezeichne mit $\lambda$ den LAGRANGE'schen Multiplicator, und es sei

$$\Omega = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + \lambda \left( \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - E(t) \right) \tag{15}$$

$$= F + f + \lambda (F - E(t)),$$

$$\Omega = (1+\lambda) F + f - \lambda E(t); \tag{15a}$$

Zur Lösung der Aufgabe sind bekanntlich jene Functionen der Zeit

$$q_1, q_2, \ldots, q_n; \lambda$$

zu bestimmen, für welche die Bedingungsgleichung (14) Bestand hat und gleichzeitig die Variation des Zeitintegrals von $\Omega$ selbst dann verschwindet, wenn $\delta t_1$ und sämmtliche $\delta q_i$ willkührlich sind. Da die Variation des Zeitintegrals sich aus der Gleichung (7) ergiebt, wenn statt $f$ die Function $\Omega$ gesetzt wird, so müssen dem-

zufolge ausser (14) noch die folgenden Gleichungen befriedigt werden:

$$\left(\Omega - \sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i'\right)_{t_1} = 0, \qquad (a)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} = 0; \quad (i=1, \ldots, n) \qquad (b)$$

die Gleichungen *(a)*, *(b)* müssen nämlich stattfinden, weil die linken Seiten die Factoren von $\delta t_1$, resp. $\delta q_i$ bilden. Diese Gleichungen sind aber zum Verschwinden des Zeitintegrals von $\Omega$ auch genügende Bedingungen. Es ergiebt sich nämlich aus den Gleichungen *(b)*, auf dem pag. 5 bezeichneten Wege, die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega\right) = 0; \qquad (c)$$

demzufolge verschwindet auch der Factor von $\delta t$ *unter* dem Integralzeichen.

Es besteht ferner der Gleichung (15*a*) zufolge die Identität

$$\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' = (1+\lambda) \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i';$$

die bei Berücksichtigung der Bedingungsgleichung (14) die Form annimmt

$$\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega = (1+\lambda) \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i',$$

eine Gleichung, die nach Substitution des aus (3) zu nehmenden Werthes von $F$ übergeht in

$$\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega = (1+\lambda) \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} q_i' q_j'. \qquad (16)$$

Das zur Rechten stehende Product soll der Gleichung (*a*) zufolge verschwinden, wenn $t=t_1$ ist. Da nun der zweite Factor nicht verschwinden kann (pag. 8), so erfordert dieses das Verschwinden des ersten Factors; wir haben also zur Zeit $t_1$ die Gleichung

$$1+\lambda=0. \qquad (17)$$

Da aber nach dem Problem die Variation des Zeitintegrals von $\Omega$ auch dann verschwinden soll, wenn eine beliebige Zwischenlage des Punktsystems zur Endlage wird, so muss die Gleichung ($a$) auch dann bestehen, wenn statt $t_1$ eine beliebige Zwischenzeit gesetzt wird; daher ist die Gleichung (17) eine identische, und wir haben aus (17) und (15)

$$\lambda \equiv -1,$$
$$\Omega = f + E(t),$$

Substituirt man aber in ($b$) statt $\Omega$ den eben gefundenen Wert, *so hat man das* LAGRANGE'sche *Gleichungssystem:*

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} = 0; \quad [i=1, \ldots, n]$$

Nach Lösung dieses Systems wird auch die im Vorhinein nicht bekannte Function $E(t)$ bestimmt. Hiemit ist die Umkehrung des unter (IV) bewiesenen Satzes geleistet.

Das Problem und seine Lösung in Form eines Satzes ausgedrückt, spricht das Princip der kleinsten Action in der einfachsten und allgemeinsten Form aus.

Der Satz lautet, wie folgt:

*Wird die Forderung gestellt, dass die Variation der Action bei variirendem Zeitintervall nicht nur dann verschwinde, wenn die gegebene Anfangs- und Endlage des Systems dieselbe ist für die unvariirte Bewegung, wie für die variirte, sondern auch dann, wenn eine beliebige Zwischenlage der gesuchten Bewegung zur Endlage der variirten wird; sollen dabei nur jene variirten Bewegungen in Betracht kommen, deren Energie im Verlauf der ganzen Bewegung zu jeder Zeit gleich ist der gleichzeitigen Energie $E(t)$ in der unvariirten Bewegung: so kann diesen Forderungen dann und nur dann Genüge geschehen, wenn jene Zeitfunction $E(t)$ der Energie eben die «numerisch» vollständig bestimmte Lagrange'sche Function $E_0(t)$ ist (pag. 6.), und die den Forderungen genügende Bewegung ist ausschliesslich die durch die Lagrange-schen Differential-Gleichungen und durch die Grenzbedingungen völlig bestimmte Bewegung.*

VI. Die Zeitdauer $t_1$ war in dem soeben gelösten Umkehrungsproblem eine der Variation unterworfene, auch *in der unvariirten Bewegung beliebig veränderliche* Grösse. In den angeführten Abhandlungen von v. HELMHOLTZ und A. MAYER, sowie auch bei allen früheren Autoren ist aber $t_1$ eine der Variation unterworfene *feste* Grösse. Ist aber $t_1$ eine feste Zeit, so folgt bei der vorliegenden Verallgemeinerung ohne weitere Voraussetzungen bloss, dass $\lambda=-1$ ist *zur Zeit* $t=t_1$. Um dies darzutun, wollen wir, nach dem Beispiel der genannten Autoren, Consequenzen ziehen aus der Gleichung (*c*) des vorigen Abschnittes.

Nach Substitution des Werthes (15) von $\Omega$ ergiebt sich mit Rücksichtnahme auf die Bedingungs-Gleichung (14) und auf (3):

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\frac{\partial(F+f)}{\partial t}+\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial t}-E'(t)\right)=\frac{\partial(F+f)}{\partial t}+\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{dF}{dt}\right)$$

Der zweite Teil der Gleichung (*c*) ist durch (16) gegeben; daher ist die explicite Form dieser Gleichung die folgende:

$$(c')\qquad (1+\lambda)\frac{\partial(F+f)}{\partial t}-\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{dF}{dt}\right)+\frac{d}{dt}(1+\lambda)H_0=0,$$

wo gesetzt ist

$$H_0=\sum_1^n\sum_1^n\frac{\partial^2 f}{\partial q_i'\partial q_j'}q_i'q_j'.$$

Da (*c'*) aus dem System (*b*) auch ohne (14) direct abgeleitet werden kann, so enthält (*c'*) keine neue Aussage.

Sind die Bedingungs-Gleichungen der gezwungenen Bewegung unabhängig von der Zeit und das Potential der Kräfte unabhängig von den Geschwindigkeiten, wie dies bei v. HELMHOLTZ der Fall ist, so hat man aus (3)

$$\frac{\partial(F+f)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\sum_1^n\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i'\equiv 0;$$

daher ergiebt sich aus (*c'*) die der ersten Gleichung v. HELMHOLTZ (l. c. pag. 235) æquivalente Folgerung

$$(1+\lambda)H_0=\text{const.}$$

nur dann, wenn für die *unvariirte* Bewegung der Satz von der lebendigen Kraft Bestand hat:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dF}{dt} = 0. \tag{9}$$

Soll als weitere Voraussetzung der Satz von der lebendigen Kraft für die unvariirte Bewegung auch bei den vorliegenden allgemeineren Voraussetzungen gelten, so folgt aus $(c')$ die Gleichung

$$(1+\lambda)\frac{\partial(F+f)}{\partial t} + \frac{d}{dt}(1+\lambda)H_0 = 0, \tag{c''}$$

wo $\frac{\partial(F+t)}{\partial t}$ nicht verschwindet. Doch ist auch diese Gleichung bei continuirlichen Bewegungen nur dann vereinbar mit der Bedingung, dass, für $t=t_1$, $1+\lambda$ verschwindet, wenn $1+\lambda$ identisch $= o$ ist.

Der partielle Differentialquotient von $F+f$ ist nämlich allenfalls *endlich*, und es ist bei gehöriger Einengung der Grenzen $o$ und $t_1$ jedenfalls zu erreichen, dass $H_0$ nirgends verschwindet. Wäre nun $1+\lambda$ eine nicht identisch verschwindende Grösse, so würde aus $(c'')$ folgen

$$\int_t^\tau \frac{\frac{d}{dt}(1+\lambda)H_0}{(1+\lambda)H_0}\,dt = -\int_t^\tau \frac{\frac{\partial(F+f)}{\partial t}}{H_0}\,dt,$$

wo

$$0 < t < \tau < t_1;$$

also

$$\lg.\frac{(1+\lambda)_\tau H_{0\tau}}{(1+\lambda)_t H_{0t}} = -\int_t^\tau \frac{\frac{\partial(F+f)}{\partial t}}{H_0}\,dt;$$

eine Gleichung, deren linke Seite bei den vorliegenden Daten unendlich gross wäre, wenn $\tau$ sich der Zeit $t_1$ unendlich nähert, während die rechte Seite endlich bleibt. Es muss daher $(1+\lambda)_t = o$ sein.

VII. An Stelle der Forderung, dass die variirbare Zeitdauer $t_1$ in der unvariirten Bewegung von *beliebiger Grösse* sein könne, trat im vorigen Abschnitt die Forderung, dass in der unvariirten Bewegung der Satz von der lebendigen Kraft Bestand habe. An

Stelle dieses Satzes, als zu erfüllenden Forderung, kann aber bei einiger Beschränkung auch ein beliebiger anderer Satz treten, der eine Consequenz des LAGRANGE'schen Systems von Differential-Gleichungen ist. Schreiben wir nämlich den allgemeinen Satz in der Form auf

$$\Sigma \nu_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} \right) = 0, \tag{18}$$

so haben wir bloss vorauszusetzen, dass in der Zeitdauer $o$ bis $t_1$

$$H_0 = \sum_1^n{}^i \nu_i \frac{\partial F}{\partial q_i'}$$

nirgends verschwinde, und dass

$$H_1 = \sum_1^n{}^i \left( \nu_i \frac{\partial F}{\partial q_i} + \nu_i' \frac{\partial F}{\partial q_i'} \right)$$

endlich bleibe.

In der Tat folgt aus den Gleichungen ($b$) mit Rücksicht auf (15$a$) und auf den Satz (18) die Gleichung

$$(1+\lambda) H_1 - \frac{d}{dt} (1+\lambda) H_0 = 0. \tag{19}$$

Nachdem aber die Überlegungen von (pag. 9) bis zur Gleichung (17) unverändert Bestand haben, so folgt aus dieser Gleichung (19) die Identität $1+\lambda \equiv o$ ebenso, wie in VI aus ($c''$).

*Damit ist bewiesen dass die durch die* LAGRANGE'sche *Differentialgleichungen (8) bestimmte Bewegung die einzige Lösung auch desjenigen Problems bildet, welches aus (A) entsteht, wenn man an die Stelle der Bedingung, dass die Variation der Action für eine beliebige, innerhalb der Zeitdauer $t_1$ befindliche Zeit $t$ verschwinde, die Bedingung setzt, dass dies wohl bloss für eine feste Zeit stattfinde, dafür aber die gesuchte Bewegung einer Differential-Gleichung von der Form* (18), — z. B. dem Satz von der lebendigen Kraft — *unterliege.*

Das Problem in dieser Fassung ist die Verallgemeinerung der LAGRANGE'schen Conception, in welcher für die gesuchte Bewegung das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft allenfalls gelten soll. Ich werde das Problem in dieser Fassung das Problem ($B$) nennen.

VIII. Das von v. HELMHOLTZ behandelte Problem steht zu dem soeben gelösten in naher Beziehung, deckt es aber keinesfalls. Bei v. HELMHOLTZ sind nämlich Anfangslage und Endlage auch der *äusseren Punkte,* sowie Anfangswert und Endwert der *Energie dieselben* für die *variirte* Bewegung, wie für die *unvariirte,* was in den Problemen (*A*) und (*B*) nicht vorausgesetzt ist. Wir wollen das v. HELMHOLTZ'sche Problem unter allgemeineren Voraussetzungen, bezüglich der Bedingungs-Gleichungen der Bewegung und bezüglich der Kräfte, lösen. Wir wollen nämlich voraussetzen, dass im Kräftepotential, wie auch in der lebendigen Kraft die Zeit nur insoferne auftritt, als in dieselben Functionen $q_k$ und deren Geschwindigkeiten $q_k' = \frac{dq_k}{dt}$ eintreten, — etwa Coordinaten und Geschwindigkeiten äusserer Punkte oder andere nicht constante Entfernungen etc. Indem wir dann als reihendes Element die unvariirbare Veränderliche $\varphi$ einführen, werden wir *sowohl die $q_k$, als auch die Gesammtenergie des System als veränderliche, aber nicht variirbare Functionen dieses $\varphi$, auffassen* — während die Coordinaten $q_i$ der inneren Punkte des Systems, wie auch die Zeit $t$ der Variation unterworfene Grössen sind.

Dies vorausgeschickt, lautet das zu lösende Problem, wie folgt:

*(C) Gesucht wird jene continuirliche Bewegung des Punktsystems, für welche die Gleichung (12) stattfindet bei variirendem $t_1$, falls der Bereich der Variation durch die Bedingungs-Gleichung beschränkt ist,*

$$F = E(\varphi),$$

*wo weder $\varphi$ noch $E(\varphi)$ einer Variation unterliegt. Die Anfangslagen und Endlagen der Punkte des Systems seien dieselben für die variirte, wie für die gesuchte Bewegung.*

Den Voraussetzungen gemäss sind die $q_k$ unvariirbar, d. i.:

$$\delta q_k = 0,\ \delta \frac{dq_k}{d\varphi} = 0;$$

daher

$$\delta q_k' = \delta \frac{\frac{dq_k}{d\varphi}}{\frac{dt}{d\varphi}} = -q_k' \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\delta t}{d\varphi}.$$

Für die Variation der Coordinaten und Geschwindigkeiten der inneren Punkte hingegen bestehen die allgemeineren Beziehungen $\delta q_i \gtreqless o$, und

$$\delta q_i' = \left(\frac{d\delta q_i}{d\varphi} - q_i' \frac{d\delta t}{d\varphi}\right) \frac{d\varphi}{dt}.$$

Setzt man wie in (15)

$$\Omega = F + f + \lambda (F - E(\varphi)), \tag{19a}$$

wo $\lambda$ den LAGRANGE'schen Multiplicator bezeichnet, und reducirt die Gleichung

$$\delta A = \delta \int_0^{\varphi_1} \Omega \frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{\varphi_1} \left(\delta\Omega \cdot \frac{dt}{d\varphi} + \Omega \frac{d\delta t}{d\varphi}\right) d\varphi$$

nach bekannter Methode, so erhält man

$$\delta A = \int_0^{\varphi_1} \left(\Omega - \Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial q_k'} q_k'\right) \frac{d\delta t}{d\varphi} d\varphi +$$
$$+ \int_0^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'}\right) \delta q_i \frac{dt}{d\varphi} d\varphi.$$

Dabei ist schon darauf Rücksicht genommen, dass die $\delta q_i$ für die Anfangslagen und die Endlagen verschwinden.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Verschwindens von $\delta A$ sind demnach:

$$\Omega - \Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial q_k'} q_k' = 0; \tag{a}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} = 0, \tag{b}$$

$(i = 1, \ldots, n)$.

Indem man für $\Omega$ seine Bedeutung einführt, findet man

$$\Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' = (1+\lambda) \Sigma_i \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' + \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i',$$

$$\Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial q_k'} q_k' = (1+\lambda) \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial q_k'} q_k' + \Sigma_k \frac{\partial f}{\partial q_k'} q_k'.$$

Da ferner $F=E(\varphi)$ ist, so hat man aus (19$a$) und (3):

$$\Omega = F+f = \Sigma_k \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i'.$$

Daher lässt sich die Gleichung ($a$) explicit schreiben, wie folgt:

$$(1+\lambda)\left[\Sigma_i \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' + \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial q_k'} q_k'\right] + \Sigma_k \frac{\partial f}{\partial q_k'} q_k' = 0. \qquad (a')$$

Aus dieser Gleichung ist $\lambda$ eindeutig bestimmt; und dieses $\lambda$ in das System ($b$) eingesetzt, liefert die gesuchte Bewegung des Systems. *Diese Bewegung ist aber dann, und nur dann die* LAGRANGE'sche, *wenn*

$$\Sigma_k \frac{\partial f}{\partial q_k'} q_k' = 0$$

ist, — also jedenfalls *nur in einem Specialfall.* Ein solcher Specialfall ist z. B. der von v. HELMHOLTZ betrachtete. Da nämlich sowohl die lebendige Kraft, als auch das Potential unabhängig sind von den Geschwindigkeiten der äusseren Punkte, so ist für alle $k$

$$\frac{\partial f}{\partial q_k'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_k'} = 0,$$

und die Gleichung ($a'$) reducirt sich auf

$$(1+\lambda) \Sigma_i \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' = 0;$$

eine Gleichung, die nur durch die Identität $1+\lambda=o$ zu erfüllen ist.

Damit ist bewiesen, dass die Conception von v. HELMHOLTZ nicht geeignet ist, eine Verallgemeinerung des Princips zu liefern für Fälle, wo in die HAMILTON'sche Function $f$ *auch* die *Geschwindigkeiten* äusserer Punkte des Systems eintreten; sie führt aber

zur Verallgemeinerung des Princips, wenn in die HAMILTON'sche Function bloss veränderliche äussere *Coordinaten* eintreten. Es ist hervorzuheben, dass bei dieser Conception der Satz von der lebendigen Kraft, oder ein diesem æquivalenter Satz *keine* Voraussetzung, sondern eine *Folge* des Princips der kleinsten Action ist, was auch die Conception (*A*) auszeichnet. Letztere Conception hat aber vor der HELMHOLTZ'schen den Vorzug grösserer Allgemeinheit für sich.

IX. Im Anschluss an diese Untersuchungen möge folgendes Problem Platz finden:

Das Punktsystem gehe aus der Anfangslage $a_1, \ldots, a_n$ über in die Endlage $b_1, \ldots, b_n$. Gesucht wird die continuirliche Bewegung, für welche die erste Variation der Action verschwindet, falls der Bereich der Variation der Beschränkung unterworfen ist, dass sowohl für die variirte, als auch für die unvariirte Bewegung die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$F = E(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -E'(t)$$

wo $E(t)$ eine der Variation *nur insoferne* unterworfene Function von $t$ bedeutet, als $t$ selbst variirt; $E(t)$ ist übrigens selbst eine unbekannte Function.

Ausserdem sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. entweder sei die Zeitdauer der Action eine zwischen der Zeit $o$ und einem festen Wert beliebig veränderliche Grösse;

2. oder die Zeitdauer der Action sei fest, dafür aber der unvariirten Bewegung die Beschränkung auferlegt, dass sie der Gleichung (18) gemäss vor sich gehe, in welcher daher die $\nu_i$ nicht sämmtlich $= q_i'$ seien.

Ich werde das Problem im Falle der ersten Alternative mit $C_1$, im Falle der zweiten mit $C_2$ bezeichnen.

Setzt man hier

$$\Omega = F + f + \lambda(F - E(t)) + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial t} + E'(t)\right), \qquad (20)$$

so sind allenfalls auch jetzt die Gleichungen (*a*), (*b*), (*c*) pag. 9 zu erfüllen, von denen (*c*) eine Folge des Systems (*b*) ist.

Die Gleichung (*a*) nimmt mit Herbeiziehung der Bedingungs-Gleichungen $F=E$, und $\frac{\partial f}{\partial t}=-E'$ die Form an

$$(1+\lambda)\sum_1^n \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' + \mu \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'} q_i' = 0, \tag{21}$$

eine Gleichung, die im Falle des Problems $C_1$ für alle Werthe $t$ von $o$ an bis $t_1$ gelten soll.

Wir haben also zur Bestimmung von

$$1+\lambda,\ \mu;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$$

die Gleichung (21), die $n$ Gleichungen des Systems (*b*), und die aus den Bedingungs-Gleichungen mittels Elimination der unbekannten Function $E$ sich ergebende Gleichung

$$\frac{dF}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Die Anzahl der Differential-Gleichungen ist gleich der Anzahl der zu berechnenden Grössen; aber in die allgemeine Lösung der Gleichungen treten $2n+1$ *unabhängige* Constante ein, während die Anzahl der gegebenen Constanten $a_1, \ldots, b_n$ gleich ist $2n$. Das LAGRANGE'sche System, welches sich ergiebt, wenn

$$1+\lambda=\mu\equiv 0$$

ist, bildet *nur* eine particuläre Lösung.

Es giebt aber einen Specialfall, in welchem — falls zwischen den Anfangs-Coordinaten und Geschwindigkeiten der Punkte keine Abhängigkeit stattfinden soll — nur das LAGRANGE'sche System den Bedingungen des Problems entspricht. Dies ist eben der von v. HELMHOLTZ behandelte Fall.

Sind nämlich die Bedingungsgleichungen unabhängig von der Zeit, und das Potential nur insoferne abhängig von der Zeit, als in ihm Coordinaten äusserer, nach vollständig gegebenem Gesetz sich bewegender Punkte vorkommen, so hat man

$$f=T+U, \quad F=T-U.$$

$$\sum_1^n{}^i \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' = 2T,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial q_i'} = 0,$$

$$(i=1, \ldots n),$$

Die Gleichung (21) geht daher über in

$$(1+\lambda)\, T=0,$$

die für *beliebige* Zeitpunkte zwischen $o$ und $t_1$ bestehen soll. Es muss daher, da $T$ nicht $= o$ ist, $1+\lambda \equiv o$ sein. Die Gleichungen $(b)$ übergehen demzufolge in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i} - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} = 0,$$

$$(i=1, \ldots, n)$$

ein System, welches mit dem Satz von der lebendigen Kraft

$$\frac{dF}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

nur dann verträglich ist, wenn

$$\mu \sum_1^n{}^i \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} q_i' = 0.$$

ist. Der Factor von $\mu$ kann aber nur dann verschwinden, wenn sein Wert schon zur Zeit $t=o$ gleich Null war, d. i. wenn Anfangslage und Geschwindigkeiten einer Beschränkung unterliegen was ausgeschlossen ist. Es muss daher $\mu \equiv o$ sein. q. e. d.

X. Im Falle des *Problems* $C_2$ besteht die Gleichung (21) *bloss* zur Zeit $t=t_1$; dafür haben wir aber jetzt ausser den von einander unabhängigen Gleichungen $(b)$ und (9) noch die Gleichung (18) zu erfüllen, also zusammen $n+2$ Differential-Gleichungen von der Gesammtordnung $2n+2$ mit $n+2$ zu bestimmenden Functionen

$$1+\lambda, \mu, q_1, \ldots, q_n.$$

Da die allgemeine Lösung $2n+2$ willkührliche Constante enthält, während durch das Problem $2n$ Constanten $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$ direct gegeben sind und mittels der Grenzgleichung (21) *eine* Beziehung zwischen denselben vorgeschrieben ist, so bleibt *eine* derselben *völlig* willkührlich. Die LAGRANGE'sche Bewegung liefert nur eine particuläre Lösung des Variationsproblems.

Es giebt aber einen Specialfall, in welchem diese Bewegung die allgemeine Lösung ergiebt. Wenn nämlich ebenso, wie vorhin, die Bedingungsgleichungen von der Zeit und das Potential von Geschwindigkeiten unabhängig sind, so geht die Gleichung (21) über in

$$(1+\lambda)_{t_1} T_{t_1}=0,$$

daher ist $(1+\lambda)_{t_1}=o$.

Die Gleichungen $(b)$ lassen sich in diesem Fall schreiben, wie folgt:

$$0=\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'}+(1+\lambda)\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}(1+\lambda)\frac{\partial F}{\partial q_i'}+\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q_i}.$$

Aus ihnen ergiebt sich, mit Rücksicht auf (18), die Gleichung

$$0=(1+\lambda)\sum_1^n{}_i \nu_i\frac{\partial F}{\partial q_i}-\sum_1^n{}_i \nu_i\frac{d}{dt}(1+\lambda)\frac{\partial F}{\partial q_i'}+\mu\sum_1^n{}_i \nu_i\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q_i}$$

d. i.

$$G_{10}\frac{d(1+\lambda)}{dt}-G_{11}(1+\lambda)-G_{12}\mu=0, \qquad (22)$$

wo

$$G_{10}=\sum_1^n{}_i \nu_i\frac{\partial F}{\partial q_i'};\quad G_{12}=\sum_1^n{}_i \nu_i\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q_i};$$

$$G_{11}=\sum_1^n{}_i \nu_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right).$$

Ebenso folgt aus demselben Gleichungs-System mittels (9) die Gleichung

$$G_{00}\frac{d(1+\lambda)}{dt}-G_{01}(1+\lambda)-G_{02}\mu=0, \qquad (23)$$

wo gesetzt ist

$$G_{00}=\sum_1^n{}_i q_i'\frac{\partial F}{\partial q_i};\quad G_{02}=\sum_1^n{}_i q_i'\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q_i};$$

$$G_{01}=\sum_1^n{}_i q_i'\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right).$$

Die $\nu_i$ sind nicht sämmtlich $= q_i'$, daher enthalten die Gleichungen (22) und (23) zwei von einander unabhängige Aussagen. Die $\nu_i$ mögen der Beschränkung gemäss bestimmt werden, dass von den Determinanten

$$H_0 = G_{00}G_{12} - G_{10}G_{02};$$
$$H_1 = G_{01}G_{12} - G_{02}G_{11};$$

die erste innerhalb der Zeit $o$ bis $t_1$ nirgends verschwinde, und die zweite nirgends unendlich gross sei; eine Bedingung, die erfüllt ist, wenn z. B.

$$\nu_i = G_{00}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} - G_{02}\frac{\partial F}{\partial q_i'};$$
$$(i-1, \ldots, n).$$

Durch Elimination von $\mu$ aus den Gleichungen (22) und (23) ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{d(1+\lambda)}{dt} = \frac{H_1}{H_0}(1+\lambda)$$

die für alle Zeiten von $o$ an bis $t_1$ bestehen soll, während

$$(1+\lambda)_{t_1} = 0$$

ist. Aus denselben Gründen, wie pag. 12, folgt daher auch hier, dass

$$1+\lambda \equiv 0.$$

Da $G_{02}$ nicht verschwindet, so ergiebt sich schliesslich aus (23) für $\mu$ der Werth $o$.

Damit ist bewiesen, dass in dem betrachteten Specialfall, — falls nur die $\nu_i$ der bezeichneten Bedingung gemäss gegeben sind, — die Bewegungs-Gleichungen des Systems die LAGRANGE'schen sind.

2.

# DIE VERFOLGUNGSCURVE DES KREISES BEI CONSTANTEM ABSTANDE.

Von Dr. KOLOMAN v. SZILY,

O. M. UND GENERALSECRETÄR DER AKADEMIE.

Gelesen in der Sitzung der Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft den 6. December 1894.

Aus: «Mathematikai és Physikai Lapok» (Mathematische und Physikalische Blätter), Band III pp. 353—358, 1894.

Herr Lyubomir Klerič, Professor der Mechanik an der Hochschule zu Belgrad, teilte mir gelegentlich seiner Reise durch Budapest im Herbste 1893 mit, dass er constructiv einen eigentümlichen kinematischen Satz gefunden habe, welcher, wenn seine allgemeine Gültigkeit mathematisch streng zu beweisen möglich wäre, nicht nur in theoretischer Hinsicht, sondern auch in Hinsicht der praktischen Planimetrie von einiger Wichtigkeit wäre.

Der Satz ist folgender:

*Während der verfolgte Punct A in der Ebene eine willkürliche geschlossene Curve umläuft und zurückkehrend zu seinem Ausgangspuncte ($A_0$) von dort aus bis zum Schwerpuncte (S) der von der Curve umschlossenen Fläche in gerader Linie absteigt — kommt zuletzt der verfolgende Punct B* (vorausgesetzt, seine Entfernung von $A$ sei constant, und dass beim Beginn der Bewegung $B_0$, $A_0$ und $S$ in einer Geraden lagen) *nach einem Orte $B_s$, so dass, wenn die Länge des aus $B_s$ auf $A_0B_0$ gefällten Perpendikels mit h, die Entfernung AB mit l bezeichnet wird, das Product hl dem Flächeninhalte der von der geschlossenen Curve umschlossenen ebenen Figur gleich ist.*

Ich wollte mich überzeugen, ob dieser Satz mindestens auf eine Figur, wenn auch zwischen gewissen Grenzen, streng richtig sei. Aus diesem Grunde bestimmte ich die Verfolgungscurve des

auf dem Umfange eines Kreises einmal herumlaufenden und dann zum Mittelpunct auf geradem Wege absteigenden Punctes, bei constanter Entfernung.

Das Resultat meiner Untersuchungen legte Herr Prof. Klerić der Klassen-Sitzung (December 1893.) der k. serbischen Akademie vor, und publicirte es auch im 41-ten Bande der serbischen akademischen Zeitschrift «Glas».

Im Folgenden gebe ich meine diesbezüglichen Entwickelungen.

## I.

Nehmen wir vorläufig an, der verfolgte Punct $A$ bewege sich auf einer willkürlichen ebenen Curve:

$$y=f(x) \qquad 1)$$

und fragen, welche Bahn der verfolgende Punct $B$ beschreibt, wenn die Entfernung der Puncte dieselbe bleibt. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes $A$ mit $(x, y)$ die des $B$ mit $(\xi, \eta)$, ihre constante Entfernung mit $l$, so ist:

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=l^2 \qquad 2)$$

$$\eta-y=\frac{d\eta}{d\xi}(\xi-x) \qquad 3)$$

Bezeichnen wir ferner das Bogenelement der Verfolgungscurve mit $d\sigma$, so entsteht durch Verbindung der Gleichungen 2) und 3)

$$\xi-x=\pm l\frac{d\xi}{d\sigma}$$

$$\eta-y=\pm l\frac{d\eta}{d\sigma}$$

Substituiren wir die aus diesen Gleichungen genommenen Werte der $x$ und $y$ in 1), so erhalten wir die Differentialgleichung der Verfolgungscurve.

Die Differentiation der Gleichung 2) führt nach einfacher Transformation zur Relation:

$$(\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy=\frac{l^2}{\xi-x}\,d\xi=\frac{l^2}{\eta-y}\,dy \qquad 4)$$

die wir weiter unten benötigen werden.

## II.

Es sei die Bahn des Punctes $A$ ein Kreis mit dem Radius $a$, dessen Mittelpunct $(S)$ wir zum Coordinaten-Anfang nehmen; dann wird:

$$\left(\xi \mp l\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\eta \mp l\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 = a^2$$

und hieraus, wenn $\varrho$ den Radius Vector von $B$ bezeichnet:

$$\frac{d\sigma}{d\varrho} = \pm\frac{2l\varrho}{\varrho^2+l^2-a^2}$$

Führen wir Polarcoordinaten $\varrho$ und $\vartheta$ ein, und rechnen wir den Winkel $\vartheta$ von der Anfangs-Lage des $SA_0B_0$, so ist:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varrho}\right)^2 = 1 + \varrho^2\left(\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2$$

und hieraus, da bei wachsendem $\vartheta$, $\varrho$ abnimmt,

$$\frac{d\vartheta}{d\varrho} = -\frac{\sqrt{4l^2\varrho^2-(\varrho^2+l^2-a^2)^2}}{\varrho(\varrho^2+l^2-a^2)}$$

Zur Erleichterung der Integration führen wir statt $\varrho$ nach der Definition:

$$\cos\alpha = \frac{\varrho^2+a^2-l^2}{2a\varrho}$$

als neue Variable den Winkel $\alpha$ ein, also den von den Radien Vectoren $SA$ und $SB$ eingeschlossenen Winkel. Nach gehöriger Reduction erhalten wir:

$$\frac{d\vartheta}{d\alpha} = \frac{a^2\sin^2\alpha}{l^2-a^2\sin^2\alpha}$$

Wir bezeichnen $\sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2}$ mit $k$, und integriren,

$$\vartheta + \alpha = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}(k\operatorname{tg}\alpha); \qquad 5)$$

die Integrationscontante ist nämlich null, da in der Anfangslage $\alpha$ und $\vartheta$ null sind.

Bezeichnen wir den Richtungswinkel des Radius Vectors $SA$ (von $SA_0$ aus gerechnet) mit $\varphi$, und beachten, dass:

$$\alpha = \varphi - \vartheta,$$

so kann man die Gleichung (5) auch in der Form:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \vartheta) = \frac{1}{k} \operatorname{tg}(k\varphi) \qquad 6)$$

schreiben.

Diese Gleichung gibt zu jedem Werthe von $\varphi$ den zugehörigen Werth von $\vartheta$, es drückt also (in den Coordinaten $\vartheta$ u. $\varphi$) die Gleichung der Verfolgungscurve des Kreises bei constant bleibender Entfernung aus.

Ist $k^2 < 0$, so ist die Verfolgungscurve eine Spirale, die sich dem Kreise, dessen Centrum $S$, dessen Radius $\sqrt{a^2 - l^2}$ ist, nähert; ist $k^2 = 0$, so ist die Curve auch eine Spirale, die sich aber dem Mittelpuncte $S$ nähert; ist endlich $k^2 > 0$, so ist $\varrho$ eine periodische Function von $\varphi$ mit der Periode $\frac{2\pi}{k}$.

## III.

Nachdem der einmalige Umlauf der Kreisperipherie beendet ist, ist:

$$\varphi = 2\pi$$

und nach Gl. (6) ist für den entsprechenden Wert $\vartheta_1$

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = -\frac{1}{k} \operatorname{tg} 2\pi k \qquad 7)$$

Jetzt steigt der Punct $A$ auf dem Halbmesser $A_0S$ in den Mittelpunct nieder. Nehmen wir die Gerade $SA_0B_0$ zur $yAxe$, so ist in der Gl. 4), $x = 0$, und mit Bezug auf 2) wird:

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{l}{\xi \sqrt{l^2 - \xi^2}}$$

Integriren wir und bezeichnen die Integrationsconstante mit $\frac{c}{l}$, so wird

$$\xi = \frac{2l}{e^{\frac{c-y}{l}} + e^{-\frac{c-y}{l}}}$$

und nach 2)

$$\eta = y + \frac{e^{\frac{c-y}{l}} - e^{-\frac{c-y}{l}}}{e^{\frac{c-y}{l}} + e^{-\frac{c-y}{l}}}$$

Diese zwei Ausdrücke ergeben:

$$\sqrt{\frac{l+y}{l-y}}\, e^{\frac{c-y}{l}} = \frac{l}{\sqrt{l^2-y^2}}\cdot\frac{\eta}{\xi} + \sqrt{\frac{l^2}{l^2-y^2}\cdot\frac{\eta^2}{\xi^2}+1} \qquad 8)$$

Sämmtliche Puncte der Geraden $A_0S$ müssen dieser Gleichung genügen. Im Puncte $A_0$ ist:

$$y=a;\ \frac{l}{\sqrt{l^2-y^2}} = \frac{1}{k};\ \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{cotg}\vartheta_1;$$

also:

$$\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}\, e^{\frac{c-y}{l}} = \frac{1}{k}\operatorname{cotg}\vartheta_1 + \sqrt{\frac{1}{k^2}\operatorname{cotg}^2\vartheta_1+1}$$

Nach 7) jedoch ist:

$$\frac{1}{k}\operatorname{cotg}\vartheta_1 = -\operatorname{cotg} 2\pi k$$

und nach gehöriger Reduction:

$$\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}\, e^{\frac{c-a}{l}} = -\operatorname{cotg}\pi k \qquad 9)$$

Im Puncte $S$ ist:

$$y=0, \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{cotg}\vartheta_s$$

wo $\vartheta_s$ den Richtungswinkel der Geraden $SB_s$ bezeichnet.

Folglich ist:

$$e^{\frac{c}{l}} = \operatorname{cotg}\frac{\vartheta_s}{2} \qquad 10)$$

Aus 10) u. 9) entsteht:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{2} = -\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}\, e^{-\frac{a}{l}} \operatorname{tg}\pi k$$

oder, wenn wir $m$ statt $\frac{a}{l}$ schreiben:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{2} = -\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\, e^{-m} \operatorname{tg}(\pi\sqrt{1-m^2}) \qquad 11)$$

und hiemit ist der von der Anfangslage gerechnete Richtungswinkel $\vartheta_s$ der Endlage des $SB$ bestimmt; und der Radius Vector des Punctes $B_s$, $\varrho_s$ ist:

$$\varrho_s = l.$$

## IV.

Laut der Construction des Herrn Klerić müsste der Ausdruck:

$$l^2 \sin\vartheta_s$$

gleich $\pi a^2$ sein, also:

$$\frac{\sin\vartheta_s}{\pi m^2} = 1.$$

Ich berechnete nach der Gl. 11) den Werth von $\vartheta_s$ für die verschiedenen Werthe von $m$. Die Resultate fasse ich in die folgende kleine Tabelle zusammen:

| $m$ | $\frac{\sin\vartheta_s}{\pi m^2}$ |
|---|---|
| 0·50 | 0·98063 |
| 0·48 | 0·99257 |
| 0·465 | 0·99968 |
| 0·4643 | 1·00000 |
| 0·46 | 1·00176 |
| 0·25 | 1·01485 |

Wir sehen, dass der vermeintliche Satz nur für einen einzigen Wert von $m$ streng richtig ist; wir sehen aber auch, dass der Fehler zwischen verhältnissmässig weiten Grenzen so klein ist, (we iger als 2%), dass die Übereinstimmung jedenfalls sehr bemerkenswert ist, da der Fehler in der Construction kaum bemerkbar wird.

3.

# DAS $\alpha_1\alpha_2$-THIONAPHTALIN UND EINIGE SEINER DERIVATE.

Von A. D. HERZFELDER.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 24. Juni 1895 vom o. M. Karl v. *Than*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIII, pp. 323—330. 1895.

Herr Professor RAMSAY hatte die Güte mich auf den Gegenstand der folgenden Untersuchung aufmerksam zu machen und sage ich ihm an dieser Stelle hierfür besten Dank.

Derselbe machte einmal die Wahrnehmung, dass $\alpha$-Nitronaphtalin, mit Schwefel erhitzt, bei höherer Temperatur Gase entbindet, wobei das Gemisch eine lichtgrüne Färbung annimmt. Seit Herbst 1893 war ich beinahe ausschliesslich mit der Untersuchung dieser Reaction und mit der Bestimmung des dabei gebildeten grünen Körpers beschäftigt. Der Gegenstand hatte für mich umso grösseres Interesse, als ich mich bald davon überzeugte, dass das $\alpha$-Nitronaphtalin bei dieser Reaction den Stickstoff verliere, mir aber keine Angabe bekannt war, dass ein Nitrokörper sich ähnlich verhalten hätte.

Jedes, in welchem Verhältniss immer dargestellte Gemisch von Schwefel und $\alpha$-Nitronaphtalin gibt beim Erhitzen den neuen Körper, doch können wir denselben, wenn mehr als 80% Schwefel angewandt wurde, aus der entstandenen, gelben, harten Masse kaum isoliren. Es ergab sich, dass es am vorteilhaftesten ist ungefähr 20—25% $S$ zu nehmen, wobei allerdings ein Teil des Nitronaphtalins unverändert bleibt, welches aber leicht zu entfernen ist, während Schwefel nur in geringen Mengen zurückbleibt. Dies ist umso wichtiger, da, wie wir gleich sehen werden, die Entfernung des Schwefels ein langwieriges Verfahren erfor-

dert. Gewöhnlich erhitzte ich in einem mittelgrossen Erlenmayer-schen Kolben auf freier Flamme 150 Gramm $\alpha$-Nitronaphtalin und 30 Gramm Schwefel. Die Masse wird nach dem Schmelzen unter fortwährendem Schütteln bis auf 270 Grad erhitzt, wobei sie plötzlich $SO_2$ entbindet, welches Gas beim Entweichen viel Nitronaphtalin mit sich reisst. Die Reaction ist so heftig, dass weiteres Erhitzen unnötig ist. Das Gemisch fängt an zu sieden, wird grün, endlich schwarz. Das Gefäss wird auf eine Asbestplatte gestellt, in zwei bis drei Minuten ist die Reaction beendet und wir können die dickflüssige, noch warme Masse in ein offenes Gefäss schütten. Nach dem Erkalten liegt eine schwarze, spröde, leicht pulverisirbare Masse vor uns, die aus Kohle, Nitronaphtalin, etwas Schwefel und aus dem neuen Körper besteht. Mit Alkohol oder Aether kann man daraus das Nitronaphtalin extrahiren und der Rest gibt in grossen Mengen Chloroform oder Schwefelkohlenstoff gekocht eine selbst in dünner Schichte kaum durchsichtige Lösung. Diese starke Färbung der Lösung ist umso auffallender, als sich der neue Körper äusserst schwer löst. Aus der Chloroform oder Schwefelkohlenstofflösung fällt Alkohol, Aether oder Ligroin, ein in trockenem Zustand dunkelgrünes amorphes Pulver. Zur Fällung wird möglichst viel Alkohol verwandt, da derselbe immerhin ziemlich viel Schwefel löst,* jedenfalls aber das etwa noch zurückgebliebene Nitronaphtalin gelöst erhalten wird. Dieses Verfahren wird mehrmals wiederholt und endlich wird die im Vacuumexsicator getrocknete Substanz solange mit frischen Alkoholmengen gekocht, bis derselbe schwachgrün gefärbt erscheint. Der neue Körper ist nämlich viel weniger löslich in Alkohol, als Schwefel, und es gelang mir auf diese Weise jene geringe Mengen freien Schwefels zu entfernen, welche das amorphe Pulver beim Præcipitiren constant mitreisst. Die so gereinigte und 5 Tage im Vacuumexsicator gestandene Substanz zeigte 9·5% Schwefelgehalt, während ich nach der ersten Fällung noch 27% fand.

Diese 19·5% Schwefel gehören zur Constitution des Körpers. Hierauf weist, dass es mir nicht gelang den Schwefelgehalt

* Bloxam, Chemical News. 53. 181.

weiter herabzudrücken, dass bei verschiedenen Darstellungsweisen niemals ein geringerer Gehalt an Schwefel zu erreichen war und endlich, dass ich Schwefel selbst im Vacuum nicht herausdestilliren konnte.

Ich versuchte den Körper auch auf andere Weise vom Schwefel zu befreien, so durch Fällung mit Alkohol oder Wasser aus einer Phenollösung oder aus Nitrobenzol, Aceton, Amylacetat mit Ligroin, Aether, oder Alkohol, endlich durch Fällung aus Anilin mit salzsaurem Alkohol, sowie durch Ausschütteln des gefällten Pulvers mit farblosem Ammoniumsulfhydrat. Alle diese Verfahren führten zu demselben Resultat, doch erwies sich die erste Darstellungsweise als die bequemste.

Es war nun mein Bestreben dahin gerichtet, die Verbindung krystallinisch zu erhalten, jedoch vergebens. Ob durch Auskühlung oder durch Verdampfen des Lösungsmittels, sei es durch Wärme oder im Vacuum, aus jeglichem Lösungsmittel und bei sämmtlichen Fällungsversuchen erhielt ich stets ein amorphes Pulver. Selbst bei jenem langsamen Process, wenn Phenol aus der Luft Wasser anziehend ins Hydrat übergeht, gelang es mir nicht den Körper krystallinisch zu erhalten. Den Körper zu sublimiren gelang mir nicht. Selbst in jenem hochgradigem Vacuum, welches der Gebrauch der Schuller-schen Luftpumpe gestattet, zersetzt sich der Körper ohne zu sublimiren.

Da Pikrinsäure mit Naphtalin-Derivaten gut characterisirte Doppelsalze gibt, habe ich auch diesbezüglich einige Versuche mit dem neuen Körper angestellt, aber ohne Erfolg.

Die physicalischen Eigenschaften des Körpers sind folgende: mit Wasserdampf ist es nicht destillirbar. Wie bereits angeführt, ist es stets nur in solchen Mitteln lösbar, die auch Schwefel aufnehmen, wie Chloroform, Schwefelkohlenstoff, Nitrobenzol, Amylacetat, Anilin etc. Seine Löslichkeit ist auffallend gering, wie das folgende Daten zeigen:

| 100 gr. | bei | löst |
|---|---|---|
| Chloroform | 61° | 0,217 |
| « | 15° | 0,201 |
| Amylacetat | 15° | 0,313 |
| Nitrobenzol | 15° | 2,150 |

Den Schmelzpunkt fand ich zu 155°. Das specifische Gewicht des geschmolzenen wie ungeschmolzenen Körpers, mit ganz feinem Pulver bestimmt nach der Methode des Schwebens, ergab sich zu 1,225. Das Moleculargewicht fand ich nach BECKMANN's Siedepunktmethode in Chloroform zu 152. Die Schwefelbestimmung ergab folgendes Resultat:

0,1040 gr. Substanz gaben 0,1480 gr. $BaSO_4$ gleich 0,0203 gr. Schwefel d. h. 19,54%.

Stickstoff ist in dieser Verbindung überhaupt nicht vorhanden. Von diesem auffallenden Resultate habe ich mich durch wiederholte, nach der Methode DUMAS ausgeführte Stickstoffbestimmungen überzeugt.

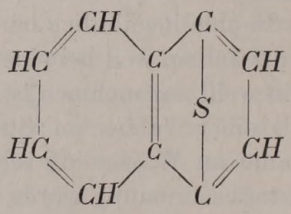
Bei der Bestimmung der Constitution bin ich aus Folgendem ausgegangen. Sowohl die Bildung der Verbindung, wie sein Verhalten gegenüber Brom und Salpetersäure, beweisen, dass seine Constitution der des Naphtalins ähnlich ist. Der Schwefel muss in $\alpha$ Stellung substituirt haben, weil bei einer so glatten Reaction eine Umlagerung nicht wohl anzunehmen ist. Allein das Schwefelatom konnte nur mit einer Valenz an Stelle der Nitrogruppe treten, die Zweite könnte an Wasserstoff oder Sauerstoff gebunden sein. Die Kohlenstoffbestimmung würde in diesen Fällen keinen Unterschied aufweisen, und auch die directe Sauerstoffbestimmung ist kaum von solcher Beweiskraft um die Frage zu entscheiden. Allein der grüne Körper hat keinen Geruch und gibt weder mit Mercurichlorid noch mit essigsauerem Blei Niederschläge, was doch die Characteristik der *SH* Gruppe wäre, und andererseits löst sich die neue Verbindung weder in Säuern noch in Basen.

Die Annahme, dass vielleicht 2 Naphtalinringe durch 2 Schwefelatome verbunden sind, ist wohl auch nicht haltbar, da eine solche den Azotkörpern ähnliche Verbindung kaum so wenig reactionsfähig wäre und auch das doppelte Moleculargewicht hätte. Es bleibt nur noch die Möglichkeit übrig, dass das Schwefelatom mit seiner 2-ten Valenz an ein zweites Kohlenstoffatom des Naphtalinringes selbst gebunden ist. Seine Formel wäre dann $C_{10}H_6S$ Dem entspricht auch die Analyse, gefunden 19,54% Schwefel, berechnet 20,3%, sowie das Moleculargewicht zu 152, gefunden

für 158. Endlich entspricht dieser Formel auch das neutrale Verhalten des neuen Körpers.

Auf die Frage, welche Kohlenstoffatome das Schwefelatom verbindet, antwortet das Resultat der Oxydation, bei welcher Phtalsäure resultirt, sowie die Wirkung des Broms. Wenn wir nämlich zu einer concentrirten Schwefelkohlenstoff-Lösung des Körpers Brom zutröpfeln lassen und danach das überschüssige Brom sowie den Schwefelkohlenstoff im Vacuum entfernen, so erhalten wir neben anderen Producten, welche unten angeführt sind. auch $\alpha_1\alpha_2$ Dibromnaphtalin. Dasselbe wurde identificirt durch die Brombestimmung sowie durch den Schmelzpunkt.

Auf Grund dieser Resultate, glaube ich, kann man den beim Erhitzen auf 270 Grad von $\alpha$-Nitronaphtalin und Schwefel sich bildenden grünen Körper durch die folgende Formel ausdrücken:

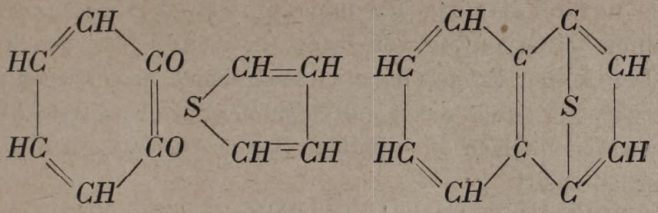



Die hier beschriebene Verbindung ist nach ihrer Constitution als $\alpha_1\alpha_2$ Thionaphtalin, oder nach einer andern Nomenclatur als 1,4 Thionaphtalin anzusprechen. Ich werde die erstere Ausdrucksweise benützen, umso mehr als auch Reverdin und Nölting sich desselben bedienten.

Es ist mir aufgefallen, dass das $\alpha_1\alpha_2$ Thionaphtalin in seinen physikalischen Eigenschaften vielfach übereinstimmt, mit gewissen Condensationsproducten, welche Victor Meyer in seinem Werke über das Thiophen anführt. Als derselbe Thiophen in schwefelsauerer Lösung mit Diketonen zusammenbrachte, welche die *CO—CO* Gruppe* enthielten, d. h. in welcher die zwei Ketongruppen Orthostellung zu einander einnehmen, erhielt er charakteristisch gefärbte amorphe pulverförmige Verbindungen, welche

* V. Meyer: Thiophengruppe 24—25.

in Aether und Lygroin unlöslich, in Chloroform aber löslich werden. Es ist mir auch aufgefallen, dass des $\alpha_1\alpha_2$ Thionaphtalin nach seiner Constructionformel als ein Product betrachtet werden kann, wie es ähnlich aus dem hypothetischen Benzolorthochinon durch Condensation mit Thiophen entstehen könnte.




Hiebei habe ich ohne weitere Begründung einfach angenommen, dass die Condensation durch die in $\alpha$-Stellung befindlichen Kohlenstoff-Atome vermittelt wird. Hierüber geben zwar die Untersuchungen Victor Meyer's keinen Aufschluss, allein, da ich aus dem $\alpha_1\alpha_2$ Thionaphtalin, in welchem die $\alpha$ Stellungen besetzt sind, die $\beta$ Stellungen aber noch Wasserstoff enthalten, die dem Thiophen entsprechende Reaction mit Diketonen nicht erhalten konnte, so glaube ich, dies annehmen zu können.

Diese, zwischen zwei auf so sehr verschiedene Weise dargestellten Körpern bestehende grosse Aehnlichkeit dachte ich nicht übergehen zu dürfen.

Nun einige Worte über die Derivate. Sie sind alle amorphe Pulver, alle sind sie färbig:

| | |
|---|---|
| Monobromthionaphtalin | lichtgrün |
| Das Baritsalz der Sulfosäure | grau |
| Das Bleisalz « « | schwarz |
| Thionitro Produckt I. | ziegelrot |
| « « II. | rotbraun. |

Die Darstellung aller dieser Körper ist complicirt, da dieselben stets nur in geringen Mengen entstehen und ihre Reinigung recht beschwerlich ist.

## Die Wirkung des Broms.

Wenn wir zu einer verdünten Lösung des Thionaphtalins in Chloroform oder Schwefelkohlenstoff eine geringe Menge Brom zutropfen lassen, so erhalten wir, nach Entfernung des Lösungsmittels unverändert das Thionaphtalin, etwas Dibromnaphtalin und einen bei Gegenwart von Brom, in Aether löslichen Körper.

Den Aether-Extraxt habe ich nach dem Concentrieren in Alkohol gegossen und das gefällte grüne Pulver mit Aether gut nachgewaschen. Nach 48-stündigen Stehen im Vacuum wurde der Körper analysirt.

0,0531 gr. gaben 0,0514 gr. $BaSO_4$ das ist 0.0070 gr. Schwefel, oder 13,29%; berechnet zu 13,4%.

0,0319 gr. gaben 0,0252 gr. $BrAg$, das ist 0,0107 gr. Brom, oder 33,54%; berechnet zu 33,75%.

Der so erhaltene Körper ist also ein Monobromthionaphtalin, doch kann ich bezüglich der Stelle des Substitution nichts Genaues berichten. Neben diesem Monobromthionaphtalin erhielt ich noch höhere Substitutions-Producte, die in Alkohol löslich sind, allein es gelang mir nicht, dieselben zu identificiren.

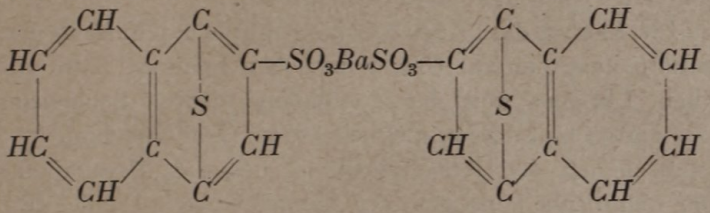
## Wirkung der concentrirten Schwefelsäure.

Warme concentrirte Schwefelsäure wirkt auf das Thionaphtalin zersetzend. Kalte Schwefelsäure gibt nach 24-stündigen Stehen eine in Wasser unlösliche Sulfosäure. Das mit Wasser stark verdünnte Gemisch wurde filtrirt, und so lange gewaschen, bis mit $BaCl_2$ kein Niederschlag entstand. Hiernach habe ich verdünte Kalilauge durch das Filter gegossen, oder das ganze Filter mit Kalilauge ausgekocht, von neuem filtrirt. Die Flüssigkeit habe ich mit Salzsäure oder Essigsäure bis zur schwachsauren Reaction versetzt, und hienach mit $BaCl_2$ oder Essigsaurem-Blei gefällt. In beiden Fällen erhielt ich eine geringe Menge Niederschlag. Denselben habe ich auf dem Filter gesammelt, mit viel Wasser möglichst gut ausgewaschen, aber in solcher Weise, dass das Filter niemals trocken blieb.

In diesem Falle legt sich nämlich der sowieso geringe Niederschlag so fest an das Filter an, dass er von demselben nicht mehr zu trennen ist. Wenn ich im Waschwasser keine Clorreaction mehr erhielt, brachte ich den noch nassen Niederschlag auf ein Uhrglas und in den Exsiccator.

## Analyse des Bariumsalzes.

0,0327 gr. des bis zur Gewichtconstanz getrockneten Salzes gab 0,0123 $BaSO_4$ das ist 0,00725 gr. Barium oder 22,157%; der Formel




entspricht 22,160%.

Das Bleisalz gab niemals so genaue Resultate. Wenn man den beim Filtrieren des verdünnten Schwefelsauren-Gemisches zurückbleibenden Teil nicht mit Kalilauge, sondern mit Alkohol auswäscht, erhält man eine grüne Lösung, aus welcher nach kurzem Erwärmen auf dem Wasserbade sich grüne Flocken ausscheiden. Diese Flocken sind in warmen Wasser leicht löslich und scheinen der Aethylester der Sulfosäure zu sein.

## Die Wirkung der Salpetersäure.

Kalte Salpetersäure wirkt auf das Thionaphtalin nicht ein. Beim Erhitzen färbt sich die Salpetersäure rot und es bildet sich eine schwarze unlösliche Masse von geringem Gewicht. Die concentrierte Salpetersäure-Lösung durch Asbest filtrirt, habe ich aus demselben mit Aether einen roten Körper extrahirt. Dieser Körper in Alkohol gelöst, und mit Wasser gefällt, giebt ein ziegelrotes amorphes Pulver, welches bei 48° gut schmilzt und sowohl Stickstoff wie auch Schwefel enthält.

Die zurückgebliebene schwarze klebrige Masse wurde bei 100° getrocknet und giebt dann ein sprödes Pulver. In Chloroform löste es sich unter Zurücklassung von Kohle, und aus dieser Lösung fällt Alkohol einen rotbraunen von 95°—105° schmelzenden Körper, welcher auch Stickstoff und Schwefel enthält. Aus dem Chloroform-Alkohol-Gemisch kann man durch Verdampfenlassen einen roten Körper gewinnen, der mit dem vorher beschriebenen aus der concentrierten Salpetersäure extrahirten identisch, allein nicht so rein ist. Auch Phtalsäure erhielt ich bei diesem Verfahren, doch nur wenig, und konnte ich endlich mit Brunners-Reaction* auch noch Nitrobenzol nachweisen.

Die Analyse der beiden Nitrothio-Körper gab nicht so genaue Resultate, dass man auf Grund derselben Schlüsse hätte ziehen können. Übrigens weist der so auffallend niedrige Schmelzpunkt beider darauf hin, dass es möglicherweise Gemische sind.

Bezüglich der Darstellungsweise des $a_1a_2$ Thyonaphtalins, seiner Aehnlichkeit mit gewissen Thiophendicetin-Condensationsproducten, sowie bezüglich der Darstellung seiner Derivate muss ich noch eine Reihe von Versuchen anstellen, um den Gegenstand voll zu beleuchten. Es ist auch meine Absicht diese Untersuchung fortzusetzen, bis dahin aber gedachte ich die erreichten Resultate vorläufig zu veröffentlichen.

---

* Fresenius. Z. f. analyt. Chemie 1881. 390.

4.

# ZUR THEORIE DER QUADRATISCHEN FORMEN.

Von Cand. Math. MICHAEL BAUER in Budapest.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 24. Juni 1895 vom o. M. und Classensecretär *Julius König*.

Aus: »Mathematikai és Természettudományi Értesitö» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIII, pp. 316—322, 1895.

Der Ausgangspunkt der Theorie der quadratischen Formen bildet die Einteilung der Formen in gewisse Classen, auf Grund deren man von æquivalenten Classen und von solchen Classen sprechen werden kann, die eine andere in sich enthalten.

Es fragt sich nun, ob diese Classificierung der Formen mit derjenigen Einteilung übereinstimmt, die von arithmetischem Gesichtspunkte aus auf Grund des Wertvorrathes getroffen werden kann. Zu bemerken ist, dass wir auch die uneigentlichen Darstellungen zum Wertvorrath rechnen.

LEGENDRE * bejaht diese Frage ohne einen Beweis dafür zu erbringen; die Untersuchungen SCHERING's ** dagegen stellten fest, dass sich dies nicht in allen Fällen so verhalte, dass es aber z. B. auf die proprie primitiven Formen beschränkt, der Wahrheit entspräche. — Diese Untersuchungen konnten in das System der elementaren Arithmetik, wohin sie naturgemäss gehören, bisher nicht eingefügt werden. Ein principielles Hinderniss boten die beiden DIRICHLET'schen Primzahlsätze, worauf sich die Beweisführungen SCHERING's stützten, ausserdem wird noch überflüssigerweise auch die Theorie der Composition in die Untersuchung mit einbezogen.

---

* Théorie des nombres 3e édition t. I. p. 237.

** Théorie relatifs aux formes etc. Liouville Journal 1859, pag. 253—270.

Meine Absicht ist es zumindest jenes speciellere Problem elementar zu behandeln, demgemäss die algebraische und die arithmetische Aequivalenz sich im Kreise der proprie primitiven Formen gegenseitig deckt.* Der gegenwärtige Aufsatz zerfällt in zwei Teile. In dem ersten erbringe ich den Beweis dafür, dass aus der arithmetischen Aequivalenz die Gleichheit der Determinanten folgt. In Bezug auf den Ideengang bin ich hier im Wesentlichen SCHERING gefolgt, nur ist meine Beweisführung in allen Teilen eine elementare. In dem zweiten Teile beweise ich vorläufig bezüglich der Formen mit negativer Determinante, dass diese, wenn arithmetisch æquivalent, gegenseitig in einander transformirbar sind.

## I.

Es seien gegeben zwei arithmetisch æquivalente, proprie primitive Formen

$$F=(A, B, C), \quad f=(a, b, c).$$

Die Determinanten seien $D, d$. Vor Allem ist es evident, dass das Vorzeichen dieser beiden dasselbe ist, bleibt doch das Vorzeichen des Wertvorrates der Formen mit negativer Determinante constant, hingegen können die Formen mit positiver Determinante sowohl positive, als negative Zahlen darstellen. Uebrigens folgt dies auch aus dem noch später anzuwendenden Satze, dass $Dd$ ein vollständiges Quadrat ist. Wäre dem nämlich nicht so, so müsste es eine zu $Dd$ teilerfremde und ungerade Zahl $m$ geben in Bezug auf welche

$$\left(\frac{Dd}{m}\right)=-1,$$

und somit mindestens in Bezug auf einen Primteiler $q$ von $m$

$$\left(\frac{Dd}{q}\right)=-1, \quad \left(\frac{D}{q}\right)=-\left(\frac{d}{q}\right)$$

---

* Die Fundamental-Classen etc. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. XIV.

wäre. Es sei z. B.

$$\left(\frac{D}{q}\right)=-1, \quad \left(\frac{d}{q}\right)=1 \tag{1}$$

Es ist aus dem zu ersehen, dass $F$ keine solche Zahl darstellen kann, welche blos mit der ersten Potenz von $q$ teilbar ist, wohingegen $f$ eine solche Zahl darstellt. Man kann nämlich annehmen, dass $a$ durch $q$ nicht teilbar sei,* somit folgt aus der Congruenz

$$ax^2+2bx+c\equiv 0 \pmod{q}$$

die Congruenz

$$a(ax^2+2bx+c)\equiv(ax+b)^2-d\equiv 0 \pmod{q} \tag{2}$$

und umgekehrt. Aber (2) kann infolge (1) befriedigt werden, wenn nun eine Wurzel $x\equiv\xi \pmod{q}$ ist, dann stellt die Form $f$ die Zahlen

$$a(\xi+hq)^2+2b(\xi+hq)+c=a\xi^2+2b\xi+c+2qh(a\xi+b)+ah^2q^2$$

dar. Ist der Congruenz

$$a\xi^2+2b\xi+c\equiv 0 \pmod{q^2}$$

nicht genügt, dann gibt $h=0$ eine solche Zahl, welche nur mit der ersten Potenz von $q$ teilbar ist. Ist sie erfüllt, so erhalten wir eine solche Zahl, indem wir den Wert von $h$ als relativ prim zu $q$ annehmen, da falls

$$a\xi+b\equiv 0 \pmod{q}$$

im Sinne (2) auch $d$ mit $q$ teilbar wäre, in Bezug auf welche es relativ prim ist. Wir müssen nun beweisen, dass die Determinanten gleich sind und dies geschieht, indem wir den Beweis dafür erbringen, dass sämmtliche Primfactoren von $D$ zugleich Primfactoren von $d$ sind und umgekehrt, sowie dass die Exponenten der Primfactoren gleich sind. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Der Exponent ist ungerade, also

$$D=\pm p^{2\lambda+1}D', \quad d=\pm p^{2\nu+1}d',$$

---

* Disqu. arithmeticæ, art. 228.

Wir müssen beweisen, dass $\lambda=\nu$ ist. Nehmen wir hingegen an, dass $\lambda>\nu$, so stellt $f$ die Zahl

$$ab^2-2bba+ca^2=-a(b^2-ac)=-ad$$

dar und ist $-ad$, wenn $a$ mit $p$ nicht teilbar ist, was angenommen werden kann, nur mit der Potenz $2\nu+1$ von $p$ teilbar. Die Form $F$ kann diese Zahl nicht darstellen. Wir dürfen wieder annehmen, dass $A$ mit $p$ nicht teilbar sei, wo dann $F$ auf die folgende Form transformirt werden kann:*

$$F=Ax^2+2B'p^{\nu+1}xy+C'p^{2\nu+2}y^2,$$

und so ist eine Zahl seines Wertgebietes durch die Potenz $2\nu+1$ von $p$ teilbar, so muss in Bezug auf diese $x^2$ durch $p^{2\nu+1}$, somit durch $p^{2\nu+2}$ teilbar sein, die dargestellte Zahl ist demzufolge zumindest mit der Potenz $2\nu+2$ von $p$ teilbar. Ebensowenig kann $\nu>\lambda$ sein, somit ist tatsächlich $\nu=\lambda$. Ich hebe besonders hervor, dass diese Schlussfolgerung auch für den Fall $p=2$ richtig ist.

2. Der Exponent des Primfactors ist gerade, d. h.

$$D=\pm r^{2\mu}D'', \quad d=\pm r^{2\varrho}d''.$$

Nehmen wir an

$$\mu>\rho, \quad \mu-\rho>0.$$

Von den ursprünglichen Formen können wir im Wege der Transformation auf die Formen

$$F=(A, r^{\mu}B', r^{2\mu}C'), \quad f=(a, r^{\varrho}b', r^{2\varrho}c')$$

übergehen. Betrachten wir jene Zahlen dieser beiden Wertvorräte, welche durch $r^{\varrho}$ teilbar sind. Teilen wir diese durch $r^{\varrho}$, so bilden sie evident die Wertvorräte der proprie primitiven Formen

$$F'=(A, r^{(\mu-\varrho)}B', \quad r^{2(\mu-\varrho)}C'), \quad f'=(a, b', c'), \tag{3}$$

demzufolge diese beiden Wertvorräte übereinstimmen müssen. — Die Zahl $r$ sei für Erste ungerade. Die Determinante der Form $F$ ist zumindest mit dem Quadrate von $r$ teilbar, somit sind die

---

* DIRICHLET-DEDEKIND: Vorlesungen über Zahlentheorie pag. 153. (4. Aufl.)

durch $r$ teilbaren Zahlen des Wertvorrates zumindest durch $r^2$ teilbar, weiterhin ist das Wertvorrat in Bezug auf $r$ constanten Characters.* Die Determinante $\pm d'' \equiv \bar{d}$ der Form $f'$ ist hinsichtlich $r$ relativ prim, ausserdem ist

$$\left(\frac{\bar{d}}{r}\right) = -1,$$

da sonst, wie bereits bewiesen, die Form $f'$ blos mit der ersten Potenz von $r$ teilbare Zahlen darstellte. Ist nun $r \equiv 1 \pmod 4$, so ist

$$\left(\frac{\bar{d}}{r}\right) = \left(\frac{-\bar{d}}{r}\right) = \left(\frac{-a^2\bar{d}}{r}\right) = -1,$$

daher

$$\left(\frac{a}{r}\right) = -\left(\frac{-a\bar{d}}{r}\right),$$

da jedoch im Wertvorrate $f'$ sowohl $a$, als $-ad$ enthalten ist, so ist der Wertvorrat von $f'$ auf $r$ nicht constanten Characters. — Ist dagegen $r \equiv 3 \pmod 4$, so gehen wir von $f'$ auf eine parallele Form über, deren zweiter Coëfficient durch $r$ teilbar ist.

$$f' = (a,\ b''r,\ c''),$$

somit

$$\left(\frac{\bar{d}}{r}\right) = -1, \quad \left(\frac{-\bar{d}}{r}\right) = \left(\frac{-b''^2r^2 + ac''}{r}\right) = \left(\frac{ac''}{r}\right) = 1$$

und folglich ist

$$af' \equiv a^2x^2 + ac''y^2 \equiv X^2 + Y^2 \pmod r,$$

wobei $X$, $Y \pmod r$ das vollständige Restsystem durchlaufen. Doch sind schon die Zahlen $X^2+1 \pmod r$ nicht ausnahmslos Reste $\pmod r$ da in diesem Falle — weil 1 Rest ist — sämmtliche Zahlen $\pmod r$ Reste wären. Daher ist der Wertvorrat $f'$ hinsichtlich $r$ nicht constanten Characters. Somit kann nicht $\mu > \rho$ und ebenso wenig $\rho > \mu$ sein, deshalb ist $\mu = \rho$.

Gehen wir schliesslich auf den Fall $r=2$ über. Nehmen wir

---

* DIRICHLET-DEDEKIND: Vorlesungen über Zahlentheorie pag. 313. (4. Aufl.)

an, dass die Exponenten ungleich seien, so erhalten wir nach der Transformation Formen, deren eine eine ungerade Determinante, die andere hingegen eine solche besitzt, welche zumindest mit 4 teilbar ist. Ist die ungerade Determinante $\equiv 1 \pmod 4$, so stellt diese Form Zahlen von der Form $4n+3$, sowie von der Form $4n+3$ dar, wohingegen in Bezug auf die andere $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ konstant ist. Ist dagegen die ungerade Determinante $\equiv 3 \pmod 4$, so stellt diese Form Zahlen dar, welche nur mit der ersten Potenz von 2 teilbar sind, wohingegen die andere Form keine solche Zahl darstellt. Die Exponenten müssen also gleich sein.

## II.

Nun beschränken wir uns auf Formen mit negativer Determinante.

$$F=(A, B, C), \quad D=-\Delta;$$
$$f=(a, b, c), \quad d=-\Delta.$$

Wir können annehmen, beide Formen seien positiv. Die Zahl $A$ sei — von Null natürlich abgesehen — die kleinste Zahl des Wertvorrates $F$. Dies darf immer angenommen werden, da die Form die kleinste Zahl eigentlich darstellt, sonst würde sie einen wirklichen Teiler derselben eigentlich darstellen. Ebenso sei $a$ die kleinste Zahl des Wertvorrates von $f$. Da jedoch die Wertvorräte übereinstimmen, ist

$$A=a=\bar{a}$$

und somit

$$F=(\bar{a}, B, C), \quad f=(\bar{a}, b, c);$$

höchstens auf eine parallele Form übergehend, können wir annehmen, dass $|2B| \leqq \bar{a}$ ist; es ist auch bekannt, dass als die kleinste Zahl des Wertvorrathes

$$\bar{a} \leqq \sqrt{\frac{4\Delta}{3}}$$

ist. Nehmen wir fürs Erste an $\bar{a}>1$. Es ist

$$\bar{a}F=(\bar{a}x+By)^2+\Delta y^2, \quad \bar{a}f=(\bar{a}\xi+b\eta^2)+\Delta\eta^2.$$

Diese beiden Zahlencomplexe müssen übereinstimmen. Setzen wir nun

$$x=1, \quad y=e_1=-\text{sgn. } B,$$

so ist

$$[\bar{a}F]_{\substack{x=1\\y=e_1}} = (\bar{a}+e_1B)^2+\Delta \leqq \bar{a}^2+\Delta<4\Delta. \tag{1}$$

Diese Zahl wird auch durch

$$\bar{a}f=(\bar{a}\xi+b\eta)^2+\Delta\eta^2$$

dargestellt, in Bezug auf diese Darstellung ist nothwendig $|\eta|<2$, demzufolge $\eta$ blos 0, $+1$ oder $-1$ sein kann. Ist $\eta=0$, dann ist $\bar{a}f$ mit $\bar{a}^2$ teilbar und somit

$$(\bar{a}+e_1B)^2+\Delta=\bar{a}^2+2e_1\bar{a}B+B^2+\bar{a}C-B^2=$$
$$=\bar{a}\,(\bar{a}+2e_1B+C)\equiv 0 \text{ (mod. } \bar{a}^2),$$

d. i.

$$2e_1B+C\equiv 0 \text{ (mod. } \bar{a}). \tag{2}$$

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Die Congruenz (2) sei nicht erfüllt. In diesem Falle kann $\eta$ nicht Null sein, es sei $\eta=e_2$, somit

$$(\bar{a}+e_1B)^2+\Delta=(\bar{a}\xi+e_2b)^2+\Delta,$$

d. h. ist $e_3$ wieder $\pm 1$

$$\bar{a}+e_1B=e_3\,(\bar{a}\xi+e_2b);$$
$$B-e_1e_2e_3b\equiv 0 \text{ (mod. } \bar{a}) \tag{3}$$

und ist

$$B=e_1e_2e_3b+\bar{a}\delta,$$

so wird die Form $f$ durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & e_1e_2e_3 \end{pmatrix}$$

in die Form $F$ übertragen. Die beiden Formen sind æquivalent, eigentlich oder uneigentlich.

2. Die Congruenz (2) sei erfüllt. Wenden wir nun die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}$$

auf $F$ an, so wird

$$\bar{a}=\bar{a},$$

$$\bar{B}=\bar{a}+e_1 B, \quad |\bar{B}|\leqq\bar{a},$$

$$\bar{C}=\bar{a}+2e_1 B+C, \quad \bar{C}\equiv 0 \pmod{\bar{a}}.$$

Ist nun

$$x=1, \quad y=\varepsilon_1=-\operatorname{sgn}.\bar{B},$$

so ist

$$(\bar{a}+\varepsilon_1\bar{B})^2+\Delta\leqq\bar{a}^2+\Delta<4\Delta.$$

In diesem Falle kann aber das entsprechende $\eta$ nicht Null sein, da sonst, weil

$$\bar{C}\equiv 0 \pmod{\bar{a}}$$

ist, jede der Zahlen $\bar{a}$, $2\bar{B}$, $\bar{C}$ durch $\bar{a}$ teilbar, d. h. die Form nicht proprie primitiv wäre. Indem wir nach dieser Bemerkung die obige Schlussfolgerung wiederholen, sehen wir, dass die beiden Formen æquivalent sind.

Ist endlich $\bar{a}=1$, so sind beide Formen zur Form

$$(1, 0, \Delta)$$

parallel, also auch æquivalent.

5.

# GEOLOGIE DER FRUSCAGORA.

Antrittsvortrag, gelesen in der Sitzung der Akademie vom 14. November 1894

von Dr. ANTON KOCH,

O. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KOLOZSVÁR (KLAUSENBURG), GEGENWÄRTIG AN DER UNIVERSITÄT ZU BUDAPEST.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Közlemények» (Mathematische und Naturwissenschaftliche Mitteilungen der ständigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Commission der Akademie), Band XXVI, Nr., 5, pp. 1—93, 1895.

Hierzu Tafel I und II, enthaltend eine geologische Karte und eine Profiltafel.

## Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung ... 46
Uebersicht der geologischen Gebilde des Gebirges ... 47
Verzeichniss der auf die Fruscagora bezüglichen geologischen Literatur 47
Orographie des Gebirges ... 49
Uebersicht des geologischen Baues ... 52

## Specielle Beschreibung der geologischen Verhältnisse des Fruscagora-Gebirges.

*I. Bildungen der archaeischen Gruppe:*

1. Phyllite und krystallinischer Kalk ... 55
Starke Fältelung des Kalkphyllites ... 58
Verkieselung des Kalkphyllites und des krystallinischen Kalkes und dessen Ursache ... 59
Kupfererz-Imprägnationen im krystallinischen Kalk ... 61
2. Glaucophanit ... 62
3. Diorit-Gesteine ... 65
*A)* Petrographie des massigen Diorit vom Peterwardeiner Festungsberg ... 66
*B)* Der dicktafelige Grünschiefer des Festungsberges ... 69
*C)* Gerölle von frischem Diorit am südlichen Abhang des Gebirges 70
*D)* Anstehender Diorit in der Umgebung von Vrdnik ... 71

*II. Bildungen der mesozoischen Gruppe:* Seite
1. Trias (?)-Schichten (Werfener Schiefer und Kalkstein) ... 75
2. Obercretaceische, zum Teil petrefactenführende Schichten ... 77
Magnesiakalk mit Chalcedonadern ... 80
3. Verbreitung der obercretaceischen Serpentinlager ... 82
Beschreibung neuerer Serpentinvorkommnisse ... 87
Serpentinähnliche Gesteine ... 92
Obercretaceische Einlagerungen von doleritischem Trachyt ... 95

*III. Tertiärgebilde:*
1. Kohlenführende Sotzkaschichten ... 98
Spuren ebensolcher am nördlichen Abhang ... 102
2. Leythakalk und Mergel ... 105
3. Sarmatischer Cerithienkalk und Mergel ... 109
4. Unter-pontischer Valenciennesienmergel ... 112
5. Ober-pontische Cardium-Schichten ... 114
6. Paludinenschichten mit und ohne Lignitflötzen ... 115
7. Quarztrachyt ... 121

*IV. Quaternäre (diluviale) Bildungen* ... 122
*V. Alluviale Bildungen* ... 126

Ueber die geologische Beschaffenheit dieses südungarischen Inselgebirges, und besonders über einige interessante Bildungen desselben, ist bereits eine kleine Reihe von Berichten und Mitteilungen erschienen, wozu ich selbst Manches beitrug. Trotzdem war unsere Kenntniss über dessen geologischen Bau im Ganzen noch sehr unvollständig und lückenhaft. Um die Lücken zu ergänzen und eine womöglich genauere geologische Uebersichtskarte zu entwerfen, habe ich, auf Anregung des Herrn Directors der ung. geol. Anstalt, Johann Boeckh, und mit Unterstützung des Herrn Andor v. Semsey im Sommer des Jahres 1893 einen ganzen Monat, und in 1894 acht Tage auf die systematische Begehung und Aufnahme des Gebirges verwendet. Auf Grund dieser neuesten Beobachtungen und meiner früher erworbenen Erfahrungen, die vollständige geologische Literatur des Gebirges gewissenhaft vor Augen haltend, so auch eine vom Bergdirector Josef Rochlitzer im Jahre 1876 entworfene geologische Uebersichtskarte des Gebirges zu Rate ziehend, habe ich nun in die entsprechenden Blätter der Specialkarte 1 : 75,000, jedoch diese auf den Maassstab 1 : 100,000 reducirt, die geologischen Verhältnisse eingetragen, und wurden

auf dieser beiliegenden Karte folgende geologische Bildungen mit besonderen Farben verzeichnet:

### A) *Sedimentäre Bildungen:*

1. Bildungen der Jetztzeit (Alluvium) = *a.*
2. Löss, untergeordnet Sand und Gerölle (Diluvium) = *d.*
3. Paludina-Schichten = $p_2$ } Levantische und Pontische
4. Valenciennesia- und Cardium-Mergel = $p_1$ } Stufen
5. Cerithienkalk, Mergel und Sandstein = *s.* (Sarmatische Stufe).
6. Leythakalk und Mergel (Ober-mediterrane Stufe) = *lm.*
7. Sotzkaschichten mit Braunkohlenflötzen (Aquitanische Stufe) = *s.*
8. Lager von Magnesiakalk mit Chalcedonadern = *kc.* } Obere Kreide, zum
9. Dunkelgrauer, glimmeriger Mergel, Kalkmergel, Kalk, Thonschiefer, Sandstein u. Conglomerat } = *kr.* } Teil Hypersenon Stufe.
10. Roter, graulicher und schwarzbunter Kalkstein = $t_2$ } Untere Trias
11. Roter Sandstein, sandig-glimmeriger Thonschiefer (Werfener Sch.) --- --- --- --- --- = $t_1$ } Untere Trias
12. Vorherrschend Thonglimmerschiefer (Phyllit), untergeordnet Thonschiefer, Glimmer- u. Chloritschiefer } = *pt.*
13. Amphibolit, zwischen Phyllit gelagert = *ap.*
14. Glaukophanit « « « = *gp.*
15. Vorherrschender Kalkschiefer u. krystallinischer Kalk, mit untergeordnetem Phyllit wechsellagernd } = *mp.*
16. Dieselben Schiefergesteine mit Kieselsäure und Eisenoxyd durchdrungen = *kp.*

### B) *Massige und eruptive Gesteine:*

17. Quarztrachyt = *ρ.*
18. Obercretaceischer Trachyt = *τ.*
19. Serpentin = *σ.*
20. Diorite, meist sehr verändert, stellenweise mit Tuffen, zwischen Phylliten gelagert = *δ.*

---

Das Verzeichniss der auf das Fruscagora-Gebirge bezüglichen geologischen Literatur möge der Beschreibung ebenfalls vorangehen.

(1) Beudant. Voyage minéralogique et géologique en Hongrie pendant l'année 1818.

(2) H. Wolf. Bericht über die geologische Aufnahme des Vrdnikgebirges. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. Wien, 1861—62, p. 158.

(3) Koch Antal. Beocsin környékének földtani leírása. A m. Földt. Társ. Munkálatai. III. köt. (1867) 62. l. (Mit geol. Kärtchen).

(4) Max v. Handtken. Chromeisen und Magnetit von der Fruscagora. Aus

der Sitzung der. ung. geol. Ges. vom 26. Juni 1867. Verhandl. der k. k. geolog. Reichsanst. 1867, p. 211.

(5) K. Paul. Die Umgebung von Semlin. Verhandl. der k. k. geolog. Reichsanst. 1870, p. 182.

(6) H. Wolf. Die Umgebung von Peterwardein und Karlowitz. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1870, p. 213.

(7) Koch Antal. Górcsői kőzetvizsgálatok: Sanidintrachyt Rakovácról, Szerém megyében. Értek. a math. és term.-tud. köréből, kiadja a M. T. Akad. 1871.

(8) A. Koch. Beitrag zur Kenntniss der geognostischen Beschaffenheit des Vrdnik-Gebirges in Ostslavonien. Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1871, p. 23.

(9) D. Stúr. Pflanzenreste von Vrdnik in Syrmien. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1872, p. 340.

(10) Dr. Oscar Lenz. Die Frusca-Gora (Reisebericht). Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1872, p. 250.

(11) Dr. Szabó József. Trachyt Pétervárad és Szerémből. Földtani Közlöny. 1873, p. 94.

(12) Koch Antal. Jelentés a Fruscagora hegységben 1871 nyarán tett földtani kutatásról. Földtani Közlöny. 1873, p. 104 und 144. (Mit einer geol. Karte und zwei Profilen).

(13) Al. Popovič. O geološkim odnošajema Fruškegore. I. O Fruškegorskim trachytima. Letopis Matince srbske. p. 173, 1873.

(14) Dr. Oscar Lenz. Beiträge zur Geologie der Frusca-Gora in Syrmien. Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1873, p. 295. Mikroskopische Untersuchung des Trachytes von C. Doelter, p. 303.

(15) St. Nedeljkovič. Syrmier Sanidintrachyt. Verhandl. der k. k. geolog. Reichsanst. 1874, p. 15.

(16) Dr. C. Doelter. Trachytvorkommen in Syrmien. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1874, p. 60.

(17) Dr. Oscar Lenz. Geologische Notizen aus der Frusca-Gora in Syrmien. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1874, p. 58.

(18) Al. Popovič. Neuer Fundort von Trachyt in Syrmien. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1874, p. 226.

(19) Koch Antal. A rakováci sanidintrachyt (?) és földpátjának vegyelemzése. Értekez., kiadja a M. T. Akad. V. k. 1874. XI. sz.

(20) Rudolf Hörnes. Die Valenciennesia-Mergeln von Beocsin. Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1874, p. 72. (Mit Taf. III).

(21) Koch Antal. Uj adatok a Fruscagora földtani ismeretéhez. Földtani Közlöny. 1876. 21. lap.

(22) Dr. Anton Koch. Neue Beiträge zur Geologie der Frusca-Gora in Ost-Slavonien. Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1876, p. 1.

(23) Dr. A. Koch. Olivingabbro aus der Frusca-Gora. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1876, p. 235.

(24) Popovics V. Sándor. Jelentés a Fruscagora hegységben tett geologiai gyűjtésről és kutatásról. I. Eruptiv kőzetek. Földt. Közl. 1876, p. 215. II. Üledékes kőzetek. Ebenda, p. 288.
(25) Rochlitzer József. Adatok a Fruscagora földtani megismertetéséhez. Közli Inkey Béla. Földt. Közlöny. 1877, p. 87.
(26) Dr. Koch Antal. Megjegyzések Rochlitzer J. földtani térképe (Fruscagora) felett és nehány adat ezen hegység földtani megismertetéséhez. Földtani Közlöny. 1877, p. 129.
(27) Vict. v. Zepharovich. Dolomit-Pisolith und die sogenannte «doppeltkörnige» Struktur. Zeitschr. für Krystall. u. Min. 1880. IV. B., p. 113. (Beschreibung des Miemit's von Rakovac).
(28) Dr. Staub Móricz. A Fruscagora aquitaniai flórája (mit 4 Tafeln). Mit geologischen Notizen von Joh. Boeck. M. T. Akad. Értekezések. XI. k. 1881. 2. sz. und Értesitő 1881, p. 20.
(29) Dr. M. Kišpatič. Die Trachyte der Frusca-Gora in Kroatien (Syrmien) Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1882, p. 397.
(30) Dr. M. Kišpatič. Die grünen Schiefer des Peterwardeiner Tunnels und deren Contact mit dem Trachyte. Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1882, p. 409. (Dasselbe in croatischer Sprache in den Schriften der südslav. Akademie. 1882. LXIV. B.).
(31) Dr. Koch Antal. Kišpatič értekezéseinek kritikai ismertetése. Földtani Értesitő. 1882, III. p. 109.
(32) Julius Pethő. Ueber das Ligament und die innere Organisation der Sphæruliten. (Mit einem Holzschnitt). Földtani Közlöny. 1882, p. 158.
(33) Dr. Anton Koch. Geologische Mitteilungen über das Frusca-Gora-Gebirge, I—III. Földtani Közlöny. 1882, p. 270. (Mit einer Tafel).
(34) Dr. M. Kišpatič. Die Glaukophangesteine der Frusca-Gora in Kroatien Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1887, p. 35.
(35) Dr. M. Kišpatič. Ueber Serpentine und serpentinähnliche Gesteine aus der Frusca-Gora (Syrmien). Jahrb. der kön. ung. geol. Anstalt. 1889 VIII. Bd. 7. Heft.
(36) Julius Pethő. Cucullæa Szabói, eine neue Muschelart aus den hypersenonen Schichten des Péterváradér Gebirges. Földtani Közlöny. 1892, p. 196. (Mit 7 Abbildungen).

## A) Uebersicht der orographischen und damit zusammenhängenden geologischen Verhältnisse der Fruscagora.

Dieses, gegen Südosten zu am weitesten vorgeschobene Inselgebirge der südlichen Teile der ungarischen Krone, erhebt sich zwischen der Donau und der Save, unmittelbar am Ufer der Donau, aus einem hügelig-welligem Lössgebiet, welches in die Alluvialebenen beider Flüsse übergeht. Wenn wir die Erstreckung dieses

Gebirges untersuchen, so kann man diese, aus dessen geologischen Verhältnissen geschlossen, von da und bis dorthin in Rechnung bringen, wo unter der allgemeinen Lössdecke noch ältere und festere geologische Bildungen, als Kerne des Gebirges, zum Vorschein kommen. Sein westlicher Anfang liegt daher zwischen Sarengrad und Sid, wo der Rücken des Gebirges sich factisch plötzlich um bl. 50 M., also ziemlich steil, erhebt. Diese auffallende, jedoch noch immer mit flachen Rücken versehene Erhebung, mit ihren hervorragenden Punkten, wie *Telek* (200 M.), *Lug* (209 M.), *Cerik* (207 M.) *Contra* (212 M.) u. s. w., trägt wirklich zuerst den Namen Frusca-Gora (d. i. Steiles Gebirge). Den geologischen Grund dieser auffallenden Erhebung finden wir in den Umgebungen von Szot und Lyuba in den häufigen Ausbissen von Kalkglimmerschiefer und krystallinischem Kalk, welche in gewisser Tiefe eine mehr zusammenhängende krystallinische Schiefer-Tafel oder Scholle, als Kern dieser auffallenden Erhebung, verraten.

Von Lyuba angefangen dringt der langsam sich erhöhende Hauptkamm *(Babinac* 234 M., *Dekansko brdo* 277 M., *Dugacsko polje* 291 M.) in einem grossen Bogen oberhalb Visič und Gypša gegen Norden zu, und sinkt da etwas hinab *(Vukovac* 278 M., *Perdipolje* 279 M., *Jándor* 253 M., *Kiselac* 237 M.). Am nördlichsten Punkt dieses Halbkreises kommt abermals eine kleine Scholle des aus krystallinischen Schiefern bestehenden Gebirgskernes zum Vorschein; während sonst alles mit Löss bedeckt erscheint. Der östliche Flügel dieses Halbkreises erhebt sich am Berge *Matoure* wieder zu einer Höhe von 285 M., und von da angefangen treten die, die Axe des Gebirges bildenden, krystallinischen Schiefer schon in zusammenhängender Masse an die Oberfläche. Damit im Zusammenhange hebt sich der Hauptkamm schnell (wichtigere Gipfelpunkte sind: *Csikeria* 317 M., *Gaj* 364 M., *Jerakovac* 388 M., *Ivina glavica* 444 M., *Letenka* (454 M.), und erreicht zwischen Beocsin und Bessenovo in dem *Cerveni csott* (539 M.) seinen höchsten Gipfel. Von da an sinkt der Hauptkamm allmälig tiefer. Die nach einander folgenden wichtigeren Höhen sind: *Kosarski csott* (auf der Specialkarte *Orlovac)* zwischen Beocsin und Jazak (524 M.), *Cerveni Krecsana* (511 M.), *Gradac* bei Rakovac (471 M.), *Lisai vrch* ebenda (490 M.), zwischen Ledince und Vrdnik der höchste

Punkt 497 M., *Kralovska stolica* bei Kamenitz (486 M.), der höchste Punkt der Strasse zwischen Kamenitz und Ireg 444 M. Weiter gegen Osten zu sind die Höhenpunkte 493, 477 und 478 M. und oberhalb Remeta velika erhebt sich der *Beleševac* nur 330 M. Ueber Remete hinaus ist der höchste Punkt der nach Karlowitz führenden Strasse 285 M., der *Dobrilovac* nur 271 M. Diese beiden letzten Punkte befinden sich zwar bereits auf reinem Lössgebiet, es erleidet aber keinen Zweifel, dass unter der mächtigen Lössdecke die aus ober-cretaceischen Bildungen bestehende Gebirgsaxe weiterstreicht, indem diese hinter Csortanovce, am steilen Donaustrand entlang, zum Vorschein kommen. Noch weiter ostwärts hinter Kercsedin bis über Alt-Slankamen bilden Leytha- und sarmatische Kalkschichten die letzten sicheren Spuren der festen Gebirgsaxe. Der Hauptkamm des Gebirges lässt sich also bis zum Donaustrande bei Slankamen verfolgen und sind hier einige hervorragendere Punkte: *Karas* (245 M.), Decke des Csortanovceer Tunnels (192 M.), bei Beška der Kalakács (194 M.), bei Kercsedin der Kosevac (268 M.) und die Planina (210 M.) oberhalb Alt-Slankamen.

Wenn wir nach alldem die Längserstreckung unseres Gebirges messen, so finden wir, dass selbe vom Telek-Gipfel (200 M.) im Westen an bis zum Donaustrande bei Alt-Slankamen gerade 80 Km. misst, und dass die grösste Erhebung des Hauptkammes am Cerveni csott beinahe in die Mitte fällt.

Von diesem hier skizzirten Hauptkamme fällt der nördliche kürzere Abhang bis zur Donau bedeutend steiler ab, als gegen die Save zu der längere südliche Abhang. Diese Gehänge werden durch beinahe parallel laufende, enge und tiefe Quertäler durchfurcht, ausgenommen die südliche Seite des östlichen Gebirgsendes, in dessen plateauartigen Rücken sich auch ein Längstal gebildet hat. Die Quertäler sind im grössten Teile des Gebirges, welches mit dichtem Laubwald besetzt ist, wasserreich, in den höheren Regionen strüppig, kaum passirbar, und wegen den Abrutschungen des dicken Waldbodens, an guten Aufschlüssen ziemlich arm. An den waldbedeckten Abhängen und Rücken der Berge sind gute und ausgedehnte Entblössungen noch seltener und ist es sonach leicht begreiflich, mit welchen Schwierigkeiten die Herstellung einer

genaueren geologischen Karte verbunden ist, und dass die bisherigen Versuche von einander wesentlich abweichen. Ich war jedoch bestrebt mit meiner neuesten Uebersichtskarte der Wirklichkeit möglichst nahe zu kommen, und habe deshalb die sämmtlichen bisher beobachteten Daten darin zum Ausdruck gebracht.

In grossen Zügen lässt sich der *geologische Bau des Fruscagora-Gebirges* folgenderweise skizziren (siehe die beigelegten geologische Karte und Durchschnitte).

Die Axe des Gebirges wird durch einen Faltensattel der jüngeren azoischen krystallinischen Schiefer gebildet, dessen höchster centraler Teil hauptsächlich aus Phylliten, die beiden Flügel dagegen besonders aus Kalkphyllit und krystallinischem Kalk bestehen. Der nördliche Flügel dieses Sattels wird durch eine bedeutende Reihe von jüngeren Bildungen zum grössten Teil bedeckt; blos hie und da taucht aus ihnen eine grössere oder kleinere Scholle des Gebirgskernes empor, und zwar nicht blos in Folge von Denudation, sondern gewiss auch vorhergegangener Gebirgsbrüche. Der südliche Flügel des Faltensattels wird von jüngeren Gebilden in bedeutend geringerem Maasse bedeckt, wenigstens in der westlichen Hälfte desselben, wo die auffallendste Fältelung der oben liegenden Kalkphyllite auch im Kleinen zu beobachten ist. In der östlichen Hälfte zeigt sich in Folge eines teilweisen Einbruches des südlichen Flügels, ein grosser, buchtartiger Einschnitt, mit einzelnen stehengebliebenen Phyllitinselchen, welche Bucht durch braunkohlenführende oberoligocene Schichten ausgefüllt ist; daraus man mit Recht schliessen darf, dass der erwähnte Einbruch vor dem Zeitalter des Oberoligocens geschehen musste.

Zwischen die krystallinischen Schiefer eingelagert finden sich untergeordnet Diorite, Amphibolite und Serpentine, ja in geringer Menge auch Glaukophanite.

Unter den sedimentär-jüngeren Gebilden, welche den Mantel des krystallinischen Schiefer-Kernes bilden, fehlt die paläozoische Gruppe, nach meinen eigenen Beobachtungen, vollständig. Die mesozoische Gruppe beginnt hier ebenso, wie in dem zunächst liegenden Pozseganer Insel-Gebirge, mit rötlichem Sandsteinschiefer und dunklem Kalkstein, welche wahrscheinlich das untere Trias repräsentiren, und wovon eine kleine Scholle am

nördlichen Abhang bei Beočin, eine grössere Masse aber am Südrande des Gebirges zwischen Jazak und Bessenovo vorkommen. Von Jurabildungen findet sich keine Spur, und auch untere Kreide fehlt gänzlich. Die höchste Stufe des Kreidesystemes ist aber durch eine mächtige Schichtreihe vertreten, in welcher Sandsteine, dunkelgraue Thon- und Mergelschiefer eine hervorragende Rolle spielen, und zwischen welche weitziehende Serpentin- und Trachyt-Lager eingezwängt vorkommen. Diese mächtige Zone der ober-cretaceischen Bildungen beginnt in der westlichen Hälfte des Gebirges, in der Gegend von Szvilós, zieht von hier am nördlichen Abhang gegen Osten weiter, allmählig an Breite zunehmend und höher hinaufreichend, erreicht zwischen Rakovac und Vrdnik den Gebirgskamm und tritt dann denselben bildend auch auf den südlichen Abhang hinüber, um zwischen Karlowitz und Kloster-Görgeteg, in einer bl. 5 Km. breiten Ausdehnung, unter das bedeutend tiefer liegende Lössterrain zu sinken. Aber auch unter der Lössdecke setzt sich diese Zone gegen Osten zu fort, denn am Steilgehänge des Kalakács-Rückens, gegen die Donau zu, treten die erwähnten ober-cretaceischen Schichten öfters zu Tage und bei Kercsedin findet man sie durch einen grossen Steinbruch entblösst.

Ueber den ober-cretaceischen Schichten ist die Continuität der Ablagerungen wieder unterbrochen, da das ganze Eocen und die untere Hälfte des Oligocens gänzlich fehlt. Das Ober-Oligocen ist mit kohlenführenden Sotzkaschichten vertreten, welche — wie ich bereits erwähnt habe — hauptsächlich den am südlichen Abhang des Gebirges befindlichen buchtförmigen Einbruch ausfüllen, jedoch auch auf der entgegengesetzten Seite des Gebirges als schmale Zone auftreten, die aber nur bis zum Tale von Rakovac reicht.

Unmittelbar über den Sotzkaschichten, oder in der westlichen Hälfte des Gebirges in Mangel derselben über ober-cretaceische Schichten, vieler Orten sogar unmittelbar über den krystallinischen Kalkschiefern, lagern in ziemlicher Mächtigkeit und grosser Ausbreitung der Leythakalk und Mergel der neogenen Reihe, deren breite Zone im Westen den krystallinischen Schiefer-Kern umgibt; nicht so im Osten, weil hier die Leythakalkzone des nördlichen Flügels an dem, gegen die Donau gekehrten, steilen Abhange des

Kalakács-Rückens bis Slankamen fortzieht, wogegen die Zone des südlichen Flügels bei Kloster-Remeta veliki unter der Lössdecke verschwindet. Es ist daher nicht zulässig in der östlichen Hälfte des Gebirges die nördliche und südliche Zone des Leythakalkes in der Gegend von Karlowitz zu verbinden, wie es bisher geschah.

Die breite Zone des Leythakalkes wird am nördlichen Abhang des Gebirges durch ein schmales Band von sarmatischem Kalk und Mergel eingesäumt, welches bis Semlin verfolgt werden kann. Am südlichen Abhange sind blos zweifelhafte Spuren davon bei Remete und Görgeteg nachgewiesen.

Ueber den sarmatischen Schichten folgt die mächtige Ablagerung des, der Pontischen Stufe zugehörigen, wohlbekannten Beočiner Cementmergels, welche am nördlichen Abhang unseres Gebirges in breiter Zone beinahe ununterbrochen fortstreicht, während am südlichen Abhang deren Zone — wie es scheint — grösstenteils unter der Lössdecke ruht.

In der östlichen Hälfte unseres Gebirges findet man in einzelnen Einbuchtungen der unterpontischen Mergelzone hie und da noch ober-pontische Cardium- oder levanteische Paludina-Schichten abgelagert, und über diesen ist der typische Löss des Diluviums die auffallendste geologische Bildung, welche in Form einer allgemeinen Decke alle älteren Gebilde überlagerte und zum grössten Teil noch jetzt, beinahe bis zu einer Höhe von 400 M., die älteren Bildungen einhüllt.

Die eruptiven Bildungen des Tertiärs sind durch echten *Quarztrachyt* vertreten, welcher am südlichen Abhang bei Jazak und Vrdnik, an mehreren Punkten in Form mächtiger Gänge teils aus krystallinischen Schiefern, teils aus den oberoligocenen Schichten hervorbricht.

Alluviale Bildungen, wie z. B. Gerölle und Grus, bedecken blos an den Mündungen der Täler deren Boden. Die aus dem Löss und dem Detritus der älteren Gebilde, in Gefolge der reichen Vegetation hervorgegangene mächtige Waldhumusdecke, welche die Anhöhen des Gebirges dicht überzieht, ist wohl auch eine jetzige Bildung; durfte aber in der geologischen Karte natürlich nicht zum Ausdruck gebracht werden.

## B) Eingehendere Beschreibung der geologischen Verhältnisse des Fruscagora-Gebirges.

### *I. Bildungen der archaeischen Gruppe.*

#### *1. Phyllite und krystallinischer Kalk.*

In meinem Bericht von 1872 (12) habe ich Thonglimmerschiefer (Phyllit) als herrschendes Gestein beschrieben, dabei aber auch das untergeordnete Auftreten von Thonschiefer und Glimmerschiefer hervorgehoben. Die Verbreitung des Kalkglimmerschiefers habe ich am südlichen Abhang bei Gergurevce beobachtet; endlich constatirte ich im Kamenitzer Tale das inselförmige Auftreten von grauem krystallinischem Kalke.

Nach Osc. Lenz (14) übergeht der vorherrschende Phyllit einesteils in Thonschiefer, anderesteils in dickplattigen Glimmerschiefer oder auch in gneissartige Gesteine. Von Vrdnik gegen Beočin zu schreitend beobachtete er am Gebirgskamm Kalkglimmerschiefer. Auch beobachtete er sehr dünnschieferigen, weissen, seideglänzenden Talkschiefer, so am Kamme zwischen Svilos und Lezsimir, dann in der Nähe von Vrdnik am Berge Kula. Diese Beobachtungen kann ich aber nicht bestätigen; denn die betreffenden Gesteine sind *Sericitschiefer* und wirklicher Talkschiefer kommt nirgends vor. Einen schönen, dunkel violetten Thonschiefer fand er in dem Steinbruch beim Kloster Jazak mit einem Schichtverflächen zu 70° S. (?) aufgeschlossen.

Alex. B. Popovics (24) hatte ganz richtig erkannt, dass der krystallinische Kalk und der Kalkglimmerschiefer am mächtigsten entwickelt, am Südabhang des Gebirges verbreitet sind. Gegen Westen zu tritt derselbe am entferntesten bei Szott zu Tage, und wurde der hier in Steinbrüchen gebrochene gelbe Kalk beim Baue mehrerer Klosterkirchen (z. B. Sisatovac und Kuveždin) verwendet. In der Nähe des Dorfes *Lyuba* wird der dunkelgraue, feinkörnige Kalkstein in mehreren Steinbrüchen gewonnen. Etwa 100 Schritte von diesen Steinbrüchen entfernt liegt die berühmte Quelle Namens «Banya», deren 18° R. warmes Wasser in einem kreisrunden Becken hervorsprudelt und in den Türkenzeiten als Bad benutzt wurde. Er beschreibt ferner den krystallinischen Kalk, welcher bei

Lezsimir die Berge Mala- und Velika Gradina zusammensetzt; dann in dem Bache bei dem Kloster von Sisatovac einen Talkschiefer, (?) welcher ein dünnes Lager bildet, nach meiner Erfahrung aber Sericitschiefer ist. Hinter dem Kloster *Bessenovo* tritt der Glimmerschiefer in dem Rasovo-Bache in einer Mächtigkeit über 100 M. hervor und folgt dann Quarzit mit Kalk- und Serpentin (?)-Einlagerungen.

J. Rochlitzer (25) wies auf dem südlichen Abhange von der Linie Lednicze-Vrdnik an bis Remeta velika reichend einen besonderen schmalen krystallinischen Schieferzug nach, in welchem die vorherrschenden Thonschiefer ein Verflächen von 5° NNO. zeigen. Die Kamenitz-Iregher Landstrasse kreuzt diesen Phyllitzug wirklich; nach meinen Erfahrungen jedoch verlängert sich dieser gegen Westen zu, um sich mit der Hauptmasse der krystallinischen Schiefer, welche den Kern des Gebirges bilden, schliesslich zu verbinden.

Rochlitzer erwähnt ferner in dem Profile des Jazaker Tales noch folgende krystallinische Schieferarten, unter dem Guttensteiner Kalke liegend: 1. Quarzit; 2. Schwarzer Thonschiefer in bl. 100 M. Breite, mit 60° S. Verflächen; 3. Talkführender Glimmerschiefer (richtiger Sericitschiefer) mit Quarzlamellen 160—170 M. weit; 4. Kalkglimmerschiefer; 5. Thonschiefer, Phyllit und Quarz-Glimmerschiefer mit bl. 40 M. mächtigen Quarzitgängen; 6. Serpentin mit Asbestadern. Schliesslich hebt er besonders die zwischen dem Kloster Bessenovo und dem Berg Kula verbreiteten mächtigen Quarzitmassen hervor, welche mit Kupfererzen häufig imprägnirt sind.

M. Kišpatič (35) erwähnt vom Kamme des Gebirges im Tale des Kameniti Potok nach Jazak zu herabsteigend Kalkphyllit, Chlorit- und Thonglimmerschiefer. Weiter hinunter folgt dann eine mächtige Einlagerung von dunkelgrünem Amphibolit, dem sich unmittelbar serpentinähnliches Gestein anlegt. Noch weiter hinunter tritt wieder der Amphibolit auf und an der Einmündung des Srnjevačky Potok schliesst derselbe wieder ein mächtiges Serpentinlager ein. Diese Amphibolite haben, nach ihm, eine ziemlich veränderliche Zusammensetzung. Der Amphibol ist darin uralitisch und wahrscheinlich aus Augit hervorgegangen, dafür auch der häufige Epidot spricht. In manchen Varietäten fehlt der Augit gänzlich, in anderen tritt er in abwechselnder Menge auf, aber

überall befindet er sich in Umwandlung begriffen. Feldspath kommt bald spährlich, bald häufiger darin vor, fehlt auch manchmal gänzlich. Apatit tritt accessorisch auf.

Ich selbst habe in den letzten Jahren die krystallinischen Schiefer des Gebirges betreffend folgende Beobachtungen gemacht. Bei *Sott* fand ich neben der nach Illok führender Strasse in einem kleinen Steinbruche im beinahe zu Thon verwitterten Phyllit, kleinere oder grössere Kalk-Nester und Knollen eingestreut. Der Kalk ist durch reichliches Eisenoxyd dunkelrot gefärbt und auch von Kieselsäure durchdrungen.

Gegen Lyuba zu befinden sich am Ufergehänge des Baches unter der 10 M. mächtigen Lössdecke grosse, höhlenartige Steinbrüche in dem krystallinischen Kalke. Der knollige, breccienartige, rostgelbe Kalkstein, dessen Spalten weisser und gelblicher Kalkspath ausfüllt, kommt auch hier im stark zersetzten Phyllit eingelagert vor.

Südlich von Lyuba im *Banyadol* (Thal) befinden sich die grössten Steinbrüche. Auch hier liegt der rostgelb verwitterte, stark zerklüftete Kalkstein unmittelbar unter einer 4—6 M. dicken Lössdecke, übergeht aber tiefer in sehr schönen, frisch dunkelgrauen, feinkörnigen Marmor. Die plumpen Schichtbänke sind stark gehoben und zerklüftet, so dass das Verflächen, welches ich zu 65° NO. bestimmte, nicht deutlich genug erscheint. Dieses Vorkommen von krystallinischen Kalk ist ganz dasselbe, wie ich es in Kamenitzer Tale, an der Strasse nach Iregh, im Jahre 1873 beobachtet und beschrieben habe (12,113). Zu bemerken ist noch, dass an der Basis der Lössdecke überall eine 1—2 M. dicke Schichte roten Thones (Terra rossa) unmittelbar dem krystallinischen Kalke aufliegt; ein deutlicher Beweis, dass am Ende der Tertiär- oder am Anfang der Quartärzeit, die Verwitterung der nackten Kalkfelsen und somit die Bildung der Terra rossa der Ablagerung des typischen Lösses voranging.

Zwischen Nestin und Vizics, am Sattel «Kapavicza», zwischen den Höhen Jándor und Orlovac, kommt im reinen Lössgebiete ganz unerwartet abermals eine kleine Scholle des krystallinischen Kalksteines zum Vorschein, welcher in einem kleinen Steinbruch gebrochen wird. Der Kalkstein ist breccienartig, indem auf feinkörnigem, dunkelrotem Grunde kleinere oder grössere weisse Kalk-

trümmerchen gleichmässig zerstreut erscheinen. Auch Kalkspathadern ziehen durch das Gestein.

Oberhalb *Divos*, am Abhang des Pistinac Berges, im Tälchen des Ritovi Potok bietet ein grosser Steinbruch einen der schönsten Aufschlüsse des Kalkglimmerschiefers. (Siehe die Figur 1). Der bl. 80—100 M. lange Aufschluss durchschneidet die Schichten quer auf ihr Streichen. Diese bestehen abwechselnd aus dünnschiefrigem oder tafeligem Kalkglimmerschiefer. An den beiden Rändern des Bruches herrscht der lamellöse, glimmerreiche Kalkschiefer (*pt*) vor; in der Mitte dagegen der tafelige Kalk (*km*), welcher eben als Strassenschotter abgebaut wird. Dieser Kalk ist schmutziggrau oder gelblich, beinahe dicht oder feinkörnig, seltener fleckenweise rosarötlich. Häufig sieht man darin aus gelbem Braunspath

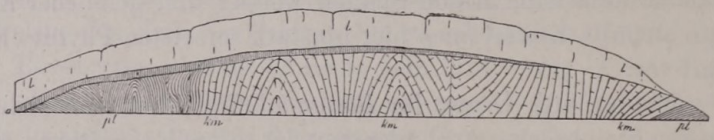


Fig 1.

und weissem Milchquarz bestehende Adern und Nester als Ausfüllungen von Spalten und Hohlräumen, welche sich während der Faltung der Schichten gebildet hatten. Der Verlauf und das Maass der Fältelung der Schichten auf diesem kleinen Raum ist erstaunlich und ein entschiedener Beweis für den riesigen Seitendruck, welcher diese Kalke bei der Hebung dieses Inselgebirges zusammengepresst hatte. Der Kalkschiefer wird auch hier durch bl. 1 M. roten Thon (Terra rossa, *a*) und darüber 8—10 M. normalen Löss (*l*) bedeckt.

Denselben Kalkphyllit habe ich von hier an gegen Osten zu über Kloster-Sisatowac bis Lezsimir verfolgt, wo er abermals durch grosse Steinbrüche gut erschlossen ist. Hier erblickt man deutlich, dass beinahe vertikal stehende, dicke Bänke von dunkelgrauem, krystallynischem Kalk in dem dünnschieferigen, stark gefalteten Kalkschiefer mehrere parallele Einlagerungen bilden. Der krystallinische Kalk ist mit breiten Adern gelblich-weissen, grobkörnigen Kalkspates dicht durchsetzt, ohne jedoch Krystalldrusen zu bilden.

Von hier zieht der Kalkglimmerschiefer, mit dünneren oder

dickeren krystallinischen Kalk-Einlagerungen, über Gergurevce und Bessenovo, weiter gegen Osten zu und erreicht seine grösste Entwickelung zwischen Jazak und Vrdnik. Von Gergurevce angefangen bemerkt man aber an einzelnen Stellen oder zonenweise eine eigentümliche Umwandlung dieser Gesteine. Neben reichlicher Ausscheidung von Eisenoxyd wird das Gestein von Kieselsäure durchdrungen, in Folge dessen sich in Nestern oder Zonen leberbrauner oder ockergelber, jaspisartiger Quarzit herausbildete, welcher stellenweise noch von weissen Quarz- und bläulichen Chalcedon-Adern durchsetzt ist. Solche Quarzite habe ich östlich von Gergurevce, auf der auffallenden Kuppe, Namens «Sulyomska Glavica», dann in der Umgebung des Klosters Bessenovo, an zahlreichen Punkten des Cerni Potok Tales bei Jazak, besonders häufig im Vrdniker Dubocsac Tale, dann oberhalb Vrdnik nahe zum Gebirgskamm und beim Kloster Hopovo — beobachtet und gesammelt. In der Umgebung von Vrdnik trifft man diesen jaspartigen Quarzit besonders häufig an. Die Hauptmasse des Kula Berges, dessen Gipfel die Ruine eines Wachturmes ziert, besteht aus ockergelbem Quarzit, durchwoben mit weissen Quarz- und Chalcedon-Adern. In Drusenräumen fand ich seltener bis zu 5 Cm. lange und 3 Cm. dicke Milchquarz-Krystalle ausgeschieden. Im Quarzite finden sich nesterweise schön roter oder bräunlichgelber Jaspis — ausgeschieden, und fand ich auch Stücke mit glänzenden und striemigen Gleitflächen. Oberhalb Jazak, am Berge *Kosmatica* liegen die Bruchstücke dieses Jaspis in der Nähe eines mächtigen Serpentinlagers herum.

Diese Verkieselung des Kalkphyllites und krystallinischen Kalkes ist, meiner Ansicht nach, mit dem Umwandlungsprocesse der Diorite und der Serpentinisation der Olivingesteine in engem Zusammenhange. Tatsache ist, dass bei dem Kloster Hopovo und am Berge Kosmatica oberhalb Jazak solche Verkieselungen unmittelbar in Verbindung mit mächtigen Serpentinlagern auftreten, und ist es, nach den bisherigen Beobachtungen, wahrscheinlich, dass am südlichen Abhang, zwischen Vrdnik und Gergurevce, noch mehrere Serpentinlager zwischen die krystallinische Schiefer eingezwängt vorkommen. Aber auch in der Umgebung von Vrdnik gelang es mir in den letzten Jahren an drei Stellen, bei Jazak an

einer Stelle, zwischen den verquarzten Kalkschiefern teilweise noch ziemlich frische, teilweise schon stark zersetzte und umgewandelte Diorite in Lagern aufzufinden. Auch habe ich schon im Jahre 1873 nachgewiesen (12), dass auch die am nördlichen Abhang dahinziehenden mächtigen Serpentinlager durch quarz- und chalcedonhältige Magnesiakalke begleitet werden, welche die mit dem Serpentinisationsprocesse verbundenen Umwandlungsprodukte des ober-cretaceischen Kalksteines darstellen. Demzufolge erscheint es mir klar, dass die am südlichen Abhang des Gebirges beobachtete jaspisartige Verkieselung des Kalkphyllites mit den daselbst vorkommenden Diorit- und Serpentin-Lagern in enger genetischer Beziehung steht, und während des Umwandlungsprocesses der ursprünglichen Gesteine jene grosse Menge von Kieselsäure und Eisenoxyd ausgeschieden wurde, welche den Kalkphyllit und den dunkelgrauen krystallinischen Kalkstein in beschriebener Weise umgewandelt haben.

Die mit der Serpentinisation verbundene reichliche Ausscheidung von Eisenoxyd hinterliess noch deutlichere Spuren in der Nähe der Serpentinlager, meistens in enger Verbindung mit denselben, nämlich dünne Lager verschiedener Eisenerze. So habe ich bereits in meinem Bericht von 1873 hervorgehoben, dass derbes Rot- und Brauneisenerz in Form von Geröllen in jedem Bachbett des nördlichen Abhanges häufig vorkommen. Im Jahre 1893 fand ich im Jazaker Cerni Potok Tale einen kopfgrossen Klumpen derben Hämatites. Aus dem Mali Potok Thal bei Ledincze bekam ich auch ein faustgrosses Gerölle von derben Magnetit, welches starken polaren Magnetismus zeigte. Josef Poritz, ehemaliger Verwalter der Ledinczeer Silbergrube, entdeckte am Gradac Berge bei Rakovac, zwischen Serpentin, ein 10 M. mächtiges, unter h. 9 streichendes Lager von unreinem erdigem Eisenerz, welches auf die Magnetnadel einwirkt. Die mit dem Serpentin in Contact stehenden Schiefer und Mergel sind allgemein mit Eisenoxydhydrat imprägnirt, so dass selbe häufig als schwachhältige Eisenerze gelten können.

Aus meinen, in den letzten Jahren gemachten Beobachtungen will ich noch Folgendes hervorheben.

Indem ich von Vrdnik aus im Tale des Dubocsac Potok aufwärts stieg, beobachtete ich hinter dem Kula-Berg im Liegenden

des Quarzites zuerst quarzreichen Phyllit, dann einen schwarzgrauen, blätterigen, sehr schönen Thonschiefer, welcher grosse Milchquarz-Nester und bis Brodlaib grosse Sphärosiderite einschliesst. Dazwischen gelagert findet sich auch ein feinkörniger, schwarzer Quarzsandstein. Noch höher, bei der Gabelung des Dubocsac Baches, kommt wieder brauner Phyllit, unter 45—50° nach N verflächend, zum Vorschein, und dieses Gestein hält in der linken Abzweigung des Baches bis zum Abhang des Kosmatica-Berges an, wo aus dem dichten Waldboden in Begleitung von gelbem Jaspis, ein mächtiges Serpentinlager hervortritt.

Von diesem Serpentinberg in das Cerni Potok Tal von Jazak hinabsteigend, beobachtete ich wieder gelben Jaspis, dann quarzreiche Phyllite bis zum Talboden, wo sich abermals gelber Quarzit zeigte. Noch weiter unten streichen die Schichten eines schönen lichtgrünlichen Phyllites, mit einem Einfallen unter 70° SSW. durch das Tal.

Bei der alten Klosterruine beginnt das Vorherrschen des verkieselten krystallinischen Kalkes, welcher an zahlreichen Stellen, bis hinunter zum Kloster Jazak, in grossen Steinbrüchen gebrochen wird. Seine Schichtbänke fallen unter grossem Winkel (70°) gegen S. ein, gewöhnlich aber ist das Verflächen infolge der starken Zerklüftung nicht deutlich genug. Hie und da verrät eingeschalteter Kalkphyllit das Wesen der ganzen Bildung. Was diese verkieselten krystallinischen Kalke noch besonders auffällig macht, ist das häufige Vorkommen von eingesprengten Kupfererzen. Ursprünglich war dieses Erz Chalkopyrit, welches aber nahe zur Oberfläche grösstenteils in *Malachit* und *Azurit* umgewandelt wurde. An solchen Stellen ist der Kalk mit grellgrünen und blauen Flecken bedeckt. Spärlicher findet man neben diesen, entlang der Spalten, auch dickere Incrustationen dieser Erze, ja sogar hübsche strahligstänglige Partien kommen vor. Ausser diesen Kupfererzen fand ich sehr selten auch grobkörnigen Galenit eingesprengt. Häufig sind aber die Spalten des Kalkes mit ockergelben Braunspath-Kryställchen überzogen, welche durch lebhaften metallischen Perlmutterglanz und Irisieren auffallen.

Das Gestein des inselartig aus den Sotzkaschichten sich erhebenden Morintovo Berges bei Vrdnik, welches J. Rochlitzer auf

seiner geologischen Karte als Serpentin bezeichnet hatte, ist, nach meiner Beobachtung, nichts anderes, als verkieselter krystallinischer Kalk, abwechselnd mit grünem Schiefer, welchen Rochlitzer für Serpentin hielt, der aber, nach meiner Untersuchung, Dioritschiefer ist, ähnlich jenen, welche auch am Peterwardeiner Festungsberge vorkommen.

Schliesslich will ich noch jene kleine Partie krystallinischen Kalkes hervorheben, welche man in neuester Zeit zwischen Karlowitz und Bukovac, in der sogenannten Slavina Bara durch einen Steinbruch erschlossen hat. Hier beobachtete ich, auf die Seite gedrängt, die Schichten hell bräunlichen Phyllites und dazwischen gelagert ein mächtiges Kalklager. Der Kalkstein ist rötlich und graubunt, mit weissen Kalkspathadern durchwoben, stark zerklüftet, breccienartig. Die stark gehobenen Schichten streichen in NW Richtung. Diese Kalkscholle, so wie auch der krystallinische Kalk des Veliki breg bei Kamenitz, sind deutliche Zeugen, dass die den Kern des Gebirges bildenden krystallinischen Schiefer unter der Decke der jüngeren Bildungen und des Lösses, in der Richtung gegen den Peterwardeiner Festungsberg weiter ziehen, und da auch hier, in der Nähe des Kamenitzer Tores, licht rötlicher, dünnblätteriger Phyllit, bl. mit O—W Streichen vorkommt, und damit in Verbindung Dioritschiefer und Dioritlager auftreten: ist es ganz klar, dass auch der Festungsberg eine abgerissene und hängengebliebene Scholle vom nördlichen Flügel der krystallinischen Schiefer-Falte unseres Gebirges darstellt.

Die grosse petrographische und tektonische Mannigfaltigkeit der krystallinischen Schiefer-Axe der Fruscagora steigert sich noch dadurch, dass zwischen die Phyllite gelagert an einzelnen Stellen auch seltenere Schiefer und alte massige Gesteine vorkommen, über die ich in den folgenden Abschnitten sprechen will.

### *2. Glaukophanit.*

Die Glaukophangesteine der Fruscagora hatte M. Kišpatič entdeckt und beschrieben (34). Indem ich hier einfach auf diese Beschreibung hinweise, will ich blos einen neuen Fund dieses in-

teressanten Gesteines besprechen, welchen ich im Jahre 1894 gemacht habe.

Mein Fundort befindet sich am Gebirgskamm zwischen den Bergspitzen des Cerveni csott und des Orlovac (bei Kišpatič Kozarov csott), näher zum Letzteren, nahe zur Quelle des nach Beocsin hinunterfliessenden Kozarski Potok (Baches) gelegen. Der Fundort des anstehenden Gesteines, welchen Kišpatič angibt, kann nicht weit weg davon liegen; da dieser aber nach seiner Beschreibung neben dem Fussteige liegt, welcher vom Kamm nach Jazak hinunter führt, so kann derselbe mit meinem Fundorte nicht identisch sein, umsoweniger, da auch die Gesteine beider Fundorte erheblich abweichen.

An meinem genannten Fundorte habe ich eigentlich blos einen, auf dem Waldboden liegenden, bl. pferdekopfgrossen Block getroffen; ich halte es jedoch für wahrscheinlich, dass man hier das Gestein auch anstehend treffen müsse. In diesem Teile des Gebirgskammes zeigen sich blos Spuren von quarzreichen Phylliten, so dass ich nicht zweifle, es müsse der Glaukophanit darin eingelagert vorkommen.

Das Gestein ist dunkel bläulichgrau, feinkörnig, ins fasrige sich neigend, seidenglänzend, die verwitterte Oberfläche mit dünner rostbrauner Kruste überzogen, oder auf dunkelbraunem Grund mit Rostflecken versehen. Die sehr kleinen Glaukophan-Krystallnadeln fallen, auch mit der Lupe besehen, nicht besonders in die Augen. Das Gestein ist sehr zähe und hart, es konnten kaum Handstücke davon formirt werden, und zerbrach lieber in unregelmässig eckige, als in plattige Stücke, in welcher Hinsicht es vom entschieden tafelig brechendem Gestein des Kišpatič'schen Fundortes äusserlich schon abweicht. Auch das Gewicht des Gesteins ist auffallend, ich fand dessen sp. G. 3·15.

Mit scharfer Lupe besehen, bemerkt man vorherrschend dunkel bläulichgrauen, verworren faserigen, seideglänzenden Glaukophan und untergeordnet hell gelblichgrünen Epidot (Pistazit), und zwischen diesen eingezwängt graulichweisse, fettglänzende Quarzkörnchen.

Unter dem Mikroskop treten die auffallend blauen, lebhaften Dichroismus zeigenden, wellig gebogenen und verworrenen Stän-

gel und Fasern des Glaukophan in nicht scharf begrenzten Krystallschnitten besonders hervor. Die dazwischen gebliebenen kleineren und grösseren Räume werden durch Krystallkörner des Epidots und Quarz ausgefüllt. Die noch frischen Kerne der stark zerspaltenen Epidotkörner sind grünlich oder gelblich, durchscheinend und polarisiren in lebhaften Interferenzfarben. Die Hülle der Körner und die Spaltengegenden sind in grasgrüne Chlorit-Aggregate umgewandelt.

Die noch kleineren Quarzkörner sind graulich, wegen vielen Einschlüssen durchscheinend, und zeigen zwischen gekreuzten Nicols Aggregatpolarisation. Die Art der dichten Einschlüsse konnte nicht bestimmt werden. Unter den Quarzkörnern fanden sich einige ähnlich aussehende, jedoch längliche Krystallschnitte, welche polysynthetische Zusammensetzung zeigten, daher auf das Vorhandensein von etwas Plagioklas hindeuten. Ein durchscheinender, ins rötlichgelbe ziehender, regelmässiger Krystallschnitt, der zwischen gekreuzten Nicols dunkel blieb, dürfte lichter Al. Ca-Granat sein, den auch Kišpatič in den Glaukophaniten des Kozarov csott erwähnt. Endlich bemerkt man bei oberer Beleuchtung sehr selten eingesprengt kleine Pyritkörner, zum grössten Teil schon in Limonit verwandelt. Rutil, welchen Kišpatič als Einschluss im Glaukophan gefunden, bemerkte ich nicht.

Auf zwei Exemplaren der mitgebrachten Handstücke werden die braunen Rissflächen durch weiss- oder grünlichgelbe, durchsichtige, höchstens 1/2 mm. kleine Kryställchen mit perlmutterglänzenden Spaltungsflächen, bekleidet. An verwitterten Stellen finden sich auch solche durch Eisenrost braunrot gefärbte.

Mit der Loupe betrachtet, sieht man würfelähnliche Gestalten oder perlmutterglänzende, rhombische Spaltflächen. Eine Partie der Krystalle schabte ich mit dem Messer ab, um sie weiter zu untersuchen. Mit den grösseren Schmelzversuche anstellend, fand ich, dass sie in der Bunsen'schen Flamme leicht zu einem weissen schaumigen Email schmolzen, wobei die Flamme durch Na schwach und dann durch Ca stärker gefärbt wurde. Ein Kryställchen wurde im Glasrohr erhitzt, schmolz auch hier und setzte zugleich Wasser ab. Ein Kryställchen habe ich zwischen zwei reinen, ritzfreien Glaslamellen zerdrückt; es geschah dies unter knir-

schendem Geräusch und es zeigten sich Ritzspuren am Glase. Die Härte des Minerales erreicht daher den 6. Grad.

Einige Krystallbruchstücke, dann auch das grobe Pulver davon, liess ich länger kochender Salzsäure ausgesetzt; ich fand aber, auch unter dem Mikroskop besehen, keine wesentliche Veränderung an ihnen.

Schliesslich habe ich die feinsten Teile des abgekratzten Materiales in Canadabalsam auf ein Deckglas gebracht und unter dem Mikroskop untersucht. Ausser den Gemengteilen des Gesteins (blaue Glaukophan- und grüne Epidot-Prismen, wasserklare Plagioklas-Blättchen und graue Quarzkörnchen) waren auch von unserem gelben, durchsichtigen Mineral viele Kryställchen zu sehen. Diese hatten entweder die Gestalt eines Rhombus oder eines rechtwinkeligen Viereckes. Die spitzeren Winkel des Rhombus fanden sich manchmal abgestumpft; die gegenüber liegenden Seiten der Vierecke aber zeigen öfters Abstumpfungen der Kanten. Zwischen gekreuzten Nikols ist die Exstinction stets parallel, was auf das rhombische System hinweist; bei schiefer Stellung aber deuten sehr lebhafte Interferenzfarben auf starke Lichtbrechung. Den spitzen Winkel der Rhombenflächen mehrmals gemessen, fand ich im Mittel 69°. Auf manchen dieser Flächen zeigten sich feine Diagonalstreifen, an einigen Viereckflächen aber mit einer Seite parallele Streifen.

Alle diese Eigenschaften verweisen auf *Prehnit*, wenn der gemessene Winkel nicht jener des Prisma (80° 4′), sondern der Pyramide ist, welcher 67°38′ beträgt. Dieser Zeolith kommt factisch in Spalten der ältesten Massengesteine (Granit, Diorit u. s. w.) vor.

### *3. Diorit-Gesteine.*

Ueber die dioritischen Gesteine der Fruscagora schrieb zuerst M. Kišpatič (30), wo er zeigte, dass das bisher für Serpentin gehaltene Gestein des Festungsberges von Peterwardein Grünsteinschiefer sei, und zwar teilweise Dioritschiefer (die nord-westliche Seite des Berges), teilweise Diabasschiefer (die süd-westliche Seite). Indem ich die Mittheilung Kišpatič' besprach (33), kam ich nach einer Untersuchung der Grünsteine des Peterwardeiner Festungs-

berges, welche ich seinerzeit gesammelt habe, zu dem Schlusse, dass diese nach ihrer mineralischen Zusammensetzung und mikroskopischen Struktur für wirklichen dichten Diabas und Diorit gelten müssen, welche in Folge starker Umänderungen (Uralitisierung, Chlorit-, Epidot- und Kalkspath-Bildung) die feinkörnige Textur äusserlich beinahe verloren, zu einem serpentinähnlichen, dichten, gleichartig erscheinendem Gesteine wurden. Die tafelige, öfter vollkommen schiefrige Struktur betrachte ich nicht als genügenden Beweis dafür, dass man das Gestein für einen wirklichen Schiefer, also ein Sediment, erklären könnte ; denn bekanntermeise ist die äussere Erscheinungsform der Diorite und Diabase überhaupt, da die meisten in Form von Lagergängen oder Lager zwischen älteren Schiefern eingezwängt vorkommen, öfters tafelförmig, als massig; anderenteils sind die neben dem Kamenitzer Tor anstehenden Grünsteinfelsen genug massig und unregelmässig zerklüftet, um das Gestein dem Ansehen nach mit eben solchem Rechte für ein massiges Gestein halten zu können. Die ziemlich constanten Streichungs- und Einfalls-Richtungen der Grünsteintafeln (nach Kišpatič am Eingang des Tunnels gegen die Donau NO—SW mit 60° Verflächen) sprechen auch für Lagergänge oder Lager, umsomehr, da beim Kamenitzer Tor, bl. unter denselben Streichen und Verflächen, Phyllit sich zeigt, zwischen welchem die Lagergänge des Grünsteins eingezwängt vorkommen. Die grössere Masse des Phyllites ist jedoch hier teils denudirt, teils in der Tiefe verblieben.

Für die Richtigkeit meiner Auffassung spricht auch die erneuerte mikroskopische Untersuchung der Peterwardeiner Grünsteine, deren Ergebnisse ich hier mitteilen will.

A) *Die unregelmässig polyëdrisch abgesonderten, mehr massigen Grünsteine.*

1. Das Gestein ist bläulichgrün, uneben und splitterig brechend, gleichartig erscheinend, und braust, mit Salzsäure befeuchtet, an einzelnen Punkten, wo auch Spaltblättchen von Kalkspath sichtbar sind. Das benetzte Gestein zeigt auf hellergrünem Grunde dunklere grüne prizmatische Schnitte, welche auch durch ihren seidigen Glanz von der matten Grundmasse abstechen.

Unter dem Mikroskope sieht man die mehr oder minder ver-

änderten Reste dreier Hauptgemengteile, und zwar in gut begrenzten Kryställchen, wodurch das Gestein panidiomorph-holokrystalline Textur besitzt. *a) Plagioklas* in graulich durchscheinenden, stark getrübten, langen leistenförmigen Krystallschnitten, welche die Spuren nicht vieler, dicker Zwillingslamellen hie und da noch aufweisen, obzwar sie zum grössten Teile nur mehr Aggregatpolarisation besitzen; *b)* blassgrüne, beinahe durchsichtige grosse Krystallschnitte, oder auch unregelmässig begrenzte Felder, mit dem Plagioklas in gleicher Menge ausgeschieden. Man sieht in ihnen hie und da sehr kleine, gelbliche Epidotkörner, dann weisse wolkenartige Leukoxen-Tupfen und Punkte, endlich sehr selten auch schwarze metallglänzende Titaneisenkörner mit stark rostigem Leukoxen-Hofe umgeben. Salzsäure hatte unter lebhaften Brausen an zahlreichen Punkten kleinere oder grössere Löcher ausgefressen, woraus man auch auf Kalkspath als Zersetzungsproduct schliessen muss. Die reinsten Stellen dieses blaugrünen Minerales zeigen mit unterem Nikol kaum etwas Dichroismus und Lichtabsorption. Zwischen gekreuzten Nikols zeigt sich die Aggregatpolarisation der verworren feinfaserigen Textur, wie solche dem dichten Chlorit auch eigen ist. Unser blassgrünes Mineral ist also jetzt das Gemenge von vorherrschendem Chlorit, untergeordnetem Pistazit und Calcit, welche jedoch nur Umwandlungsproducte eines ursprünglichen Minerales sind. Was dieses Mineral war, das lässt sich zwar in dem gegenwärtigen Stadium der Umwandlung nicht mehr sicher erkennen; da man aber in anderen Grünsteinen sowohl von hier, als auch hauptsächlich am südlichen Abhange des Gebirges, den Amphibol als wesentlichen Gemengsteil noch gut erkennen kann, zweifle ich nicht daran, dass auch in diesem Gestein *Amphibol* das ursprüngliche Mineral gewesen war; *c)* hell rindenbräunliche, stark zerklüftete, durchsichtige kleinere Krystallschnitte, welche blos an den Rändern und entlang der Spalten zu einer undurchsichtigen Substanz umändert sind. Sie finden sich einzeln oder gruppenweise in grosser Anzahl zwischen die Plagioklas-Leistchen eingezwängt, während sie in den blassgrünen Feldern gänzlich fehlen. Dichroismus zeigen sie keinen, zwischen gekreuzten Nicols jedoch lebhafte Interferenzfarben. Die regelmässigeren, länglich viereckigen Schnitte zeigen eine Exstinction unter

45—50°. Auf Grund dieses Verhaltens muss man dieses Mineral für einen monoklinen Pyroxen halten, welcher unter allen Gemengteilen am wenigsten verändert wurde.

Wenn man jetzt diese mineralische Zusammensetzung und die eigentümliche idiomorph-holokrystalline Textur vor Augen haltend, nach der Art des ursprünglichen Gesteines frägt: kann man sie nur für *pyroxenhältigen Diorit* erklären, welcher in Folge der Chloritisirung und Epidotisirung des Amphibols, Kaolinisirung des Plagioklas — stark verändert ist und oberflächlich betrachtet, an Serpentin erinnert, wofür es früher auch gehalten wurde.

2. In Textur und Farbe der Grundmasse dem vorigen ähnliches Gestein; nur sind zeisiggrüne Pistazitflecke sehr häufig darin, aber auch die schmalen glänzenden Flächen der Plagioklas-Kryställchen glitzern hervor. Ausserdem bemerkt man noch glänzende Kalkspat-Spaltflächen und eingesprengte Pyritkörner. Mit Salzsäure braust das Gestein an unzähligen Punkten, besonders aber um den Pistazitadern und Flecken herum, und den Spalten entlang.

Unter dem Mikroskop erscheint das Gestein als ein bedeutend kleineres Krystallaggregat, und sind deren Gemengteile nur teilweise idiomorph, deshalb auch mehr zusammenfliessend, wie im vorigen Gestein. Der grauliche, wolkige Feldspath besteht zum grössten Teil aus leistenförmigen, zwillinglamellösen Plagioklas, zum kleineren Teil sieht man auch unregelmässig begrenzte, Aggregatpolarisation besitzende Felder davon. In derselben Menge kommt damit ein hell grasgrünes, beinahe durchsichtiges, schwach faseriges Mineral gemengt vor, dessen unregelmässige lange Prismenschnitte mit ausgefranzten Enden, sowie auch abgelöste Faser zwischen den Plagioklasschnitten eingezwängt durcheinander liegen. Unter gekreuzten Nicols sieht man ziemlich lebhafte, jedoch der faserigen Textur entsprechend, differente Interferenzfarben. Dichroismus ist kaum zu bemerken. Auch in Sonstigen ist es dem veränderten Amphibole des Gesteines Nr. 1 ähnlich. Auch hier findet man kleinere oder grössere, gelbliche, eckige Pistacit-Körnchen, nebst Kalkspath eingeschlossen. Endlich sieht man zwischen all' diesen veränderten und secundären Bestandteilen weisse Leukoxen-Flecke dicht zerstreut, unter welchen manche noch schwarze Titaneisenkörnchen enthalten.

Demzufolge muss dieses Gestein für *veränderten feinkörnigen Diorit* erklärt werden.

B) *Tafelig-grobschiefriger Grünstein.* Auch von diesem habe ich Exemplare von zwei Fundpunkten untersucht, darunter das eine in unmittelbarer Nähe des oben erwähnten Phyllites am Festungsberge vorkommt.

1. Mikroskopisch sind diese Gesteine hell graulichgrün, matt, dicht. Mit Loupe betrachtet erscheinen sie feinkörnig, splitterig, an einzelnen Punkten flimmernd und lassen auch spärlich schwarze Tüpfchen eingestreut erblicken.

Unter dem Mikroskop erscheint das Gestein als ein dichtes verworrenes Gemenge von verschiedenfarbigen Krystallbruchstücken und Splittern. Dazwischen sieht man hell grasgrüne Flecke, die Reste veränderten Amphibols. Durch den Schliff zieht eine Ader hindurch, aus gelblichen Pistazit und graulichen Calcitkörnern, mit Eisenrost vermengt, bestehend. Im ganzen wirren Gemenge sind schliesslich noch kaolinartige Flecke und Tupfen dicht eingestreut, oder auch in welligen Schichten geordnet. Es ist das das Bild eines Trümmergesteines, und ich glaube wirklich ein tuffartiges Produkt der beschriebenen Diorite vor mir zu haben, das mit dem Massengestein wechsellagert oder an dessen Basis lagert.

2. Ein diesem Dioritttuffe ganz ähnliches Gestein beobachtete ich auch bei *Vrdnik,* im *Morintovo* Bache aufgeschlossen, wo selbes in dem verkieselten krystallinischen Kalke eingelagert ist. Auf der geologischen Karte Rochlitzer's ist dieses Vorkommen noch als Serpentin bezeichnet. Das graulichgrüne, matte, grobschiefrige, dichte Gestein ist stark mit Kalkspathadern durchwoben und ausserdem erscheinen hie und da schwärzlichgrüne Chloritflecke darin.

Unter dem Mikroskope scheint die Basis aus winzigen Feldspathsplittern zu bestehen, erfüllt mit trüben Kaolintupfen und Streifen. Dazwischen zeigen sich spärlicher grasgrüne, gleichartige Chloritflecke in Gesellschaft von reichlichen Kalkspath-Ausscheidungen. Endlich einzelne schwarze quadratische Schnitte, dicht in Eisenrost gehüllt, weisen auf Eisenkies hin.

3. Einen ganz ähnlichen Grünsteinschiefer entdeckte ich auch im Tale des Beli Potok bei *Jazak,* wo er zwischen Phyllit ein-

gelagert ist. Wahrscheinlich ist auch jenes Vorkommen hieher zu rechnen, welches auf Rochlitzer's Karte oberhalb Kloster-Bessenovo, am nördlichen Rande des Triaskalkes als Serpentin eingezeichnet ist.

C) *Gerölle und anstehende Lager von frischem Diorit* am südlichen Abhang des Gebirges. Dass die eben beschriebenen, stark veränderten Grünsteine ursprünglich wirklich Diorit waren, dafür sprechen ganz entschieden die mehr oder minder frischen, gut erkennbaren Diorit-Gerölle, welche man am südlichen Gehänge, und in den daselbst hinabreichenden Bachbetten, zwischen den Klöstern von Vrdnik und Hopovo, zerstreut häufig vorfindet, und welche auch als schmale Lager zwischen den Phylliten eingezwängt anstehend vorkommen. Solche Dioritgerölle fand ich zuerst im Jahre 1871 oberhalb Vrdnik; später sammelte solche Alex. Popovics im Dobravoda Tale und anderorts, und im Jahre 1893 habe ich im Bachbett neben dem Kloster Hopovo bis faustgrosse Gerölle davon gesammelt.

In meinen früheren Berichten und Mitteilungen (22 und 23) glaubte ich in diesen Geröllen Gabbro erkannt zu haben; heute aber, nach erneuerter Untersuchung mit vollkommeneren Mitteln muss ich gestehen, dass ich mich in der Bestimmung geirrt habe, denn diese Gerölle sind ohne Ausnahme Diorite, und kommt wirklicher Gabbro, nach den bisherigen Erfahrungen, in der Fruscagora nicht vor. Ich gebe hier die Beschreibung der betreffenden Gesteine:

1. *Die in der Umgebung der Kohlengrube von Vrdnik gesammelten Gerölle.* Ich fand unter diesen zweierlei Diorite vertreten.

*1a.* Das Gestein der Gerölle, welche ich am Gehänge oberhalb der Kohlengrube sammelte, ist ein kleinkörniges Gemenge von milchweissen, manchmal durch Eisenrost gelblich gefärbten Feldspath-Kryställchen und dunkel graulichgrünen, faserigen Amphibolprismen. Unter der Loupe sieht man mit den Feldspathkryställchen eng verwachsen auch graulichweisse, fettglänzende Quarzkörner eingestreut.

Unter dem Mikroskop erscheinen die ziemlich breittafeligen Feldspath-Krystallschnitte durch Umwandlungsprodukte (Kaolin,

Epidot) beinahe undurchsichtig getrübt. Zwischen gekreuzten Nikols sieht man jedoch an frischeren Schnitten noch deutliche Spuren der Zwillingslamellen. Zwischen ihnen eingezwängt bemerkt man wasserklare, stark zersprungene Quarzkörner in ziemlicher Menge. Beinahe in derselben Menge, wie Plagioklas, erscheint gelblicher und grasgrüner typischer Amphibol, in faserig-prismatischen, undeutlich begrenzten Krystallen und deren Splittern. Endlich mit diesen verbunden, treten rundliche oder gezakt umrandete Titaneisen-Partien, mit Leukoxen- und Eisenrost-Höfen umgeben, hervor.

Das Gestein ist also ein kleinkörniger Quarzdiorit.

*1b.* Das Gestein der im Dobra voda Tale gesammelten Gerölle erscheint als ein mittelkörniges, gleichmässiges Gemenge von weissen oder gelblichen Plagioklas-Kryställchen und braunen oder schwärzlichgrünen Amphibolsäulchen. An einigen Stücken bemerkt man neben Amphibol noch harzgelbe Körner. Spärlich eingesprengt kommen auch Pyritkörner darin vor.

Unter dem Mikroskop sieht man neben den gut ausgebildeten Plagioklas- und den unvollständigen Amphibol-Kryställchen, beinahe durchsichtige, weingelbliche, stark zerklüftete, gut umgrenzte Krystallschnitte eines dritten Minerales, in eben solcher Menge. Mangel an Dichroismus, lebhafte Interferenzfarben, grosse Exstinctionswinkel, manchmal auch zonale Ausbildung, kennzeichnen das Mineral als Pyroxen. Von Quarz bemerkt man keine Spur; Titaneisenkörner und Partien mit Leukoxen-Höfen umgeben, sind dagegen häufig.

Das Gestein dieser Gerölle ist daher ein ziemlich frischer, *pyroxenhältiger Diorit,* dieselbe Gesteinsart also, welche in stark verändertem Zustande auch einen Teil des Grünsteines vom Peterwardeiner Festungsberge bildet.

2. Ein ähnlicher, nur etwas grobkörniger, pyroxenhältiger Diorit kommt auch bei Kloster Hopovo, unter den Geröllen des Jurkovac Baches häufig vor.

3. Im Sommer 1894 gelang es mir in der Umgebung von Vrdnik solche Diorite anstehend an zwei Stellen zu beobachten. *a)* Das eine Vorkommen wurde durch Rud. Pauk, damaligen Grubenverwalter entdeckt und durch einen kleinen Bruch gut entblösst.

Die Stelle befindet sich im Dubocsac Tale unweit vom Kloster Ravanica, am Fusse des Kulaberges (Podkula). Der Bach hatte hier die kleine Felspartie des Diorites unterwaschen, und zeigt sich diese als bl. 20 M. mächtige Einlagerung in den Phylliten. Die nördliche Hälfte dieses Lagers bietet das Bild eines ziemlich regelmässig vieleckig zerklüfteten festen Massengesteines, und darauf wurde auch der Steinbruch angelegt; die südliche Hälfte dagegen ist stark verwittert und zu Steingrus zerfallen. Das unmittelbare Hangende und Liegende ist ein eigentümlicher grüner Schiefer, welcher oberflächlich besehen, dem Serpentin ähnlich ist.

Der Diorit erscheint als ein mittelkörniges, gleichartiges Gemenge von milchweissen, saussuritähnlichen Plagioklas- und schwärzlichgrünen Amphibol-Krystallen. Der Plagioklas ist dicht, mit wenigen Spuren von Spaltflächen; der Amphibol aber zeigt glänzende faserige Spaltflächen. Das Gestein ist auch von grünlichweissen, dichten Felsitadern durchzogen, und diesen entlang beobachtet man glatte, glänzende Rutschflächen. Endlich sieht man auch Pyritkörner eingesprengt.

Unter dem Mikroskop sind die gut umgrenzten idiomorphen Feldspath-Krystallschnitte infolge der wolkigen Trübungen kaum durchscheinend und zeigen zwischen gekreuzten Nicols nur Aggregatpolarisation, mit höchst seltenen Spuren von Zwillingslamellen. Der grasgrüne, stark faserige Amphibol ist dichroitisch, jedoch an den Rändern stark chloritisirt, wobei die Mitte der Krystalle öfters beinahe wasserklar wird und im polarisirten Lichte sich wie Quarz verhält. Die Chloritisirung scheint also mit Quarzausscheidung verbunden zu sein. Ausser einigen schwarzen Erzkörnern bemerkt man kein weiteres Gemengteil und ist das Gestein somit ein etwas veränderter, *normaler Diorit.*

Wie schon erwähnt wurde, wird dieser Diorit durch grüne Schiefer begleitet. Der hangende Schiefer ist grünlichbraun, an dünnen Stellen grünlichgelb, und da auch starker Fettglanz dazu kommt, wird er oft harzähnlich. Die Schieferungsflächen sind ferner sehr glatt, selten eben, gewöhnlich wellig gebogen, öfters zu schaligen Nestern zusammengedrückt. Untergeordnet durchschwärmen dies Gestein weisse Calcitadern. Die Härte ist geringer, als jene des Serpentins, da man es mit dem Nagel ritzen kann. Unter

dem Mikroskop sieht man auf grünlichweissem, durchsichtigem, verworrem faserigem und schuppigen Grunde sehr viel unregelmässige Partien und Tupfen schwarzen Erzes (Magnetit), so auch Eisenrostflecke — zerstreut. Zwischen gekreuzten Nicols zeigt die durchsichtige Basis lebhafte Aggregatpolarisation; von dem netzförmigen Bilde des Serpentins zeigt sich keine Spur. Die vorherrschende grüne Basis ist daher Chlorit, und das ursprüngliche Gestein dieses Schiefer dürfte Diorittuff gewesen sein.

Der grüne Schiefer des Liegenden ist in dünnen Lamellen weisslich grün, an Talk erinnernd, in dickeren Schichten olivingrün, glasähnlich, jedoch sehr weich, mit dem Nagel ritzbar. Unter dem Mikroskop zeigt es ein ähnliches Bild, wie der vorige Schiefer, nur sieht man hier innerhalb der faserigen und schuppigen Chloritfelder noch einige ziemlich frische Amphibolsplitter, welche die Abstammung des Schiefers vom Diorit noch wahrscheinlicher machen.

Diese grünen Schiefer kann man daher als chloritisirte *Dioritschiefer* betrachten, was auch der Zwischenlagerung des massigen Diorites entspricht. Sie reichen im Tal ab- und aufwärts nicht weit, indem sogleich die Felsmassen des verkieselten Kalkphyllites wieder erscheinen.

*b)* Einen zweiten Fundort von anstehendem Diorit entdeckte ich am Berge Dobra voda, oberhalb des Kohlenbergwerkes. Hier am Waldwege, welcher auf den Vienackamm hinaufführt, tritt ein kleinkörniger Diorit bl. in 100 M. Distanz wiederholt zu Tage und ist ebenfalls zwischen krystallinischen Kalk eingelagert, da am oberen Rande der Dioritausbisse grosse Blöcke davon herumliegen.

Das Gestein erscheint als ein holokrystallin idiomorphes, feinkörniges Gemenge von milchweissem oder graulichem Plagioklas und dunkelgrünem Amphibol. Unter dem Mikroskop zeigt es das Bild des typischen Diorites. Man sieht darin *a)* leistenförmige Plagioklas-Krystalle, welche an den dünnsten Stellen durchscheinend werden und Spuren der polysynthetischen Zwillingsbildung zeigen; *b)* etwas weniger grasgrüne, stark chloritisirte Amphibol-Prismen mit zerspaltenen Enden, mit vorigen durcheinander verwachsen; *c)* kaum durchscheinende, kleinere oder grössere, kurze

prismenförmige, netzförmig zersprungene gelbliche Körner, zwischen gekreuzten Nicols mit lebhaften Interferenzfarben und mit Exstinction bei schiefer Lage — *Pyroxen*, wenigstens in solcher Menge, als die beiden vorigen; *d)* einige längliche Titaneisen-Partikel und *e)* blass rötliche, durchsichtige, rechteckige Schnitte von Apatit.

Es erhellt aus dieser Beschreibung, dass ich das anstehende Lager jenes pyroxenhältigen Diorites entdeckt habe, von welchem in der Umgebung der Vrdniker Kohlengrube die früher beschriebenen Gerölle herstammten, und dass ähnliche Lager am Gebirgskamme noch an mehreren Stellen vorkommen müssen, was auch auf der geologischen Karte zum Ausdruck gebracht werden musste.

*c)* Die Richtigkeit dieser Annahme bestätigt noch eine Tatsache, nämlich ein diorittuffartiges Gestein, welches ich anstehend auf der Landstrasse zwischen Kamenitz und Iregh, gleich unterhalb des Wirtshauses am Gebirgssattel aufgefunden und im Jahre 1873 beschrieben habe (12). Weil ich aber damals dessen Wesen betreffend nicht im Klaren war, will ich dieses Gestein aufs neue beschreiben.

Das feinkörnige, etwas schiefrige, durch Eisenrost fleckige Gestein besteht aus weissen Körnchen mit schimmerndem Flächen und aus dunkelgrünen Chlorit-Schüppchen und ist der Textur nach einem Sandsteine ähnlich. Unter dem Mikroskope löst sich der weisse Gemengteil in ein unregelmässiges Gemenge von Feldspath, Muscovit- und Quarztrümmern auf. Die Art des Feldspathes ist, wegen vorgeschrittener Verwitterung, nicht bestimmbar. In diesem Gemenge sieht man etwas weniger stark chloritisirte gras- und gelblichgrüne Amphibol-Fasern und Splitter, mit vielen Magnetit-Körnern, eingestreut, wozu noch verschwommene Rostflecke kommen. Das mikroskopische Bild ist daher das eines Trümmergesteines, und ich bin geneigt es ebenfalls für den Tuff eines Quarzdiorites anzusprechen.

## *II. Bildungen der mesozoischen Gruppe.*

### *1. Trias(?)-Schichten.*

J. Rochlitzer war der erste, der auf seiner geologischen Uebersichtskarte am südlichen Rande des Gebirges, zwischen den Klöstern von Jazak und Bessenovo eine aus Werfener Schiefer und Triaskalk bestehende Partie ausschied und beschrieb (25). Anfangs hegte ich einigen Zweifel gegen diese Ausscheidung (26), muss aber nach meinen neuesten Erfahrungen an Ort und Stelle Rochlitzer's Beobachtungen nunmehr bestätigen und ergänze sie damit, dass auch am nördlichen Abhang des Gebirges, gegenüber dem Vorkommen von Jazak und Bessenovo, oberhalb Beočin, am Berge «Czervena Krecsana» eine kleine Scholle von ähnlichem Triaskalk zurückblieb.

Was das Vorkommen auf der südlichen Seite des Gebirges betrifft, so habe ich selbst Folgendes beobachtet:

*a)* Am oberen Ende des Dorfes Jazak, am östlichen Abhange des Tales befindet sich ein kleiner Steinbruch (auf der Specialkarte unrichtig als «Granitbruch» bezeichnet) in einem auffallend schönen bunten Marmor. Es ist das ein beinahe schwarzer, dichter, zerklüfteter Kalk, welcher durch weissen und gelblichen Kalkspath netzförmig durchzogen ist und demselben ein breccienartiges Aussehen verleiht. Geschliffen und polirt würde es einen sehr schönen Marmor abgeben. Die Schichtbänke sind durcheinander geworfen, so dass man das Verflächen nicht bestimmen kann. Er wird unter der Lössdecke noch durch roten Thon (Terra rossa) bedeckt, welcher auch die Spalten ausfüllt. Von Versteinerungen liess sich zwar keine Spur erblicken, dem Aussehen nach unterscheidet er sich aber auffallend von dem körnigen krystallinischen Kalken dieses Gebirges und noch mehr von den Kalkphylliten. Er erinnert an die dunkeln Guttensteiner Kalke. Gegenüber am steilen, durch Wasserrisse durchfurchten Gehänge des Teocsin Berges, auf welchem der berühmteste Wein Syrmiens wuchs, tritt aus der weithin sichtbaren Terra rossa ebenfalls dieser Kalk stellenweise zu Tage, und am Fusse dieses Berges lagert, nach Rochlitzer's

Beobachtung, rötlicher, glimmerreicher Sandstein, den er mit den Werfener Schiefern identificirte.

*b)* Im Tale des Beli Potok, welches bei Kloster Jazak in das Haupttal mündet, habe ich neben dem kleinen Steinbruch rötlichen, sandig-glimmerigen Werfener Schiefer beobachtet, wogegen im Steinbruche selbst stark zerklüfteter krystallinischer Kalk gebrochen wird. Weiter aufwärts fand ich discordant dem Phyllit aufgelagert Schichtbänke eines weissgeaderten dunkelbraunen Triaskalkes, ähnlich dem beim Dorfe beobachteten.

Bei den Quellen Namens «Vilena voda» kann man beobachten, dass selbe an der Grenze von Triaskalk und rotem Sandstein hervorbrechen, und dass der Sandstein selbst auf Phyllit ruht, welcher im Bachbette ansteht. Weiter hinauf herrscht ausschliesslich der Phyllit, erfüllt mit weissen Quarzadern und Nestern.

*c)* Oberhalb dem Kloster *Mali Remete* wird an der Lehne des Gebirges in einem kleinen Steinbruch Kalk zum Brennen gebrochen. Die mächtigen Bänke desselben verflächen unter 30° gegen Süden. Der grössere Teil dieses Kalkes ist hell gelblichweiss, dicht, einzelne Bänke davon aber sind hellbraun; auch diese sind zerklüftet und mit weissen Kalkspathadern durchsetzt. An der verwitterten Oberfläche bemerkt man blos Spuren von Organismen in Form von verschiedenen Wülsten. Im Liegenden dieses Kalkes treten am Klosterhügel rötlicher, glimmerreicher Sandsteinschiefer und Zwischenlager von gröberen Sandsteintafeln, mit O—W Streichen hervor.

*d)* Inmitten des Dorfes Bessenovo wird im Hofe eines Hauses ein mehr oder minder tafelig-schiefriger Kalk gebrochen. Auf frischen Bruchflächen ist dieser Kalk dunkelgrau, mit weissen Kalkspath-Adern durchwoben, wie der beim Dorfe Jazak. Am unteren Ende des Dorfes treten abermals die zerklüfteten Bänke eines rötlichen, glimmerreichen Sandsteines zu Tage.

Ueber Bessenovo gegen Westen und über Jazak gegen Osten zu findet man keine Spuren dergleichen Gesteine mehr.

*e)* Am nördlichen Gehänge des Gebirges, hoch über dem Dorfe Beočin, am Berge Cervena Krecsana, hat man im Jahre 1871 Kalk zum Brennen gebrochen. Diesen hielt ich damals, indem er auf Phyllit lagert, für krystallinischen Kalk; jetzt sehe ich aber, dass

er, seinem Aeusseren nach, mit den beschriebenen Triaskalken des südlichen Abhanges identisch ist. Die Farbe ist hell rötlich; er ist ebenfalls dicht, stark zerklüftet und mit gelben Calcitadern durchzogen, daher breccienartig. Seine Schichtbänke liegen in dem oberflächlichen Steinbruche durcheinander. Spuren von Versteinerungen bemerkte ich nicht.

Da ich mit freiem Auge sichtbare Petrefacten in diesen Kalken nirgends bemerkte, untersuchte ich deren Dünnschliffe unter dem Mikroskop. Aber auch so fand ich blos in dem letzten spirale, gekammerte Spuren von Foraminiferen. Die übrigen zeigten blos das Bild eines zerklüfteten, feinkörnigen Kalksteines.

Obzwar bisher noch keine zweifellose Petrefacten für das triadische Alter dieser Kalke sprechen, so erscheint es mir dennoch auf Grund der Gesteinbeschaffenheit, der Lagerung und Analogie mit dem nächstliegenden Pozseganer Gebirge, höchst wahrscheinlich, dass wir es mit den Alpinen untertriadischen Schichten, dem sogenannten Werfener Schiefer und Guttensteiner Kalke zu tun haben.

### *2. Ober-cretaceische, zum Teil versteinerungführende Schichten.*

Diese habe ich zum grössten Teil in meinen älteren Beiträgen (8, 22, 33) beschrieben, und zwar die folgenden Gesteine: Sandsteine, Conglomerat, Serpentinbreccie, schieferige Thone und Mergel, Kalkstein und Magnesiakalk mit Chalcedonadern abwechselnd mit Serpentinlagern. Alle diese habe ich auf Grund der häufig vorkommenden und annähernd bestimmten Petrefacten den Gosauschichten der Alpen gleichgestellt (22); während Dr. Julius Pethő später, nach genauerer Untersuchung des ganzen Versteinerungsmateriales, zu dem Schlusse gelangte (32 und 36), dass unsere petrefactenführende Schichten bedeutend jünger sind, als die Gosauschichten, so dass er geneigt wäre, sie als eine besondere hypersenone Stufe zwischen Kreide und Eocen zu stellen. Die Beweisführung des hypersenonen Alters unserer Schichten von dem Erscheinen der paläontologischen Studie Dr. J. Pethő's erwartend, will ich mich vor der Hand nur darauf beschränken, meine in den

letzten Jahren am östlichen und westlichen Ende des Gebirges gemachten Beobachtungen mitzuteilen.

Gegen Westen zu vorschreitend, fand ich die letzten Spuren dieser ober-cretaceischen Schichten auf der Strasse von Svilós nach Lezsimir, am nördlichen Gehänge des Jerakovac Berges. Aus Waldboden treten hier auf einmal dichte und harte, gelblichweisse dendritische Mergel heraus, dessen Schichtbänke quer über den Weg streichen. Im östlichen Streichen dieser Schichten begegnet man in den folgenden Tälern, direct den Phylliten aufruhend, überall ähnlichen Kalkmergelschichten, welche, meiner Ansicht nach, die Reihe der ober-cretaceischen Ablagerungen beginnen. So sah ich hoch oben im Grabovaer Tal, am Abhang des Dresnovac Berges, beinahe auf den Kopf gestellte Schichtbänke eines ähnlich dichten, jedoch bereits roten Kalkmergels, in der Richtung des Gebirges streichend. Auch hier konnte ich noch keine sichere Spur von Versteinerungen finden. Weiter gegen Osten tritt im Tale von Bánostor, an der Stelle Namens «Grkova voda» ein dunkelroter dichter Kalkstein mit demselben Streichen zu Tage. Diesen habe ich in meinem ersten Bericht (8) als «roten Marmor» beschrieben und der Auffassung der Wiener Geologen gemäss zur Grauwacke gestellt. Der Kalk ist ebenfalls petrefactenleer, seine 15—20 Cm. dicken Tafeln fallen unter 63° gegen S. ein. Im Hangenden zeigen sich dunkelgrauer Thonschiefer und weiter zu Magnesiakalk mit Chalcedonadern, solche Gesteine, deren ober-cretaceisches Alter zweifellos ist. Endlich beginnt auch im Csereviczer Tale, nahe zum Gebirgskamm ein dem Phyllit aufliegender schmutzig bräunlichgelber oder grauer Kalkstein mit Kalkspathadern die Reihe der cretaceischen Sedimente. In diesem bemerkte ich ausser Phyllitbröckchen und Quarzgeröllen auch Bruchstücke von Muschelschalen, aber leider nicht in solchem Zustande, dass ich entschieden behaupten könnte, wie ich das in meinem früheren Berichte tat (9), sie kämen von Rudisten her. Im Jahre 1893 besuchte ich abermals diesen Fundort ohne besser erhaltene Muschelreste zu erlangen. Trotzdem erscheint es mir wahrscheinlich, dass die wechselvolle Reihe der ober-cretaceischen Sedimente mit dieser Kalkbank beginnt.

Um Wiederholungen zu vermeiden, verweise ich einfach auf

meine früheren Beschreibungen der ober-cretaceischen Bildungen in den Umgebungen von Cserevicz, Beocsin, Rakovac und Kamenitz (22), und will hier nur ganz allgemein hervorheben, dass von Beocsin an gegen Osten zu die bisher petrographisch mannigfache Kreidebildungen sehr bald in wechsellagernde graue Thonschiefer und rostbraune Sandsteine übergehen, in welchen nur spärliche und undeutliche Spuren von Versteinerungen bisher gefunden wurden. Ich selbst habe in dem östlich von Beočin folgenden Dumbova Tale im dunkelgrauen Thonschiefer neben kleinen Knollen blos einen Steinkern von *Natica* sp. gefunden. H. Wolf erwähnt in seinem Berichte (2), dass er in den grauen Schiefern des Rakovacer Tales Pflanzenabdrücke fand; auf Grund dieser unbestimmten Pflanzen und der petrographischen Aehnlichkeit glaubte er den aus Mähren wohlbekannten Culmschiefer vor sich zu haben. Director J. Boeckh endlich teilte mir mit, dass er im oberen Teile des Kamenitzer Tales im dicktafeligen Sandsteine die Spur eines unbestimmten Ammoniten fand. Alle diese unbestimmten Daten genügen natürlich nicht, um auf palæontologischer Basis das geologische Alter des fraglichen Schiefer- und Sandstein-Complexes festzustellen; aber nicht sowohl darauf, als rein auf die stratigraphischen Verhältnisse gründete ich in meinen früheren Berichten (23) die Ansicht, dass in der ganzen Fruscagora nicht mehr von Aequivalenten der Culmbildung die Rede sein kann, sondern dass die in die Streichungsrichtung der petrefactenreichen ober-cretaceischen Schichten von Cserevicz hineinfallenden petrefactenleeren Thonschiefer und Sandsteine mit grösster Wahrscheinlichkeit desselben Alters sind, und diese Ansicht muss ich auch heute aufrechthalten

Je mehr man gegen Osten zu vordringt — wie ich mich in den letzten Jahren überzeugte — ein desto älteres Gepräge erhalten unsere Thonschiefer und Sandsteine, und erinnern die dunkelgrauen Thonschiefer der aufgestellten Schichten, z. B. bei Karlowitz in den grossen Schieferbrüchen im Strazsilor-Tale, oder am Ufer der Donau bei Kercsedin, sehr wohl an manche paläozoische dunkle Schiefer. Die mit dem Schiefer wechsellagernde, schmutzig bräunlichgelbe, durch feine Glimmerschüppchen flimmernde Sandsteine dagegen weichen von dem gewöhnlichen Habitus der

Karpathensandsteine weniger ab. Bei Bukovácz, in der Nähe der Quelle «Vilena voda» beobachtete ich in einem grossen Steinbruche, zwischen den vorherrschenden Sandsteinbänken, auch aus Bruchstücken von krystallinischen Schiefern zusammengesetzte Breccienbänke, welche wegen besonderer Härte als Bausteine gesucht sind.

Das interessanteste Gestein des ganzen Schichtencomplexes ist jenes, welches ich in meinen früheren Berichten unter den Namen «Magnesiakalk mit Chalcedonadern» beschrieben und seiner Bedeutung nach gewürdigt habe (22). Die dünneren oder dickeren Lager dieses Gesteins begleiten die am nördlichen Gehänge des Gebirges entlang ziehenden Serpentinlager, bald im Hangenden, bald im Liegenden, oder auch in beiden Horizonten. Ich betrachte dieses auffallende sedimentäre Gestein für einen umgewandelten Kalkstein, welcher gleichzeitig mit der Serpentinisation der ursprünglichen Peridotite, durch Einwirkung der während der Serpentinisirung ausgeschiedenen freien $SiO_2$, $H_2\ Mg\ C_2\ O_6$ und $H_2\ Fe\ C_2\ O_6$ allmählig seinen jetzigen Bestand erhielt. Diese Umwandlung ist bald anfänglich, wo der ursprüngliche Kalk blos dolomitisch wurde, durch $Si\ O_2$ jedoch noch nicht durchdrungen ist, bald vorgeschrittener, wo man in kleinerem Maass auch $SiO_2$ Ausscheidung bemerkt, bald abgeschlossen, wo die $SiO_2$ in Gestalt von Bergkrystall, Chalcedon und Opal das gewöhnlich weisse Gestein vollständig durchschwärmt und durchdringt.

In unmittelbarer Berührung mit den Serpentinlagern fällt diese vollständige Umwandlung besonders auf, und hier ist häufig nicht nur der Magnesiakalk, sondern auch die mit demselben in Berührung stehende Serpentinmasse durch das Netz der ausgeschiedenen $SiO_2$ und des Braunspathes durchdrungen, seltener aber auch durch reinen kohlensauren Kalk, welcher gewöhnlich als Kalkspath, selten auch als Aragonit ausgebildet erscheint. Reinen Magnesit, welcher an vielen Orten die Serpentinlager zu begleiten pflegt, konnte ich in der Fruscagora bisher nicht constatiren, weil auch in den reinsten, schneeweissen, dichten Vorkommnissen $CaO$ in bedeutender Menge nachweisbar ist. Ich bezweifle daher, dass jenes schneeweisse, grobkrystalline Mineral, welches M. Hantken im Jahre 1867 südlich von Bánostor sammelte, wo es

mehrere Cm. dick in Serpentin eingelagert vorkam, und welches er in der am 26. Juni 1867 abgehaltenen Sitzung der ungarischen geologischen Gesellschaft vorzeigte (4), wirklich reiner Magnesit war.

Was die Verbreitung dieses Magnesiakalkes betrifft, war ich bestrebt selbe nach meinen Beobachtungen in die geologische Karte genau einzuzeichnen. Seine letzten Spuren fand ich 1893 im Westen im Grabovaer «Golo glava» Tal, oberhalb des Serpentinlagers, in Form von opalisirtem Kalkmergel. Bei Bánostor zieht er in ziemlich breiter Zone durch das Tal hindurch. Das Serpentinlager in Berührung habe ich selbst nicht beobachtet; Lenz (10) und Handtken (4) jedoch erwähnen es, und zweifle ich deshalb nicht daran. Durch das folgende Tal des Potorany Baches streicht ebenfalls eine schmale Zone davon, und auch hier bemerkte ich kein Serpentinlager; zwischen den Geröllen des Baches jedoch kommt Serpentin häufig vor, ein Beweis, dass es auch hier, jedoch durch Waldboden verdeckt, vorkommen muss.

Im Csereviczer Tal kommt er gegen das Hangende der obercretaceischen Schichtreihe als bedeutenderes Lager vor; aber auch hier sieht man das damit wahrscheinlich in Berührung stehende dünne Serpentinlager nicht. Ueber Beocsin jedoch, in dem Profile, welches ich im Jahre 1872 vom Erdell Berge bis zum Kamme hinauf aufgenommen habe ($12^{\cdot 120}$), sieht man ganz deutlich, dass in Begleitung zweier dünner Serpentinlager, dadurch in drei Horizonte geteilt, der Magnesiakalk in ziemlicher Mächtigkeit fortstreicht. Von Beocsin an gegen Osten zu habe ich überall beobachtet, dass unser Gestein das mächtig werdende Serpentinlager an beiden Seiten begleitet, ja dass es stellenweise, wie z. B. am Gradac Berge bei Rakovac, auch dem Serpentin eingelagert vorkomme.

Am Sattel der Kamenitz-Iregher Landstrasse bedeckt das weisse, weithin auffallende Gestein in breiter Zone weite Strecken, den Serpentin beiderseits einsäumend. Am Abhang des Budakovac Potok-Tales befindet sich ein grosser Steinbruch darin, weil das $Si\,O_2$-durchdrungene harte Gestein als gutes Strassenbeschotterungs-Material benützt wird. Dieser Bruch ist wegen der blendend weissen Farbe des Gesteins von Süden her kommend weit sichtbar. In dieser Art zieht dann unser auffallendes Gestein bis zum Tale des Görgeteger Kloster dahin.

Ueber die Zusammensetzung des innerhalb des Magnesiakalkes bei Rakovac vorkommenden doppelkörnigen Braunspathes (Miemit) oder Dolomitpisolithes, hat V. von Zepharovich auf Grund jener Stücke, welche ich im Rakovacer Bache sammelte, Mitteilung gemacht (27).

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass ich in dem durch das Cserevicer Tal streichenden Magnesiakalk das Bruchstück einer grösseren *Pecten*-Art herausschlug, welches an die in den darunter folgenden Schichten vorkommenden Pecten-Arten erinnerte, jedoch verloren ging.

Ich übergehe nun zur Besprechung der mit dem Magnesiakalke in Verbindung stehenden Serpentinlager, da selbe meiner Meinung nach, desselben Alters sind, wie die versteinerungsreichen Schichten, welchen diese Lager eingeschaltet sind.

### *3. Ober-cretaceischer Serpentin.*

Nach H. Wolf (2·120) tritt der Serpentin in zwei dem Gebirge parallelen Zügen, am nördlichen und am südlichen Gehänge, im Süden den Phylliten-, im Norden den Grauwacke-Schichten eingelagert, auf. Diese erste Beobachtung Wolf's habe ich auch in jene Uebersichtskarte eingezeichnet, welche meinem Berichte im Jahre 1872 (12), beigelegt war.

A. Lenz' Angabe (14·199), dass die Ruine Kula auf Serpentin steht, ist unrichtig, denn dieser Berg besteht aus gelben Quarzit. Er beobachtete aber den Serpentin im Bánostorer Tal. Am südlichen Abhang soll, nach ihm, auch bei Gergurevce Serpentin vorkommen; ob er ihn aber selbst beobachtet hatte, das wird nicht hervorgehoben.

Nach Alex. Popovics (24·215) beginnt der südliche Serpentinzug bei Gergurevce und erstreckt sich gegen NO zu, ist aber nicht so breit, wie ich es nach Wolf's Uebersichtsaufnahme in meiner Karte zeichnete. Das Kloster Bessenovo steht auf gelben quarzitartigen Gestein und nicht auf Serpentin. In der Gegend von Vrdnik beobachtete er nördlich von der Grube Serpentin, im Kutyurine Bach aber Enstatit-Olivin Gestein anstehend und in Ge-

röllen. Bei dem Kloster Hopovo durchschneidet der Zsarkovac Bach einen breiten Serpentinzug.

Es kommt der Serpentin nach ihm noch oberhalb des Klosters Bessenovo, im Rasovo Bache, (mit Quarzit und krystallinischem Kalke wechsellagernd) vor. Dieses Vorkommen kenne ich nicht nach Autopsie und habe es daher in meiner Karte als Serpentin verzeichnet; ich hege jedoch Zweifel, ob es wirklich Serpentin und nicht vielleicht ein Lager umgeänderten Diorites sei?

Rochlitzer gibt in seiner geologischen Karte (25) kleinere Serpentinstöcke bei Hopovo, Vrdnik und Bessenovo und auch noch weiter gegen Westen zu in den Phylliten an. Von einem Teil dieser angeblichen Vorkommnisse konnte ich aber nachweisen, dass wir es hier nicht mit Serpentin, sondern mit Einlagerungen von verändertem Diorit zu tun haben.

Nach M. Kišpatič (35) waren bisher nur Olivinserpentine in der Fruscagora bekannt, er entdeckte aber am südlichen Abhang auch serpentinähnliche Gesteine im Sinne R. Drasche's.

Wirklicher Serpentin kommt zwar an beiden Gehängen der Fruscagora vor, bildet aber, nach ihm, keineswegs zwei abgetrennte Züge, sondern zieht ununterbrochen von der nördlichen Seite über den Gebirgskamm auf die südliche Seite hin.

Diese Beobachtung, oder besser gesagt Vermutung ist, wie ich später nachweisen will, nicht richtig.

Es sagt weiter Kišpatič, dass in den westlich gelegenen Durchschnitten von Potorány- und Crnogoranski-Potok hinauf bis zum Vienac Gebirgskamm kein Serpentin zu finden sei. Auch das ist unrichtig; denn der Serpentin streicht factisch durch das Grabovoer Tal als mächtiger Zug; und Hantken sowohl, als auch Lenz haben ihn auch im Bánostorer Tale beobachtet. Im Tale des Potorány-Potok habe ich den Serpentin anstehend wohl auch nicht gesehen, aber unter den Bachgeröllen kommt er vor.

Nach Kišpatič tritt der Serpentin der Reihe nach in jedem Quertale auf, jedoch nur bis zum Rakovacer Tal. Dies ist ganz richtig, denn oberhalb Rakovac erhebt sich der Serpentinzug bereits auf dem Gebirgskamm hinauf.

Oberhalb Beočin — schreibt Kišpatič — bestehen ganze Kuppen und Bergrücken aus Serpentin, wie z. B. die Kozarica,

Veliki und Mali Gradac und die Bergrücken, die sich gegen den Gebirgskamm hinziehen. Vom Rakovacer Vienac an zieht das Serpentinlager schon auf der südlichen Seite weiter gegen Osten und rückt dabei immer weiter vom Kamm hinunter. Im Jazaker Tale liegt der Serpentin noch nahe zum Kamm, im Vrdniker Tal liegt er schon tiefer, am tiefsten liegt er auf der Landstrasse Kamenitz-Iregh. Im Osten ist der Neradinski-Potok der letzte Punkt, wo Serpentin noch zu treffen ist, im Gergetežki-Potok ist er nicht mehr vorhanden.

Alle diese Beobachtungen Kišpatić's können, wie ich gleich zeigen werde, nur mit einigem Vorbehalt angenommen werden. Der Serpentinzug erstreckt sich z. B. sowohl nach Popovics (24,800), als auch nach eigener Erfahrung, bis zum Gergetežki-Potok.

Kišpatić bemerkte keine deutliche Contact-Grenze gegen die übrigen Gesteine; wogegen ich solche bei Beočin und Rakovac an vielen Stellen gesehen und auch erwähnt habe.

Ueber die Lagerung des Serpentins sagt ferner Kišpatić: In den Tälern wechsellagert der Serpentin factisch mit den Sandsteinen und Thonschiefern; auf den seitlichen Rücken aber, oberhalb dieser Täler habe er immer nur ein ununterbrochenes, breites Serpentinlager, welches sich höchst wahrscheinlich an den Glimmerschiefer anlehnt, gefunden. Dass auch diese Auffassung wiedersprechend und irrig ist, das erhellt schon aus meinen Profilen, welche ich meinem Berichte von 1873 (12), beigelegt habe und will ich des Weiteren noch ausführen.

Die Ausführungen Kišpatić über die Verbreitungs- und Lagerungsverhältnisse des Serpentins der Fruscagora sind also nicht ganz zuverlässig, da selbe eben die Folge ungenügender Beobachtungen sind. Nach einigen flüchtigen Excursionen lassen sich eben die verwickelten Verhältnisse nicht gleich richtig erfassen, dazu kommt man erst nach fortgesetzten langjährigen Beobachtungen im Felde; deshalb musste ich die auf irriger Auffassung beruhenden Folgerungen Kišpatić' zurückweisen.

Nach meinen Beobachtungen zeigen sich die ersten Spuren des Serpentin zwischen Svilos und Lezsimir, am Berge Jerakovac, in Form eines schönen grasgrünen opalartigen Gesteines. Weiter

gegen Osten streicht der Serpentin durch die Grabovoer Täler bereits als breites, zwischen ober-cretaceischen Schichten liegendes Lager hindurch. In der ansehnlichen Breite des Ausbisses ist das Gologlava Tal eingeengt und zeigt beiderseits steile felsige Gehänge.

Im folgenden Tale des Banostorer Uglarski-Potok beobachteten M. Hantken und O. Lenz das Durchstreichen des Serpentinlagers. Im Potorány Bache beobachtete zwar noch Niemand den anstehenden Serpentin, jedoch dem Vorkommen zwischen den Bachgeröllen nach ist dessen Vorhandensein wahrscheinlich.

Durch das Cserevicer Tal streichen 2 Lager, das obere etwa 20 M., das untere aber 5—600 M. breit. Beide sind der unteren, versteinerungsleeren Abteilung der ober-cretaceischen Schichten eingelagert. Weil aber gegen die obere Grenze des ober-cretaceischen Schichtcomplexes ein dickes Lager des Magnesiakalkes durchstreicht, erscheint es mir möglich, dass damit in Verbindung auch ein drittes dünneres Lager vorkomme, jedoch durch den Waldboden verdeckt ist.

In dem Profile, welches ich 1873 mitteilte (12,121) und welches von Erdell Berg bei Beocsin bis zum Gebirgskamm (Cerveni csott) hinaufreicht, sind 3 Serpentinlager zwischen den Magnesiakalk verzeichnet. Das oberste ist blos 2 M., das mittlere etwa 40 M. weit blosgelegt, während das unterste mehr 100 M. beträgt.

Im Beocsiner Tal, so auch in dem nach Osten folgenden Dumbrava Tal fand ich, nach meinem Bericht von 1876 (21), blos das unterste und mächtigste Serpentinlager entblösst, mit chalcedonhältigem Magnesiakalk sowohl im Liegenden als im Hangenden, oder aber mit Serpentinbreccie, dessen Bindemittel Magnesiakalk ist.

Das im oberen Teile des Rakovacer Tales auftretende Serpentinlager, mit Magnesiakalk eingesäumt, aber auch damit wechsellagernd, ist am mächtigsten entwickelt und erhebt sich bereits bis zum Gebirgskamm hinauf.

Am Waldwege zwischen Vrdnik und Ledince zieht das Serpentinlager schon auf der südlichen Seite, obzwar nahe noch zum Kamme weiter; so dass der Serpentin in das Ledinceer Tal nicht mehr gelangen kann. Der Serpentinzug setzt von hier unter

dem Sattel der Kamenitz-Iregher Landstrasse immer tiefer sinkend und dünner werdend, fort bis in das Tal des Gergeteger Potok.

Von diesem der ganzen Länge nach zusammenhängenden und stets zwischen ober-cretaceischen Schichten liegenden Serpentinlager finden sich am südlichen Abhange des Gebirges ganz abgesondert und zwischen krystallinischen Schiefern eingekeilt, die folgenden, von einander getrennten Serpentininseln.

Am weitesten gegen Osten zu, oberhalb des Klosters von Hopovo, zieht, nach A. Popovics, ein mehr als 100 M. mächtiges Serpentinlager gegen Westen über die Landstrasse und dann in das Budakovac Tal; hängt aber in keiner Richtung mit dem nördlichen Serpentinzuge zusammen, welcher nahe zum Kamme dahinzieht. Dieses Serpentinlager von Hopovo steht mit verkieselten krystallinischen Kalken in Berührung, wie dies auch auf Rochlitzer's Karte richtig verzeichnet ist, nur wurde hier das Serpentinlager allzu breit dargestellt. Oberhalb des Serpentins tritt Leythakalk zu Tage und unter diesem zieht eine schmale Zone von Sotzkaschichten hindurch, worauf noch höher gegen den Kamm zu die schmale Zone des centralen Phyllites folgt und nahe bis zum Kamme dauert, um dort von den ober-cretaceischen Schichten mit dem eingelagerten nördlichen Serpentinzuge überlagert zu werden. Diese Serpentinpartie, mit etwas krystallinischem Kalk und Phyllit in Verbindung, bildet daher eine von der Gebirgsaxe abgerissene, durch Tertiärbildungen umgebene, vollständig isolirte Scholle, welche nach Hopovo benannt werden kann.

Ein zweites inselartiges Serpentinvorkommen zieht aus dem oberen Teil des Vrdniker Dubocsac Thales über den Gebirgsrücken Kosmatica geradezu gegen Westen. Ich verfolgte es blos bis zum erwähnten Bergrücken und fand es zwischen Phylliten eingekeilt. Kišpatič fand in der Streichungsrichtung dieses Zuges, in dem Tale des Kameniti Potok, zwischen Amphibolite eingelagert ein mächtiges Lager von serpentinähnlichem Gestein, welches ich als Fortsetzung des vorigen in meine Karte eintrug. Die letzten Spuren davon fand ich am Wege von Remeta mala zu dem Cerveni csott, deshalb habe ich diesen Serpentinzug bis hieher gezogen.

Damit parallel weiter hinunter gegen Jazak zu, habe ich, nach Kišpatič Beobachtung, noch zwei kleinere Serpentinlager

eingezeichnet. Kišpatič schreibt nämlich: «Weiter im Bach sehen wir wieder Amphibolite und bei der Mündung des Srnjevački potok in den Kameniti potok erscheinen wieder ungeheure Massen von Serpentin. Das serpentinähnliche Gestein wird immer dunkler, übergeht in Amphibolit, um dann das drittemal zum Vorschein zu kommen».

Noch weiter gegen Westen zu, b. l. in die Streichungsrichtung des untersten Serpentinzuges, fällt jenes Serpentinvorkommen im Rasovo Tal bei Bessenovo, welches A. Popovics erwähnte (24,299), und welches vielleicht, wie die Lager Kišpatič', ebenfalls serpentinähnliches Gestein sein dürfte.

Auf der Karte Rochlitzer's sind noch zwei Serpentinpartien eingezeichnet. Die erste bei Vrdnik am Morintovo-Bach, die andere aber bei Bessenovo am nördlichen Rand des Triaskalkes. Das Gestein des ersten Punktes habe ich untersucht und als umgeänderten Dioritttuff beschrieben. Das zweite Vorkommen habe ich zwar nicht gesehen, glaube es aber ebenfalls dafür halten zu müssen, und zwar deshalb, weil es genau in das Streichen der Dioriteinlagerungen im Vrdniker Podkula und Jazaker Beli-Potok Tale hineinfällt, und weil auch das letztere Vorkommen am nördlichen Rande des Triaskalkes liegt.

Aus allem dem erhellt nun zur Genüge, dass die am südlichen Abhange zerstreuten inselartigen Serpentinvorkommen zwischen den Phylliten eingekeilt sind und dass selbe nirgends mit dem Serpentinlager der nördlichen Seite, welches zwischen ober-cretaceischen Schichten liegt, in Berührung treten.

Und nun will ich noch an die petrographische Detailbeschreibung Kišpatič' anschliessend, die von mir in neuester Zeit gesammelten Exemplare kurz beschreiben.

A) *Aus dem nördlichen Serpentinzuge stammende Serpentine.* 1. Zwischen *Svilos* und *Lezsimir*, am Gebirgsrücken namens *Jerakovac* fand ich im Waldboden liegend ziemlich grosse eckige Stücke eines hieher gehörigen Gesteines. Die verwitterte Rinde derselben ist durch Eisenrost gelb, stellenweise braun. Das frische Innere aber ist auffallend spargel- bis grasgrün, oder gelb und schwärzlichgrün wellig gestreift, fettglänzend, opalartig mit muscheligem Bruche. Stellenweise aber ist die Oberfläche auch grün-

lichweiss gebleicht. Mit Stahl giebt dieses opalartige Gestein Funken, lässt sich aber mit dem Messer stellenweise ritzen. Es ist übrigens sehr spröde, und bricht mit dem Hammer geschlagen splitterig. Ein Exemplar zeigte in einer kleiner Spalte auch Chalcedon. Das spec. Gew. fand ich 2·18. Im Glaskolben erhitzt, geben Splitter viel Wasser, wobei sie knisternd undurchsichtig und leberbraun wurden. Nach längerem Glühen schmolzen die Splitter zwar nicht, brannten sich aber bläulichweiss. Sämmtliche Eigenschaften weisen daher auf eine grün gefärbte Opalmasse hin. Nur fragte es sich noch, was wohl die färbende Substanz sei, und ich untersuchte deshalb Dünnschliffe davon unter dem Mikroskope.

Die Dünnschliffe sind grünlich oder gelblich, gemengt mit wellig eingebetteter faseriger undurchsichtiger Substanz. Einzelne Teile dieser Substanz erinnern an Bastit, zeigen zwischen gekreuzten Nikols bläulichbunte Interferenzfarben und gerade Auslöschung. Im ganzen Dünnschliff sind ferner kleinere oder grössere schwarze Erzkörnchen eingestreut, um welche herum hie und da Eisenrostflecke liegen. Die vorherrschende, durchsichtig grünliche Opalmasse ist apolar. Aus diesem Verhalten ergibt sich, dass man es mit einem opalisirten Serpentin zu thun habe.

2. Der bei *Grabovo* im westlich vom Gologlava-Rücken liegenden Tale gesammelte typische Serpentin ist sowohl äusserlich, als auch unter dem Mikroskop besehen, mit dem im Cserevicer Tale vorkommenden dunkelgrünen, bastitreichen Serpentine ganz identisch. Grünlichweisse, glatte, seifenähnliche Pikrolith-Krusten sind auch hier häufige Erscheinungen; ausserdem sieht man aber hie und da auch durchscheinende Kalkspath-Ueberzüge. An einem Stück fand ich wawellitähnliche, radialfaserige, schneeweisse, seidenglänzende, kreisförmige Nadelgruppen von Aragonit aufgewachsen. Das spec. Gewicht des Serpentins bestimmte ich zu 2·5.

3*a*. Einen auffallend bastitreichen Serpentin sammelte ich im Tale von *Beočin*. Solche finden sich übrigens auch im Cserevicer Tal, innerhalb des Bastitblättchen spärlicher enthaltenden Serpentins. Auf dunkelgrünem Grunde sieht man heller grünlichgelbe, zum Metallglanz neigend stark perlmutterglänzende, feinblätterige, glimmerähnliche Bastitlamellen bis 1 □ Cm. so dicht

ausgeschieden, dass sie gewiss die Hälfte des Gesteins ausmachen. Auch in Chrysotil übergehende Pikrolith-Aderchen durchziehen diesen schönen Serpentin. Unter dem Mikroskop sieht man die rechteckigen Schnitte des bräunlichen oder gelblichen, stark gefaserten Bastites in grösster Menge. Dazwischen gedrängt in ziemlich grossen Körnern und auch Krystallen treten netzförmig zerklüftete, aber noch mit gelblichweissen, durchsichtigen frischen Kernen versehene Olivine hervor, welche in lebhaften Farben polarisiren. Häufig sieht man in ihnen, in ziemlich grossen Körnern oder in quadratischen Krystallschnitten, braunrot durchscheinenden Chromspinell eingeschlossen. Pyroxen (Sahlit), den Kišpatič im Olivinenstatit-Gestein der Fruscagora nachgewiesen hat, konnte ich hier nicht finden.

3*b*. Ebenda, jedoch auf dem Bergrücken, welcher sich gegen die *Cerova strana* hinzieht, tritt ein beinahe bastitfreier Serpentin zu Tage. Das dunkelgrüne Gestein ist scheinbar gleichartig, dicht, mit splitterigen Bruch; mit der Loupe besehen, kann man dennoch einige flimmernde grünlichgelbe Bastit-Schüppchen entdecken. Unter dem Mikroskop zeigt es beinahe rein das Bild eines netzförmigen Olivinserpentins, mit sehr spärlich auftretenden einzelnen Bastit-Schnitten, jedoch mit reichlichen Magnetit- oder Chromit-Körnern.

3*c*. Zwischen den Geröllen des Beočiner Baches fand ich einen ähnlichen opalisirten Serpentin, wie der bereits beschriebene von Svilos. Die Masse desselben ist vorherrschend gelblichbrauner Opal, in dem bis erbsengrosse, grasgrüne Serpentinkörner eingestreut liegen.

4. Vom Rakovacer Gradacberge, dessen reiner Olivinserpentin im Jahre 1873 von mir (22) und 1889 von Kišpatič (35) beschrieben wurde, will ich diesmal nur eine besonders schöne Serpentinvarietät vorführen.

Das hell bläulichgrüne, schwach seidenglänzende, feinschalige und zugleich grobfaserige Mineral, lässt sich nach beiden Richtungen leicht in kleine eckige Stücke spalten. Die Oberfläche ist hie und da mit einer weissen Kruste oder mit weisslich durchscheinenden Skalenoëdergruppen von Kalkspath überzogen, zwi-

schen den Fasern sieht man auch dunkel oder heller ölgrüne Serpentinpartien eingekeilt. Das spec. Gewicht ist 2·52.

Unter dem Mikroskop erscheint das faserige Mineral abwechselnd aus rindenbräunlich durchscheinenden und hell gelblich durchsichtigen welligen Bändern, so dass die Ersteren die Letzteren quasi umhüllen. Zwischen gekreuzten Nikols sieht man das prachtvollste Bild einer gestrickten Textur. Die Fasern polarisiren in lebhaften Farben und zeigen gerade Auslöschung, nur tritt diese infolge des welligen Verlaufes nicht der ganzen Länge nach auf einmal, sondern nur gliederweise ein. Dazu leuchten noch sehr lebhafte Farben von quer durchstreichenden Fasern hervor, so dass das ganze Bild dem eines bunten Strickwerkes ähnlich ist. Ich halte diese Serpentinvarietät für einen unvollkommenen Chrysotil, d. i. *Metaxit,* und finden sich ganz ähnliche Varietäten — wie ich gleich zeigen werde — auch an mehreren Stellen der südlichen Seite des Gebirges.

5. Zwischen Rakovac und Vrdnik am Gebirgskamm habe ich neuestens das Vorkommen des kaum serpentinisirten, ursprünglichen, schwärzlichgrünen Olivin-Enstatit Gesteins mit dem spec. Gewicht 2·87 constatirt. Es ist dies dasselbe, welches ich im Jahre 1876 vom Mermer Berg bei Beočin beschrieben habe (22). Kišpatič hatte darin auch Pyroxen (Sahlit) nachgewiesen und somit das Gestein mit dem Lherzolith identificirt (35). Ich muss gestehen, dass es mir auch in dem neuen Funde nicht gelang einen Pyroxen nachzuweisen.

6. Einen ähnlich dunkelgrünen, zähen und harten Lherzolith fand ich ferner noch zwischen Vrdnik und Ledince, nahe zum Kamme, jedoch schon auf dem südlichen Abhang. Hier aber bildet dieses frische Gestein nur zerstreute, kleinere oder grössere, schalige Nester und Knollen im Serpentin. Unter dem Mikroskop zeigen Dünnschliffe davon ein recht typisches Serpentinbild, nur ist das Serpentinnetz noch sehr dünn, die Olivinkerne aber sind zahlreich und ziemlich gross. Der Enstatit oder Bronzit ist zum Teil grünlich, ebenfalls in Umwandlung begriffen, zum Teil beinahe wasserklar. Spärlich sieht man auch Chromspinell-Krystallschnitte im Olivin.

7. Nahe hieher, bei der Quelle «Dobravoda» ist der anste-

hende Serpentin dem reinen Olivinserpentine des Rakovacer Gradac Berges ähnlich; die Bastit-Schüppchen fehlen aber auch da nicht gänzlich, und das ursprüngliche Gestein war daher Bronzitperidotit. In der gelblichweissen Pikrolithkruste fand ich kleine glänzende Magnetit-Octaëder dicht eingestreut.

8. An der östlichen Endigung des grossen nördlichen Serpentinlagers im Tale beim Kloster Gergeteg, sammelte ich in einem kleinen Bruch Serpentine. Die Mächtigkeit des Lagers beträgt hier nur mehr 20 Meter. Unterhalb folgt zuerst roter Thon und dann Magnesiakalk mit Chalcedonadern bis zum Klosterhof. Der Serpentin ist hier sehr verwittert und mürbe, zum Teil ganz zerbröckelt. Auf mattem, schmutziggrünem und rostfleckigem Grund zeigen sich hie und da noch perlmutterglänzende Bastitschüppchen und schwarze Erzkörnchen. Das Gestein ist stark zerklüftet, die Spalten mit Kalk- und Braunspath erfüllt; hie und da erblickt man aber auch Krusten von grauen Quarz- oder Citrin-Kryställchen. Seltener zeigten sich radialstängelige Aggregate von rosarotem Aragonit und Krystall-Gruppen flacher, linsenförmiger *R* von Braunspath in den Klüften. Innerhalb des gewöhnlichen dichten Serpentins dickere Adern bildend, kommt endlich auch der oben beschriebene *Metaxit* häufig vor, ist jedoch ebenfalls sehr zersetzt und bröckelig. Er ist gelblich oder grünlichweiss, und besitzt noch schwachen Seideglanz. Die Stängel sind mehrfach quer gewunden und zerbrochen und lösen sich sehr leicht von einander.

9. Der Serpentin, welchen ich oberhalb des Klosters Hopovo sammelte, hat eine hell pistazgrüne Farbe und ist mit ähnlich gefärbten, stark perlmutterglänzenden Bastit-Blättchen erfüllt. Unter dem Mikroskop erwies er sich als ein typischer Bronzit-Olivinserpentin, mit häufigen rötlich durchscheinenden Picotit-Krystallschnitten.

10. Auf dem zwischen Vrdnik und Jazak sich erhebenden Gebirgsrücken «Kosmatica» habe ich mehrere Serpentinvarietäten beobachtet. Am höchsten Punkt des Rückens, also im Kerne dieses Serpentinlagers, ist das Gestein gelblich- oder bräunlichgrün; und zeigen sich auf seinem stark splitterigen Grund grünlichweisse, pikrolithartige Partien, deren perlmutterglänzende Spaltflächen

auf stark veränderten Bastit hinweisen. Ausserdem sieht man pechschwarzen, feinkörnigen Chromit eingesprengt. Spec. Gewicht ist 2·66. Unter dem Mikroskop sieht man auch in diesem Gestein ganz deutlich das netzförmige Bild des Olivinserpentins. Die spärlichen Bastitfetzen sind sehr stark zersetzt. Einige gelbliche, zerklüftete Körnchen und Kryställchen mit lebhaften Polarisationsfarben und schiefer Auslöschung deuten auf einen noch frischen Pyroxen (Sahlit?). Zerstreute Chromitkörner ergänzen das mikroskopische Bild dieses Serpentins, dessen ursprüngliches Gestein Lherzolith war.

Am südlichen Rande dieses Lagers kommt in Verbindung mit diesem Serpentin sehr viel, wellig gebogener, stängelig-faseriger, hell bläulichgrüner, etwas seideglänzender *Metaxit* vor, dessen mikroskopisches Bild mit dem früher beschriebenen vom Gradac Berge vollkommen übereinstimmt. Spec. Gewicht ist 2·51.

Weiter hinunter gegen Jazak zu, in einem Seitenzweig des Czerni Potok, habe ich unter den Geröllen aus abwechselnd grünlichweissem Pikrolith, weissem seidigen Chrysotil und zeisiggrünem Metaxit bestehende Exemplare gesammelt, welche ebenfalls von der Kosmatica herstammen. Das spec. Gewicht betrug 2·4.

B) Am südlichen Abhange fand ich aber ausser diesen echten Serpentinen auch serpentinähnliche Gesteine. Solche hatte zuerst Kišpatić nachgewiesen (35), und zwar im Tale des Jazaker Czerni Baches, wo nach ihm die quer durch das Tal streichende Lager aus sogenannten Antigorit-Serpentin bestehen, welcher aus der Umwandlung der Amphibolite hervorgegangen sein dürfte. Auch ich habe neuerer Zeit an zwei neuen Fundstellen ähnliche Serpentine gesammelt.

*a)* Die erste Stelle befindet sich am Wege, welcher vom Kosmatica-Rücken nach Jazak zu hinunter führt, noch am oberen Gehänge dieses Berges. Das Gestein liegt in eckigen Bruchstücken mit gelben Jaspis und quarzreichen Phyllit vergesellschaftet im Waldboden. Es ist dunkelgrün, feinkörnig, stark splitterig brechend. Die Splitter sind saftiggrün durchscheinend, hie und da auch ins Weisse ziehend, mit faseriger Textur und Seidenglanz versehen. Gegen die Verwitterungsrinde zu wird das Gestein allmählig heller grün, weisslichgrün und übergeht schliesslich in

eine gelblichweisse, feinkörnige Masse, in welcher spärlich auch schwarze Erzkörnchen zerstreut liegen. Spec. Gewicht = 2·65.

Unter dem Mikroskop sind die reinsten Stellen davon beinahe wasserklar, blos mit Spuren der, der parallel- oder verworren faserigen Struktur entsprechenden feinen Linien. In dieser Grundmasse sieht man von feinem Staub an bis zu ziemlich grossen Körnern, schwarzen, metallglänzenden Magnetit (oder Chromit), mit Eisenrosthöfen eingestreut. Ausser den wasserklaren Partien bemerkt man aber auch unregelmässige Flecken oder Schichten einer gelblichbraunen, blos durchscheinenden, wolkigtrüben Substanz; ja auch dünne Adern davon durchkreuzen das Bild. Diese Substanz erscheint bei reflectirtem Licht grünlichweiss.

Zwischen gekreuzten Nikols polarisiren die durchsichtigen verworren feinfaserigen Partien in bläulichen oder gelblichen Farben. Die Fasern löschen in Parallelstellung aus. Die bräunlichgelben trüben Flecke und Adern zeigen lebhafte gelb und rot bunte Aggregatpolarisations-Farben und scheinen aus noch ziemlich frischen Pyroxen-Körnern zu bestehen. Die verworren faserigen Partien gleichen bei stärkerer Vergrösserung der 2. Abbildung, welche der Abhandlung R. Drasche's * beigegeben ist, welche das mikroskopische Bild eines serpentinähnlichen Gesteines von Windisch Matrey darstellt.

*b)* Die zweite Stelle, auf welcher ich dergleichen serpentinähnliches Gestein, zwar blos als Gerölle fand, ist der Bergrücken, welcher zwischen dem Jazaker Beli-Potok und dem Bessenovoer Tale auf den Cerveni csott hinaufzieht. Auch dieses Gestein ist dunkelgrün, feinkörnig, mit stark splitterigem Bruch. Die Splitter sind lauchgrün bis weisslichgrün durchscheinend; faserige Partien jedoch, wie im vorigen Gestein, finden sich hier nicht. Auch schwarze Erzkörnchen sieht man eingestreut. Spec. Gew. = 2·63.

Unter dem Mikroskop sieht man auf wasserhellem, verworren faserigem Grunde eine bräunlichgelbe, durchscheinende trübe Substanz in unregelmässigen Flecken und Tüpfeln, seltener auch in grösseren Krystallschnitten, in Gesellschaft verschieden grosser

* Ueber Serpentine und serpentinähnliche Gesteine, Miner. Mitteil., gesamm. von G. Tschermak. Wien, 1871, p. 1. Taf. I.

Magnetitkörner, dicht zerstreut. Diese Substanz erinnert an stark veränderten Bronzit, zeigt aber keine Spur von Dichroismus und Lichtabsorption.

Zwischen gekreuzten Nikols erscheint die wasserklare Basis als ein Aggregat winziger Schüppchen, welche in bläulichen und seltener in gelben Farben polarisiren. Die trüben gelblichen Flecke zeigen lebhaftere Polarisationsfarben. Die Reste grösserer Krystallschnitte lassen noch parallelfasrige Textur erkennen und löschen gerade aus. Bei starker Vergrösserung hat die wasserhelle, schuppig lamellöse Grundmasse das Aussehen der 3. Abbildung zu R. Drasche's oben erwähnten Abhandlung, welches das mikroskopische Bild eines serpentinähnlichen Gesteins von Heiligenblut darstellt.

Nach meiner Erfahrung scheinen diese serpentinähnlichen Gesteine mit den echten Serpentinen vergesellschaftet, *richtiger an den Rändern von deren Lagern,* vorzukommen.

*

Wenn ich nun zum Schlusse aus den Lagerungs- und Verbreitungs-Verhältnissen der beschriebenen Serpentine auf deren geologisches Alter und auf die Umstände der Eruption schliesse, muss ich zu dem Ergebnisse gelangen, dass die ursprünglichen Gesteine des echten Serpentins, nämlich der Lherzolith, die Olivin- und Olivinbronzit-Gesteine, am Schlusse der Kreideepoche den krystallinischen Schieferkern unseres Gebirges, wahrscheinlich nur auf der südlichen Seite durchbrachen, und dass eben dann auch in der Gegend von Vrdnik jener buchtartige Einbruch entstand, in welchem sich später die Sotzkaschichten abgelagert hatten; dass ferner die Lava des hervorbrechenden Olivingesteins, deren Eruption auch von Lapilli- und Aschenauswurf begleitet sein musste, in der Uferregion des damaligen Meeres in Form einer weitausgedehnten Decke sich ausgebreitet und folglich parallel auf die bereits gebildeten Kreidesedimente gelagert hat; ferner dass der Detritus der ausgekühlten Lava in die später sich absetzenden versteinerungsführenden Sedimente des ober-cretaceischen Meeres hineingelangte; endlich dass der Lavaerguss sich,

wie die im Hangenden sich zeigenden dünneren Serpentinlager beweisen, in schwächerem Maasse einigemal wiederholt hatte.

Die ober-cretaceische Massengestein-Eruption war jedoch mit den Olivingesteinen noch nicht abgeschlossen; denn diesen folgte, aus den Lagerungsverhältnissen geschlossen, noch eine Eruption doleritischen Trachytes. Ich muss daher auch über diese etwas eingehender sprechen.

### *4. Ober-cretaceische Einlagerungen von doleritischem Trachyt.*

Ueber das eruptive Gestein, von welchem hier die Rede ist, wurden, nach der eingehend mitgeteilten Literatur, schon von so Vielen und so oft Mitteilungen gemacht, dass ich die petrographische Beschreibung diesmal getrost unterlassen kann. Nur das muss ich hier zulassen, dass man das Gestein jetzt, nachdem das Fehlen des Nephelins zweifellos constatirt wurde, nicht mehr einen Phonolith nennen darf, dass aber das Epitheton «doleritisch» wegen der auffallenden Basicität desselben, noch immer darauf passt. Die Mehrzahl der Petrographen (Doelter, Szabó, Kišpatič) haben das Gestein als Trachyt bestimmt, natürlich mit der Voraussetzung, dass dieses das Produkt einer tertiären Eruption sei. Wenn ich es nun für obercretaceisch erkläre, will ich deshalb diese Bezeichnung nicht verwerfen, nur setze ich das Epitheton «doleritisch» voran, weil es factisch basischer ist, als sämmtliche tertiäre Trachyte, wofür auch das hohe spec. Gewicht (2·7) deutlich spricht.

Meine Gründe, warum ich diesen doleritischen Trachyt für das Product einer ober-cretaceischen Eruption erkläre, sind die Folgenden: 1-tens, tritt dieser Trachyt nirgends mit Tertiärbildungen, sondern grösstenteils mit ober-cretaceischen Ablagerungen, stellenweise auch mit azoischen Dioriten, in Berührung; 2-tens, ist dieser Trachyt im Diorit des Peterwardeiner Festungsberges in Form zweier schmaler Gänge eingekeilt; zwischen den obercretaceischen Sandsteinen und Thonschiefern findet er sich dagegen in den Tälern von Ledince und Rakovac, allen bisherigen Erfahrungen gemäss, in Form wirklicher Lager eingebettet, welche

mit den hangenden und liegenen Schichten parallel liegen und somit muss er mit diesen ein gleiches Alter haben.

Als Beweise der Richtigkeit meiner Anschauung will ich sämmtliche Erfahrungen, welche sich auf das Vorkommen und die Verbreitung dieses doleritischen Trachytes beziehen, in Kürze vorführen.

Ich habe das Auftreten dieses Trachytes im Rakovacer Tale zuerst im Jahre 1870 beobachtet, und hielt es damals noch für ein stockmässiges (8). Auf Grund meiner Beobachtungen im Jahre 1875 habe ich dessen Auftreten am Grunde des Rakovacer Tales für ein gangmässiges gefunden (22) und dessen oberen Gang auf 40, den unteren aber auf 20 M. geschätzt. Im Jahre 1882 habe ich es schon entschieden erkannt (33), dass die beiden durch das Ledinceer Tal streichenden Trachytzüge, zwischen den obercretaceischen Schichten als mächtige Lager eingekeilt vorkämen, welche gegen Westen zu bis in das Thal von Rakovac reichen, und in diesem Urteile haben mich meine in den letzten Jahren gemachten Beobachtungen, so auch die anderer Forscher, nur bestärkt.

Nach Al. Popovics (18,226) bestehen die im Ledinceer Tale oben zu beiden Seiten sich erhebenden Kuppen aus Sanidintrachyt, der sich weiter gegen Westen ausdehnt; gegen Osten aber reicht er nahe bis zum Kamenitzer Tal.

Nach St. Nedeljkovič (15) bestehen neben Ledince die folgenden Berge aus Trachyt: Kamenar, Lukin svetac, Na stojanovom grobu und Cerni csott (südwestlich vom Dorfe). Den Mittelpunkt bildet der Kamenar. Alle diese Kuppen hängen mit einander zusammen; nur ist der Zusammenhang stellenweise durch jüngere Bildungen bedeckt. Der Trachyt schliesst fremde Gesteine, namentlich Glimmerschiefer und Granit ein.

Al. Popovics beschrieb in seinem Berichte (24) den Trachytausbiss am Peterwardeiner Festungsberg und in der Umgebung von Ledince, ausser den früher erwähnten Trachytvorkommen noch den Berg Kralyevska stolica. Nach ihm ist er in grösseren Massen an zwei Stellen des Cerni csott, dann auch am Kamenar an zwei Punkten, endlich beim Zusammenflusse der Täler des Kamenarski und Ratorski Potok aufgeschlossen. Rechts vom west-

lichen Zweige des Rakovacer Tales (Mali potok) zeigen sich auch noch Spuren des Trachyts, so auch gegen den Bergrücken zu, überall nur zwischen den Sandsteinen. Auch er hielt die Vorkommnisse von Rakovac für die Fortsetzung jener von Ledince.

Popovics erwähnt endlich noch bei Alt-Slankamen einen Haufen Trachyt gesehen zu haben, von welchem die Bewohner aussagten, dass man das Gestein am Donauufer, etwas nordwestlich vom Orte gelegen, bei niederem Wasserstand anstehend finde. Ob die Behauptung auch wahr sei, das konnte Popovics nicht entscheiden, aber auch ich konnte keine neuere Nachricht darüber erhalten, und somit bleibt dieses angebliche Vorkommen zweifelhaft.

Nach Kišpatič (29 und 30) kommt im Peterwardeiner Tunnel, welcher 361 M. lang ist, 60 M. von der westlichen Oeffnung, zwischen den Grünsteinschiefer eingekeilt, ein 5·5—7 M. und in abermals 100 M. Entfernung ein zweiter, 6 M. mächtiger Trachytgang vor. Der erste Gang dürfte es sein, dessen Ausbiss früher Popovics neben dem Bräuhaus beobachtet hatte.

Im Rakovacer Tal, bei der Buskina Ugljara, beobachtete Kišpatič die Einkeilung des Trachytes zwischen dunkel- und lichtgrauen Kreidesandstein bl. in 80 M. Mächtigkeit, worauf Thonschiefer mit Zwischenlagern, 2 M. dicker Sandsteinbänke folgen. Dann tritt abermals der Trachyt bl. 750 M. weit zu Tage und ganz oben zeigen sich Kreidekalke.

Bei Ledince tritt nach ihm der Trachyt im Kamenarski-Potok auf, und bildet seitwärts auch den Gipfel des Kamenarberges. Von hier zieht er weiter gegen den Ratorski-Potok zu, wo er den Kreidesandstein durchbrochen hat. Von hier erhebt er sich rechts auf den *Lukin svetac*, welcher ganz aus Trachyt besteht. Gegen den Gebirgskamm setzt er in der Nähe der «Tresnyeva anta» zwei Kuppen zusammen, wovon der eine Lisai vrch (bei mir Ostra glavica) heisst.

Sämmtliche Beobachtungen also führen zu dem Schlusse, über dessen Stichhältigkeit ich mich neuestens wieder überzeugt habe: dass die Trachytvorkommen von Rakovac und Ledince zwei parallele, ununterbrochene Einlagerungen zwischen den obercretaceischen Schichten bilden. In meiner Mitteilung über den

Ledinceer Bleiglanzgang (33) habe ich die Lagernatur dieser Trachytzüge so klar dargelegt, dass darüber trotzdem, dass ich sie damals noch als Lagergänge bezeichnete, kaum gezweifelt werden kann.

Weil diese Trachytlager entschieden im Hangenden der Serpentinlager vorkommen, ist es klar, dass die Eruption und deckenförmige Ausbreitung des doleritischen Trachytes in der Strandzone des ober-cretaceischen Meeres später erfolgen musste, als die der Olivingesteine. Da Breccien- und Tuffgebilde des doleritischen Trachytes noch nicht beobachtet wurden, ist es wahrscheinlich, dass der Ausbruch sich hauptsächlich auf Lavaerguss beschränkt hat.

## *III. Tertiärgebilde.*

### *1. Kohlenführende Sotzkaschichten.*

Das Vorkommen dieser Schichten südlich von Vrdnik, in einer kleinen Einsenkung des südlichen Gehänges, war in Folge der Kohlenausbisse schon lange bekannt, weil man nach Lenz (10), schon bis zum Jahre 1855 etwa 2 Millionen Centner Kohle abgebaut hatte, welche in Mitrovicz verbraucht wurde. Einen Stollen trieb man auch in den Serpentin hinein, welcher sich hier an krystallinischen Schiefer lehnt.

In den Jahren 1872 und 1873 wurden diese Schichten auf Basis jener Pflanzenreste, welche durch Lenz und mich gesammelt wurden, und welche D. Stúr bestimmt hatte (9), mit den der aquitanischen Stufe angehörigen Sotzkaschichten gleichgestellt. Erst im Jahre 1873 wurde dieses ziemlich ausgebreitete Kohlenvorkommen eingehend durchschürft und untersucht, und J. Rochlitzer, welcher die Schürfungen leitete, hatte die dabei beobachteten sämmtlichen Tatsachen genau notirt (25) und in einer Manuskript-Karte eingetragen. Nach ihm wurde das Kohlenflötz damals an 9 verschiedenen Stellen in 2—7½ Klafter Mächtigkeit constatirt. Nach solchen gründlichen Vorarbeiten wurde der Bergbau regelrecht in Angriff genommen und ist seitdem in regem Betrieb. Im Sommer 1893 hielt ich mich einige Tage in dieser neuen Bergcolonie auf, und Herr Rudolf Pauk, der damalige

Leiter des Kohlenwerkes war so freundlich, mir die geologisch wichtigen Resultate der neueren Grubenaufschlüsse, nämlich die bergmännische Aufnahme des Kohlenterrains und das genaue Profil des 102 M. tiefen Haupt (Maschinen)-Schachtes zur wissenschaftlichen Benützung mitzuteilen. Die Publication derselben in passender Form erachte ich auch in geologischer Hinsicht für nützlich.

*Profil des Haupt (Maschinen)-Schachtes.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Thoniger Boden | 2·00 M. |
| 2. | Weicher grauer Mergel | 3·00 « |
| 3. | Rötlichgelber mürber Sandstein | 2·00 « |
| 4. | Fester grauer Mergel | 3·30 « |
| 5. | Fester grauer Sandstein | 0·50 « |
| 6. | Fester grauer Thonmergel | 1·50 « |
| 7. | Thoniger Mergel | 0·30 « |
| 8. | Grauer Thonmergel mit groben Kalkmergel-Geschieben | 4·00 « |
| 9. | Schotteriger Kalkmergel | 0·50 « |
| 10. | Grauer fester Sandstein | 1·50 « |
| 11. | Thonmergel mit Kohlenspuren und Blattabdrücken | 0·50 « |
| 12. | Fester grauer Sandstein | 0·70 « |
| 13. | Grober, fester grauer Sandstein | 0·90 « |
| 14. | Fester, weisser grober Sandstein | 0·50 « |
| 15. | Weisser sandiger Mergel | 0·80 « |
| 16. | Thonmergel mit Blattabdrücken | 0·80 « |
| 17. | Thoniger weisser Sand | 0·40 « |
| 18. | Thonmergel mit kleinen Muscheln | 0·50 « |
| 19. | Fester, brauner Thonmergel | 1·00 « |
| 20. | Fester, feiner Sandstein | 1·00 « |
| 21. | Fester Thonmergel | 0·30 « |
| 22. | Fester Sandstein | 0·70 « |
| 23. | Grauer Thonmergel mit Sandstein-Tafeln | 2·30 « |
| 24. | Fester Sandstein mit Sandzwischenlagen | 1·50 « |
| 25. | Sandstein mit grossen, unregelmässigen Knollen | 1·50 « |
| 26. | Sandstein | 0·40 « |
| 27. | Schotteriger Sandstein, unregelmässig gelagert | 1·32 « |

| | | |
|---|---|---|
| 28. | Grauer sandiger Thonmergel | 1·00 M. |
| 29. | Thonmergel mit Sandstein-Tafeln | 0·80 « |
| 30. | Grober, weisser Sand | 0·50 « |
| 31. | Sandiger Thonmergel, mit Sandstein-Tafeln und Blattabdrücken | 2·10 « |
| 32. | Grauer sandiger Thonmergel mit dünnen Sandlagen | 3·70 « |
| 33. | Grauer sandiger Thonmergel mit Kalkmergel-Einlagerungen | 3·30 « |
| 34. | Grauer Thonmergel, mit Sandstein-Schichten | 4·00 « |
| 35. | Sandiger Schieferthon, mit Kalkmergel-Einlagerungen | 2·40 « |
| 36. | Sandstein mit Blattabdrücken | 1·00 « |
| 37. | Sandiger Thonmergel mit Sandstein-Lagen | 1·00 « |
| 38. | Dasselbe mit Blattabdrücken | 1·50 « |
| 39. | Fester Sandstein mit Blattabdrücken | 1·50 « |
| 40. | Sandiger Thonmergel | 1·00 « |
| 41. | Grauer, sandiger Thonmergel mit dünner Sandlage | 6·00 « |
| 42. | Grauer Thonmergel mit dünner Sandsteinschichte | 4·00 « |
| 43. | Feinschiefriger grauer Thonmergel mit Kalkmergel-Einlagerungen | 14·10 « |
| 44. | Bituminöser Schiefer | 4·00 « |
| 45. | Sandstein-Tafel | 0·20 « |
| 46. | Dunkle bituminöse Schiefer | 6·80 « |
| 47. | 1-tes Kohlenflötz | 1·40 « |
| 48. | Zwischenmittel von fettem, weissem Thon | 0·10 « |
| 49. | 2-tes Kohlenflötz | 1·90 « |
| 50. | Zweites Zwischenmittel | 0·30 « |
| 51. | 3-tes Kohlenflötz | 1·40 « |
| 52. | Drittes Zwischenmittel | 0·10 « |
| 53. | 4-tes Kohlenflötz | 1·30 « |
| 54. | Liegender Schieferthon mit Kohlenschmitzen | 3·00 « |
| | Gesammtmächtigkeit der durchteuften Schichten | 101·80 M. |

Aus dieser Schichtfolge ist zu entnehmen: 1-tens, dass eigentlich nur ein mächtiges, durch weisse Thonzwischenlagen geteiltes, Kohlenflötz vorhanden sei; 2-tens, dass die hangenden Schichten vorherrschend aus Thonmergeln und Sandsteinen be-

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

stehen, deren häufige Wechsellagerung schon für sich allein deutlich dafür spricht, dass sämmtliche Schichten ufernahe Süsswasser- oder höchstens Brackwasser-Ablagerungen sein können. Die häufigen Blattabdrücke weisen mehr auf Süss- als Brackwasser-Absätze hin. Schade, dass die in der 18-ten Schichte erwähnten Muschelreste nicht specifisch bekannt sind, weil man aus ihnen sicherer auf die Natur der Ablagerung schliessen könnte, als blos aus den pflanzlichen Ueberresten. In den oberflächlichen Schichten des Kohlenterrains sind Molluskenreste nirgends beobachtet worden, und auch wegen diesem Umstand halte ich es für wahrscheinlicher, dass die Ablagerung unserer kohlenführenden Schichten in einem ganz abgeschlossenen Süsswassersee erfolgt war.

Damit in Verbindung, will ich noch jene Schichtgesteine kurz beschreiben, welche ich innerhalb des Kohlenterrains selbst zu beobachten Gelegenheit hatte.

In der Umgebung der Kohlengrube sieht man gelblichen oder graulichen Thonmergel mit dünnen Zwischenlagen von feinem, gelblichen Sand entblösst. Neben dem unteren Schacht wird auf der östlichen Berglehne ein weisslichgrauer, fein geschlemmter Thon abgebaut. Das unmittelbare Hangende des Kohlenflötzes ist jener bräunliche, mit Säure kaum aufbrausende Schieferthon, welcher die meisten Blattabdrücke enthält, und in welchem ich bei dem Kohlenausbisse im Veliki-Potok im Jahre 1872 sammelte, wogegen Lenz bei dem Ausbisse unterhalb der Brücke vor dem Kloster gesammelt hatte. Diesmal erhielt ich in dem Materiale, welches aus der Grube gefördet wurde, ein prachtvoll erhaltenes Blatt von *Rhamnus Gaudini* Heer.

In dem Materiale, welches aus dem Förderschachte heraufgebracht wurde, fiel mir durch sein auffallendes Gewicht ein hellbrauner sphärositischer Mergel auf, welcher aus den Kohlenschiefern stammt; ferner mit Chalcedon und krystallisirten Quarz durchdrungene verkohlte Holzstücke, welche im untersten Horizonte der Kohle vorkommen; endlich ein mürber, grobkörniger Sandstein, welcher ausser schwarzen und grauen Quarzgeröllen einzelne, etwas violette, durchscheinende Quarzkryställchen als Einschlüsse enthält.

Als das tiefste Glied des Sotzkaschichtcomplexes betrachte

ich jenen grauen oder gelblichen, dichten, ziemlich festen Kalkmergel, dessen Schichten am Cerveni breg (in der Nähe des Klosters) durch einen grossen Bruch aufgeschlossen sind, und welche mit 20—25° S. Einfallen sich an die gelben Quarzitbänke des Kula Berges lehnen.

Was endlich das geologische Profil der Vrdniker Kohlenmulde betrifft (siehe die I. Abbildung der Tafel II), welches ich, aus den Grubenaufnahmen und den oberflächlichen Verhältnissen combinirt, gezeichnet habe, ist dieses so klar und instructiv, dass man daraus auf ersten Anblick die Ausbildungs- und Entwicklungs-Geschichte der ganzen Kohlenmulde herauslesen kann. Die Sotzkaschichten haben sich aus sämmtlichen Beobachtungsdaten geschlossen, in einer kleinen buchtartigen Versenkung des südlichen Abhanges und zwar unmittelbar über den krystallinischen Schiefern, oder nördlich auch über den Serpentin, und südlich über die untertriadischen Schichten abgelagert. Diese buchtartige Einsenkung ist, wie ich dies schon einmal hervorhob, wahrscheinlich am Ende der Kreideperiode, in Folge der mit den Eruptionen von Olivingesteinen und des doleritischen Trachyt stattgefundenen Schichtstörungen und Brüche entstanden. Innerhalb dieser Einsenkung blieben jedoch einzelne kleinere oder grössere Schollen (so die aus krystallinischem Schiefer bestehenden Inseln des Vrdniker Morintovo Berges und der Umgebung des Klosters Hopovo) hängen und mussten bereits aus dem aquitanischen Binnensee hervorragen. Es ist aber auch klar, dass der ganze kohlenführende Schichtcomplex, sammt dem darüber folgenden Leytha- und Cerithiumkalke später, also wahrscheinlich gegen Ende des sarmatischen Alters, in Folge starker Gebirgsbewegung, welche sich besonders am östlichen Ende des Gebirges manifestirte, in Teile zerbrochen und stark dislocirt wurden. Die gebirgserhebende Kraft wirkte also auch in der zweiten Hälfte der Tertiärperiode sehr anhaltend in unserem Gebirge und kann man die bedeutenden Wirkungen derselben in dem Profile der Vrdniker Kohlenmulde, aber auch in den übrigen Profilen, deutlich erblicken und erwägen.

Was das Vorkommen und die Ausbildungsweise der kohlenführenden Sotzkaschichten am nördlichen Gehänge des Gebirges

betrifft, so muss ich diesbezüglich auf die früheren Mitteilungen von mir (12 und 22), von O. Lenz (14) und besonders auf jene von Boeckh und Staub (28) hinweisen, welche sie eingehend besprechen, und welchen ich jetzt nur wenig Neues hinzufügen kann. Im Jahre 1883 hatte mir Jos. Poritz, damaliger Leiter der Ledinceer Silbergrube, Proben aus den kohlenführenden Schichten des Duboki Tales bei Ledince eingesendet. Die Kohle selbst ist eine sehr schöne, glänzend schwarze, kurzklüftige Braunkohle. Das Liegende des Kohlenflötzes ist ein rostgelber Schieferthon, das Hangende aber ein hell bläulichgrauer, schiefriger Thonmergel. In beiden kamen Blattabdrücke vor, welche Prof. M. Staub bestimmte. Im hängenden Thonmergel fand sich *Taxodium distichum* Rüt., *miocenum* Heer. und *Glyptostrobus* Brgt. sp., im liegenden Thon aber *Populus latior* Al. Br.

Im Tale des Veliki-Potok von Rakovac untersuchte ich im Jahre 1893 abermals die unter dem Leythakalk liegenden, kohlenschmitzen-haltenden Schichten. Schon innerhalb des Dorfes findet man graue, gelbe, rote und bunte klüftig schieferige Thone im Bachbette aufgeschlossen, zwischen welchen bald dünnere, bald dickere Sandstein-Tafeln und Bänke eingebettet liegen. Oben sind diese gelb, weiter hinunter werden sie grau und thonig, und in letzteren fand ich Kohlenspuren in Form von Nestern und Schmitzen. Der ganze Schichtcomplex verflächt unter 25—30° gegen N. Weiter aufwärts werden die rostgelben, groben Sandsteine immer häufiger und bänkiger, und lagern schliesslich auf dem dunkelgrauen Thonschiefern der oberen Kreide.

Auch oberhalb Bukovac fand ich Ablagerungen, welche hieher gerechnet werden können. Gleich am oberen Ende des Dorfes fand ich unter den 70° gegen Osten verflächenden Schichtbänken eines kalkreichen Sandsteines, den ich mit dem Leythakalk für æquivalent halte, abwechselnde Schichten von polygenem Conglomerat und rotem Thon, welche auf dem ober-cretaceischen Sandsteine liegen und der Lagerungsreihe nach den Sotzkaschichten entsprechen. Aber noch weiter oben, am Rande des Waldes, in dem Graben, welcher bei der Quelle «Vilena voda» vorbeizieht, sieht man abwechselnde Schichten von bläulichgrauem schiefrigem Tegel, Mergelschiefer und tafeligem Sandstein mit einem Ver-

flächen von 15° NO entblösst, welche ich ebenfalls geneigt bin den Sotzkaschichten zuzurechnen, obgleich sich keine Spur von Petrefacten darin finden liess. Die Schichten liegen unmittelbar und discordant auf den stark gehobenen festen Bänken der Kreide-Sandsteine und Breccie. Ueber diese Stelle hinaus gegen Osten zu, verschwinden sämmtliche tertiäre Ablagerungen unter der Lössdecke, und kann man somit nicht wissen, ob sie wohl das östliche Ende des Gebirges als zusammenhängende Zone umgeben? Es ist aber auch nicht wahrscheinlich, dass das unter der Lössdecke geschehe, weil man in diesem Falle in dem tief eingeschnittenen Strazsilor Tale bei Karlowitz, über den daselbst sehr gut entblössten Kreideschiefern irgend welche Spuren davon finden müsste; was aber bisher noch nicht geschah. Aus diesem Grunde habe ich, abweichend von den älteren geologischen Karten, die nördliche Zone der tertiären Schichten nur bis Bukovac eingezeichnet.

J. Rochlitzer hatte in seiner Manuscript-Karte eine halbmondförmige breite Zone der Sotzkaschichten am westlichen Ende des Gebirges, von Lezsimir angefangen über Kuvezsdin und Gypša bis in die Gegend von Svilos und Grabovo eingezeichnet. Dieses Vorgehen motivirte er in seinem Berichte (25,99) damit, dass er bei Lezsimir, im Liegenden des Leythakalkes, den Vrdniker Schieferthonen und Sandsteinen ähnliche Gebilde bemerkte, Blattabdrücke in ihnen jedoch nicht fand. Ein 24 Klafter tief getriebenes Bohrloch, welches den krystallinischen Schiefer erreichte, führte ebenfalls auf keine sicheren Spuren. Ich selbst habe in dem Graben, welcher von dem aus Leythakalk bestehenden Plateau Krecsanska jama herunterzieht, also scheinbar im Liegenden des Leythakalkes, wechselnde gelbe, bräunliche und blaue Thonschichten beobachtet; aber nichts gefunden, was auf Sotzkaschichten hinweisen würde. Es können diese Thone noch zum Leythakalk gehören; es ist aber auch möglich, dass sie jünger sind, als der Leythakalk, oder gar der Terrarossa-Bildung angehört. Am nördlichen Abhang des Gebirges aber habe ich entschieden beobachtet, dass der Leythakalk entweder unmittelbar auf krystallinischen Schiefern, oder in der Umgebung von Svilos und Grabovo, auf den Kreideschichten ruht. Aus diesem Grunde kann man die

Sotzkaschichten am westlichen Ende des Gebirges nicht genügend motivirt ausscheiden und ich habe sie einfach weggelassen.

### *2. Leythakalk und Mergel.*

Der Leythakalk und damit verbunden Kalkmergel sind Ablagerungen, mit welchen sich die bisherigen Forscher am meisten beschäftigten. Die Ursache davon ist einfach die, dass die breite Zone des Leythakalkes am Abhange des Gebirges leicht zugänglich dahinzieht, dass er zu technischen Zwecken verwendbar, ringsum durch zahlreiche Steinbrüche gut aufgeschlossen ist und endlich auch die, dass er wegen seines Petrefactengehaltes das Interesse allgemeiner fesselte, als die übrigen Bildungen des Gebirges.

Die erste Angabe über Versteinerungen aus dem Leythakalk stammt noch von Sadler her, der in einer Sitzung der ungar. naturwiss. Gesellschaft am 17. Dec. des Jahres 1846, den Schädel einer ausgestorbenen Kameelart besprach, den man vor 30 Jahren in der Umgebung von Cserevic im Grobkalk fand. Dieses Fossil wäre sehr interessant und wertvoll, wenn es existirte; aber ohne es zu sehen, muss man an der Richtigkeit dieser Angabe heut zu Tage zweifeln.

Nach H. Wolf (2 und 6) ist die Grenze des marinen Leythakalkes gegen den brackischen Cerithienkalk schwer zu ziehen, weil die weissen Kalkmergel, welche er mit Stúr als Aequivalente der Cerithienschichten hielt, bei Ledince öfters mit Leythakalk wechsellagern. Nordwestlich von Slankamen, am Donauufer, beobachtete Wolf über Kalkmergel und Thonschichten des Kreidesystems (?) ebenfalls die Wechsellagerung des Leythakalks mit sarmatischen Schichten.

Nach Wolf habe ich die Leythakalkvorkommnisse des nördlichen Abhanges eingehender besprochen (3, 12 und 22). Lenz hatte besonders das durch viele Steinbrüche gut erschlossene Leythakalkvorkommen von Lezsimir beschrieben (14), wo die stark zerklüfteten Schichtbänke ein rein südliches Verflächen zeigen.

Al. Popovics hatte rings um das Gebirge herum das Vor-

kommen zahlreicher Punkte eingehend beschrieben (24) und auch deren Petrefacte aufgezählt.

Nach J. Rochlitzer (25) ist auch bei Neradin ein Steinbruch auf Leythakalk im Betriebe. Joh. Boeckh besprach das Vorkommen bei Ledince eingehender (28). Seine Beobachtungen will ich wegen deren Wichtigkeit im Ganzen wiedergeben. Bei Ledince, im Steinbruche am östlichen Gehänge des Tales, verflächen die Leythakalkschichten unter 85° nach NNO; am westlichen Gehänge aber beobachtete er sogar überkippte Schichten. Hier folgt nämlich, scheinbar im Hangenden der Lithothamniumkalkbänke, in Wirklichkeit jedoch im Liegenden, ein trachyttuffähnliches, eigentümliches, dünntafeliges Gestein, welches viel bronzefarbige Glimmerschüppchen, Feldspath- und Quarz-Körnchen (also Trachyt-Detritus) enthält.

Im Liegenden des Leythakalkes beobachtete Boeckh foraminiferenhältigen Mergel mit *Pecten cristatus*. Im Liegenden weiter folgt am Grunde des Tales gelblicher Sand, teils mit losem Sandstein, teils mit Conglomerat. In den liegenderen Teilen dieser Ablagerungen fand er zwei kalkreichere Bänke eingelagert, deren untere ebenfalls conglomeratisch war. Aus dieser zog er einen *Pecten aduncus* heraus. Also auch im Liegenden des Leythakalkes findet man hier noch ober-mediterrane Ablagerungen. In den mergeligen Schichten des Hangenden, in welchen Boeckh die sarmatische Stufe suchte, erhielt er ebenfalls ein marines Fossil, den *Pecten duodecimlamellatus*. Daraus folgt nun, dass die Auffassung Wolf's, nach welcher die über den Leythakalk folgenden Mergel sarmatisch wären, nicht gelten kann, und werde ich auch aus meinen Erfahrungen Beispiele dagegen aufführen.

In den letzten Jahren hatte ich abermals Gelegenheit die Leythakalkzone an vielen Punkten unseres Gebirges zu beobachten, und konnte somit den ganzen Verlauf derselben ziemlich genau in meiner Karte eintragen.

Am nördlichen Abhang im Osten beginnend, haben wir schon gesehen, dass die Zone des Leythakalkes bei Slankamen beginnt. Weiter gegen Westen zu findet sich bei Kercsedin, am Ufer der Donau ein grosser Steinbruch bl. 60 M. tief in dem Leythakalk. Der festere Leythakalk liegt in kleineren oder grösseren knolligen

Schollen zwischen weicheren Mergelschichten, welche wellig gebogen erscheinen. Das Verflächen ist wohl nur seicht gegen SW, die normale Lagerung ist jedoch an vielen Punkten in Folge von Abrutschungen stark gestört. Die Decke des Kalkes bildet 50—20 M. mächtiger Löss. Fossile sind eben nicht häufig; ich sammelte:

*Ostrea crassissima* Lam. ein Jugendexemplar in einer Muschelbreccie;

*Ostrea gingensis* Schloth. sp. häufig im schotterigen Grobkalke;

*Solenastrea* sp. Stöcke und auch andere Korallen häufig.

In der Umgebung von *Karlowitz* fand ich keine Spur des Leythakalkes. Nur in Bukovac, am oberen Ende des Dorfes beobachtete ich im Hofe eines Hauses einen gelblichgrauen, kalkreichen, feinkörnigen Sandstein ohne Fossilien, in Schichtbänken mit dem Einfallen von 70° nach O, welchen ich für ein Aequivalent des Leythakalkes halte.

Bei Rakovac habe ich neuestens im Liegenden des Leythakalkes, in einem Steinbruche mitten im Dorfe, rein weissen, kreideartigen Kalkmergel, ohne Fossilien beobachtet, dessen klüftigbänkige Schichten das Einfallen unter 10° nach NO zeigen. Noch weiter im Liegenden erscheint jener graue sandige, foraminiferenreiche Mergel, den ich in meinem Berichte von 1876 beschrieb (22).

Meine älteren Beobachtungen, welche ich bei Beočin, Čerevic und Bánostor gemacht habe (8 und 12) kann ich noch damit ergänzen, dass ich später bei Čerevic am Berge Sakotinac ein gut erhaltenes Exemplar von *Clypeaster crassicostatus* Ag. und Steinkerne von *Pectunculus pilosus* L. gesammelt habe.

Gegen Westen zu vorschreitend wird die Zone des Leythakalkes immer breiter und das Verflächen der Schichten dem entsprechend immer seichter. Bei *Svilos* beobachtete ich am äusseren Rand der Zone hell gelblichgrauen Mergel mit schlecht erhaltenen marinen Fossilen und Foraminiferen. Einfallen der Schichten 35° S. Weiter hinauf finden sich Bänke von gelbweissen Lithothamnienkalken eingelagert. Ich konnte von den Fossilien erkennen: *Corbula gibba* Olivi, *Ervilia pusilla* Phil., *Pecten duodecimlamellatus* Br. und Spuren von *Tellina* sp., *Mesodesma* sp., *Murex* sp.

Im Dorfe selbst kommt abermals der weisse Mergel, mit einem Verflächen von 35° NW, zum Vorschein; woraus man auf eine unter dem Dorfe dahinziehende Faltenmulde unserer Schichten schliessen muss.

Noch weiter hinauf, so auch im Tale von Grabovo, erscheinen die Talgehänge von dem kreideartigen Leythakalke weiss und die Leythakalkzone erreicht hier ihre grösste Breite.

Südöstlich von *Nestin,* tief im Walde, an der Stelle namens *Dolacsa* des *Janok dol,* ist die hier durchstreichende Leythakalkzone durch einen Steinbruch nachgewiesen. Die knolligen, sehr mürben, amphisteginahältigen Kalkbänke mit Kalkmergel wechsellagernd, fallen unter einigen Graden gegen NW ein und enthalten ziemlich häufig:

*Pecten latissimus* Brocc. Bruchstücke;
« *Besseri* Andrz. «
« *Malvinae* Dub. «
*Spondylus crassicosta* Lam. Bruchst.
*Ostrea gingensis* Schloth. «
« *cochlear* Poli.
« *digitalina* Dub.
Steinkern von *Mactra Bucklandi* Defr. (?)
*Vermetus* sp., Bryozoenstöcke.
*Amphistegina Hauerina* d'Orb.

Oberhalb dieses Fundortes, am Waldwege nach Lezsimir, fand ich am Rücken des «*Belo brdo*» unmittelbar auf Kalkphyllit lagernd, einen gelblichweissen, tafeligen Kalkmergel, welcher Eindrücke und Steinkerne einer kleinen, an *Ervilia pusilla* erinnernden Muschel enthält, welche auch bei Svilos im Tale vorkommt.

Von Nestin an umkreist die Leythakalkzone, grösstenteils unter der Lössdecke, das westliche Ende des Gebirges bei Gypsa und zieht dann als sehr schmales Band bei den Klöstern von Kuvezsdin, Petkovics und Sisatovác vorüber bis Lezsimir, wo sie sich am Bergrücken «*Krecsanska jama*» ziemlich ausbreitet, um weiter bei Gergurevce unter der Lössdecke zu verschwinden. An allen diesen Orten werden fossilreiche, öfter breccienartige Grobkalkbänke, welche unmittelbar auf Kalkphyllit lagern, in zahlreichen kleinen Steinbrüchen als Bausteine und für Kalk-

brennerei gebrochen. Das Verflächen der Schichten ist im allgemeinen flach nach S gerichtet. Ich sammelte von Petrefacten:

*Pecten latissimus* Brocc. Kuvezsdin, Lezsimir;
« *Malvinae* Dub. « Sisatovác;
« *elegans* Andrz. « «
*Pectunculus pilosus* L. Steinkern. Lezsimir.
*Venus Aglaurae* Brongt. « «
*Amphistegina Hauerina* D'Orb. Kuv. und Sis.
*Bryozoen, Cidaris*-Stacheln « «
*Lithothamnium*-Knollen, ganze Bänke erfüllt. Kuv.

Zwischen Gergurevce und Bessenovo ist die Zone des Leythakalkes unterbrochen. Am letzteren Orte, unterhalb des Klosters, tritt der Leythakalk an beiden Gehängen des Tales wieder hervor und wird am «Beli Kamen» auch gebrochen. Von hier bis Jazak zeigen sich am Fusse des Triaskalkrückens blos Spuren davon. An beiden Gehängen des Jazaker Tales zeigt er sich ebenfalls nur spurenweise; gegen Vrdnik zu tritt er jedoch immer mehr hervor und unterhalb dieses Dorfes wird der kreidige Kalk in einer Reihe von kleinen Steinbrüchen an beiden Seiten des Tales gewonnen und zum Kalkbrennen verwendet. Hier kommen sehr schöne *Pecten latissimus* Exemplare vor.

Von Vrdnik zieht die schmale Zone des Leythakalkes gegen die krystallinische Schiefer-Insel von Hopovo und diese umgebend, dann weiter nach Alt-Hopovo, von wo man sie dann über Neradin, Gergeteg bis in die Gegend des Kloster Remete verfolfolgen kann. Hier sinkt der Leythakalk endgültig unter die Lössdecke und tritt mit dem Kalke der nördlichen Zone nirgends in directe Verbindung. Aus dem mürben Leythakalke, welcher auf der Landstrasse von Iregh nach Kamenitz ansteht, habe ich ein kleines Exemplar des *Pecten latissimus* herausgezogen.

### *3. Sarmatischer Cerithienkalk und Mergel.*

Nach H. Wolf (2,160) soll der sarmatische Cerithienkalk bei Slankamen mit den oberen Schichten des Leythakalkes wechsellagern. Die darüber folgenden weissen Mergel hielt er mit Stúr und Paul als eine dem Cerithienkalke entsprechende Süsswasser-

bildung, weil er *Planorbis*-Spuren darin sah. Derselbe erwähnt auch in Remeta veliki Sarmatschichten beobachtet zu haben (6,213). K. M. Paul fand bei Semlin, in der Nähe des Radetzki-Bades am Donauufer, unter dem Löss einen Sandstein mit Eindrücken von *Cerithium pictum* oder *rubiginosum*, *Helix turonicum* und *Cardium*. J. Rochlitzer hatte an Dr. O. Lenz aus dem Rakovacer Tal grauen Thonmergel mit Molluskenresten eingesandt, in welchen R. Hörnes folgende Arten erkannte: *Cerithium pictum* Bast., *Rissoa angulata* Eichw., *Rissoa inflata* Andrz., *Cardium Suessi* Barb., *Tapes gregaria* Partsch, *Bulla Lajonkaireana* Bast.

Nach Al. Popovics (24) streichen die Schichten dieser Zone am oberen Ende von Ledince durch das Tal und bestehen aus lichten Mergeln; wir haben jedoch gesehen, dass Boeckh in diesen Mergeln noch marine Fossilien fand. Nach Popovics befand sich die angebliche Goldgrube «Perin majdan» in denselben Mergeln, welche mit gelblichen, metallglänzenden Schüppchen erfüllt sind. Es scheint mir, dass Popovics hier das durch Boeckh beschriebene trachyttuffartige Gestein mit dem Mergel verwechselt hat.

Neuerer Zeit fand ich auch in dem Steinbruch am Fassinara Berg bei Čerevic sarmatischen Kalk mit *Mactra podolica*, *Cerithium pictum* und *rubiginosum*, *Cardium obsoletum*, *Ervilia podolica* und *Trochus* sp. Schon in meinem ersten Bericht habe ich erwähnt (8), dass am Beočiner Erdell-Berg über den unter 60—70° nach N. einfallenden Leythakalkbänken conform verflächende Cerithienkalkbänke liegen. Endlich bemerkte ich am Wege vom Kloster Gergeteg zum Gebirgskamm Bänke eines groben conglomeratischen Sandsteines mit Spuren von Schnecken und Muscheln, welche an jene des Cerithienkalkes erinnern.

An sonstigen Stellen konnten im Hangenden des Leythakalkes versteinerungsführende sarmatische Schichten noch nicht nachgewiesen werden. Von Beočin an westwärts bis in das Susseker Tal und ostwärts bis in das Kamenitzer Tal folgen über den Leythakalkbänken — wie wir gesehen haben — überall hell grauliche oder gelbliche, tafelig-schiefrige Mergel, in welchen man westlich von Beočin keine Versteinerungen, auch im Schlemmrückstand nicht, bemerkt. Diese Schichten lagern, wie ich das an

einigen Stellen beobachtet habe, discordant über den bedeutend steiler einfallenden Bänken des Leythakalkes und auch des Cerithienkalkes. So sieht man vis à vis der Kirche von Beočin, in dem Einschnitte des vom Erdell-Berge herabziehenden Drenyovac Baches, die 5—16 Cm. dicken tafeligen Schichten des Mergels unter 21° NO Einfallen gut aufgeschlossen; während die Leytha- und Cerithienkalkbänke des Erdell Berges unter 60° gegen N einfallen. In dem Steinbruche des Fasinara Berges und im Cserevicer Tal am Fusse des Lippa Berges, ist dieses Lagerungsverhältniss noch deutlicher zu sehen; denn hier überlagern die gelblichweissen Mergelschichten mit 30° Einfallen direct die Bänke des Amphysteginenkalkes mit dem Einfallen von 60° N, wie ich das schon in meinem ersten Bericht (3), dargelegt habe. In den härteren Mergeln des früher genannten Aufschlusses bei Beočin erhielt ich auf den Schichtflächen Eindrücke einer an *Cyclas* sp. erinnernden Muschelart.

Ob nach diesen Tatsachen der untere Horizont der erwähnten weissen Mergel noch der sarmatischen Stufe zuzuzählen sei, das erscheint mir in Betracht dessen, dass der Cerithienkalk im Gegensatz zu den weissen Mergeln sehr wenig mächtig ist, ferner dass westlich von Beočin in diesen Mergeln sarmatische Fossilien tatsächlich vorkommen (Rakovac), ziemlich wahrscheinlich, und habe ich deshalb auch von Čerevicz an gegen Westen zu eine schmale Zone sarmatischer Schichten auf meiner Karte ausgeschieden. Weil aber am westlichen Ende des Gebirges und an dessen südlichem Abhange diese versteinerungsleeren, hellen Mergel nicht mehr auftreten, so habe ich die Zone der sarmatischen Schichten auch nicht weiter verlegt.

Wenn aber diese Auffassung richtig ist, dann ist es ganz klar: dass jene gebirgshebende Massenbewegungen, deren deutliche und ausgedehnte Spuren wir besonders in der östlichen Hälfte des Gebirges — in Form starker Aufrichtung und Zerklüftung, ja sogar Ueberkippung der jungtertiären Schichten — gesehen haben, beiläufig in der Mitte des sarmatischen Zeitalters vor sich gingen, oder wenigsten damals ihren Höhepunkt erreicht haben. Diese Massenbewegung dauerte auch später noch fort, jedoch weit nicht mehr in dem Maasse, wie zuvor.

### *4. Unter-pontischer Valenciennesien-Mergel.*

Es ist das der wohlbekannte Beočiner Cementmergel, über welchen bereits so vieles mitgeteilt wurde, dass ich diesmal nur meine neuesten Erfahrungen und besonders die auf seine Verbreitung bezüglichen Beobachtungen ganz kurz mitteilen will.

Der gelblich- oder in den tieferen Horizonten graulichweisse, stark zerklüftete, kaum geschichtete, kreideartige Cementmergel folgt über den früher beschriebenen, auch noch mit Sandsteintafeln wechsellagernden, deutlich geschichteten härteren sarmatischen Mergel in concordanter Lagerung, ja man kann sagen, sie übergehen allmählig in einander. In dem tieferen Horizonte der bedeutend mächtigen Ablagerung kommen auch Lignitspuren, oder wenigstens durch verkohlte Pflanzen dunkel gefärbte Schichten vor, auf welche man vor einigen Jahren ohne Erfolg geschürft hatte.

Die um Beocsin herum liegenden Cementfabriken gewinnen das in der Technik hochwichtige Gestein in grossen Tagbrüchen, und besonders der neben der Landstrasse, Futtak gegenüber liegende riesige Bruch der Orenstein'schen Fabrik verdient auch in wissenschaftlicher Beziehung besondere Beachtung, weshalb ich auch auf Fig. 2 dessen interessante Verhältnisse zu skizziren trachtete. Man kann aus diesem Profil ersehen, dass der eigentliche Cementmergel, welcher durch seinen Mangel an Schichtung und die starke Zerklüftung sich von den darüber liegenden jüngeren Ablagerungen scharf abscheidet, hier in Form einer mächtigen, zusammenhaltenden, festen und trockenen Wand aufgeschlossen ist, was eben einen sicherer Beweis seiner dichten und festen Beschaffenheit abgibt. Die Wände der Spalten sind glatt, aber gewöhnlich dem flachmuscheligen Bruche entsprechend etwas undulirt. Häufig erhält man kleine, ganz eigentümliche, Fingereindrücken ähnliche Bruchflächen. Die längst schon bekannten Fossilien (*Valenciennesia Reussi* Neum., *Cardium Lenzii* und *syrmicum* R. Hörn. und *Congeria banatica* R. Hörn.) sind eben nicht so häufig; aus der unermesslichen Menge des abgebauten und zerkleinerten Mergels aber gelangen doch manche schöne

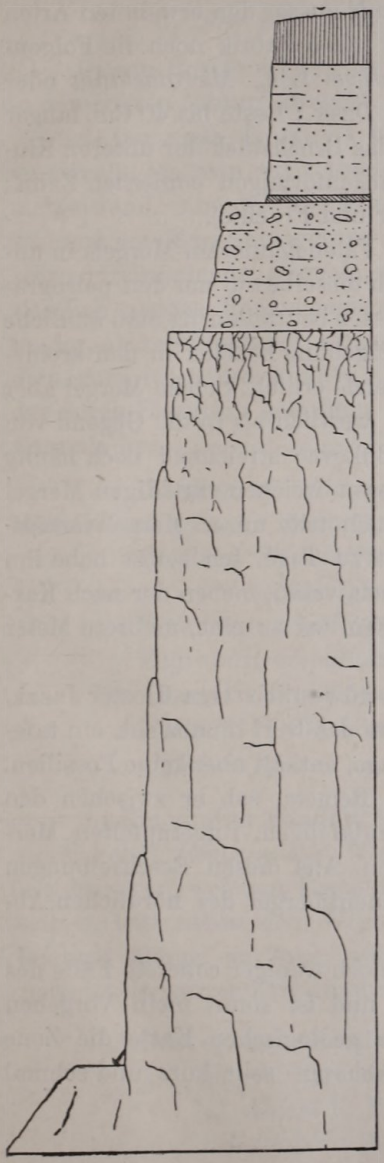

3—4 M. Löss.
10 M. Etwas geschichtete, sandig-schlammige Ablagerung, mit spärlich vorkommenden Cardien.
20 cm. Durch Eisenrost gefärbter sandiger Mergel, erfüllt mit Muschelschalen.
10 M. Sandig-schlammige Ablagerung, schwach geschichtet, mit kleinen Sandstein-Concretionen.
50—60 Meter
Zerklüftete Wand des Cementmergels. Der Mergel ist gegen das Hangende gelblich-weiss; wird hinab zu immer mehr bläulich-grau. Die Klüfte sind oben dicht und werden hinab zu immer spärlicher. Keine Spur der Schichtung ist zu sehen.

Fig. 2.

Stücke durch die Arbeiter in die Kanzlei der Fabrik, wo auch ich schöne Stücke erhielt. Es gelang mir ausser den erwähnten Arten hier und in den Brüchen der Csik'schen Fabrik noch die Folgenden zu sammeln: *Planorbis ponticus* Lör., *Micromelania* oder *Paludina* sp., *Limnaeus velutinus* Desh.; Reste bis 40 Cm. langer Fische, besonders deren Wirbel; das Bruchstück der unteren Kinlade einer Eidechse, mit einem hackenförmigen conischen Zahn; endlich verkohlte Pflanzen (Blätter und Früchte).

Was nun die Verbreitung des Valenciennesien-Mergels in unserem Gebirge betrifft, so lässt sich dieselbe nur aus den petrographischen und Lagerungs-Verhältnissen beurteilen, da man ähnliche Versteinerungen ausserhalb der Umgebung Beočins in den kreideartigen, hellen Mergeln noch nirgends erhielt. Solche Mergel aber kommen am nördlichen Abhange westlich bis in die Gegend von Susek und östlich nicht ganz bis Bukovac streichend noch häufig vor. Das serbische Volk nennt diesen weichen, kreidigen Mergel «Kaja». Am südlichen Abhang jedoch tritt unser Mergel verhältnissmässig nur sehr untergeordnet zu Tage. Ich selbst habe ihn nur in der Nähe des Klosters Remeta veliki, neben der nach Karlowitz führenden Strasse angetroffen, wo er eine, mehrere Meter hohe Wand bildet.

Nach Al. Popovics (24) tritt südwestlich vom Kloster Jazak, in dem Tälchen, welches sich gegen das Dorf hinabzieht, ein tafeliger, gelblichweisser Mergel zu Tage, enthält aber keine Fossilien. Neben Gergeteg, am Wege nach Remeta, sah er zwischen den Serpentin und Magnesiakalk dünntafeligen, rotgetüpfelten Mergel, ebenfalls ohne Versteinerungen. Aus diesen Beschreibungen erkennen wir aber kaum den Cementmergel des nördlichen Abhanges.

Andere Forscher erwähnen noch weniger concrete Fälle des Vorkommens von Cementmergel und ist somit mein Vorgehen motivirt, wonach ich auf meiner geologischen Karte die Zone unseres Mergels am südlichen Abhange sehr kurz und schmal bemessen habe.

### *5. Ober-pontische Cardium-Schichten.*

Diesen Horizont habe ich an beiden Seiten des Gebirges erst in den letzten Jahren entdeckt.

*a)* Der erste Punkt ist bei *Beočin* die Orenstein'sche Cementgrube, wo man nach Abbildung 2 im Hangenden der Cementmergelwand, eine bl. 20 Meter mächtige, gelblichgraue, sandig-schlammige Mergelablagerung finden, welche durch eine, in der Mitte durchziehende, schmale, versteinerungsreiche Lage in zwei ziemlich gleiche Bänke getrennt wird. Angeblich kommen auch in der oberen sandigen Mergelbank grosse doppelschalige Cardien vor; ich selbst konnte aber keine Spur davon finden. Aus der durch Eisenrost gefärbten Zwischenschicht stammt folgende Faunula her:

*Cardium cf. squammulosum* Desh.
kleinere und grössere Exemplare sehr häufig.

| | | |
|---|---|---|
| *Cardium Steindachneri* Brus. | ... ... | *h.* |
| « *secans* Fuchs | ... ... ... | 2 St. |
| *Valenciennesia Reussi* Neum. | ... ... | 1 « |
| *Zagrabica ampullacea* Brus. | ... ... | 2 « |
| *Planorbis Radmanesti* Fuchs | ... ... | 1 « |
| *Pyrgula Törökı* Lörenthey | ... ... | 3 « |
| *Bythinia* sp. | ... ... ... ... ... ... | 1 « |

*b)* Ein zweiter Fundort befindet sich in der Nähe des Klosters *Veliki Remeta*, am Wege nach Karlowitz. Oberhalb des kreideartigen, weichen Cementmergels, also im Hangenden desselben, tritt neben dem Wege ein etwas härterer, gelblichgrauer, tafeliger Mergel zu Tage, welcher an Versteinerungen ziemlich reich ist. In kurzer Zeit sammelte ich hier:

| | | |
|---|---|---|
| *Cardium* sp. (squammulosum Desh. ?) Bruchstücke | | *z. s.* |
| « *Mayeri* Cap. (non Hoern.) | ... ... ... | *s. h.* |
| « *cf. Abichi* R. Hörn. | ... ... ... ... | *s. h.* |
| « *ochetophora* Brus. | ... ... ... ... ... | *z. h.* |

und kleine unbestimmte Schnecken.

*c)* Ein dritter Fundort ist der grosse Leythakalkbruch am Donauufer bei *Kercsedin*. Hier zwischen den abgebauten Kalktrümmern fand ich Stücke eines durch Eisenrost stark gefärbten sandigen Mergels, welcher wahrscheinlich an der Grenze zwischen dem Leythakalk und der Lössdecke anstehend vorkommt, näher jedoch nicht aufgefunden werden konnte. Dieser Mergel enthielt die Steinkerne von *Cardium cf. squammulosum* Desh. und *Mytilus cf. apertus* Desh. in ziemlicher Menge.

*d)* Mit diesem Funde in Verknüpfung, muss ich noch erwähnen, dass mir Herr Em. Lörenthey in der paläontologischen Universitätssammlung ein dem vorigem ähnlichen rostroten Sandstein mit *Cardium cf. squammulosum* und *Steindachneri* vorzeigte, welchen Prof. Aur. Török bei Mitrovitz zwischen den Geröllen der Save gefunden hat. Möglich ist es, dass dieser cardiumhältige Sandstein ebenfalls aus der Fruscagora auf dem Wege eines Baches hieher gelangt war.

Auf Grund dieser Faunulen, deren Arten an sonstigen namhafteren Fundstellen Ungarns (Árpád, Hidas, Radmanest, Agram u. s. w.) in dem oberen Horizonte der pontischen Stufe vorkommen, stelle ich auch diese neuen Vorkommnisse in die ober-pontische Stufe. Die mittel-pontische Stufe ist bisher in der Fruscagora noch nicht nachgewiesen.

### *6. Paludinenschichten mit oder ohne Lignitflötzen.*

Ueber das Vorkommen solcher Schichten bei Cserevic habe ich zuerst berichtet (3 und 12); später hatten H. Wolf bei Karlowitz (6), D. O. Lenz (14) und Al. Popovics (24) bei dem Kloster Gergeteg und ebenfalls Dr. Lenz im Rakovacer Tale ähnliche Schichten nachgewiesen. Die von ihnen eingesammelten Petrefacten wurden von M. Neumayr * und Sp. Brusina ** paläontologisch bearbeitet.

---

* Die Congerien- und Paludinenschichten Slavoniens und deren Faunen. Abhandl. der k. k. geol. Reichsanst. Wien 1875. Bd. VII. H. 3.

** Die Fauna der Congerienschichten von Agram in Kroatien. Beiträge zur Paläontologie Oesterr.-Ungarns und des Orients. Wien 1884. Bd. III. p. 125.

Da ich aber in den letzten Jahren an diesen Fundorten — mit Ausnahme von Rakovac — neues Material sammelte und ausserdem bei Karlowitz und Veliki Remeta auch mehrere neue Fundstellen entdeckt habe, will ich über meine Untersuchungen einen kurzen Bericht erstatten.

I. An der Sohle des *Cserevicer Tales*, gleich am oberen Ende dieses Stätchens, habe ich zwischen bläulichgrauen Thon und untergeordneten Sand eingebettet bereits im Jahre 1864 zwei dünne Lignitflötze beobachtet und darüber Mitteilung gemacht (8). Die Liste der damals und später in dem Thone gesammelten Mollusken habe ich zwar schon veröffentlicht (22), jedoch war die Bestimmung nur eine beiläufige. Seitdem kam ich in Folge des Abbaues des Lignites in den Besitz eines reicheren Materiales, bei dessen Untersuchung ich auch das alte einer Revision unterwarf. Das Verzeichniss der Faunula der Cserevicer lignitführenden Schichten ist nun das folgende:

*a)* Im Hangenden der Lignitflötze, besonders an der Grenze des oberen Flötzes, kommen vor:

*Vivipara lignitarum* Neum. — — — *s. h.*
« *Fuchsi* Neum. — — — *h.*
« *cf. Suessi* Neum. — — — *s.*
« *cf. melanthopsis* Brus. — — *s.*
*Lithoglyphus fuscus* Ziegl. — — — *z. h.*
*Hydrobia syrmica* Neum. — — — *h.*
*Valvata piscinalis* Müll. — — — — *h.*
« *cf. Kupensis* Fuchs — — *s.*
*Bythinia Podvinensis* Neum. — — — *z. s.*
*Dreissena polymorpha* Pall. — — *z. h.*
*Unio Partschi* Penecke — — — — *z. h.*
« *maximus* Fuchs — — — — *z. h.*

*b)* Aus dem Thone zwischen den beiden Flötzen:

*Melanopsis lanceolata* Neum. — — — *h.*
« *recurrens* Neum. — — — *z. h.*
« *praemorsa* L. — — — — *h.*
« *Sandbergeri* Neum. — — *z. h.*

*Melanopsis eurystoma* Neum. ... ... ... *z. h.*
« *cf. ricinus* Neum. ... ... *s.*
*Nerita danubialis* Pfeif. ... ... ... ... *z. h.*
*Hydrobia syrmica* Neum. ... ... ... *s. h.*
« *acutecarinata* Neum. ... ... *h.*
*Limnaeus cf. acuarius* Neum. ... ... *s.*
*Unio Neumayri* Pen. ... ... ... ... *s. h.*
*Pisidium propinguum* Neum. ... ... *s.*
« *rugosum* Neum. ... ... ... *s.*

III. In der Umgebung von *Karlowitz* untersuchte ich an drei verschiedenen Punkten die lignitführenden Schichten.

*a)* Beiläufig eine halbe Stunde von der Stadt, im Haupttale des Strazsilor Baches sieht man im Bachbette 2 Lignitflötze entblösst. Das obere ist nur spanndünn, das untere aber, nach einer 25 Cm. dicken Thonzwischenlage, wird bis 1 M. mächtig. Stellenweise keilt sich das obere Flötzchen aus, oder es vereinigt sich auch mit dem unteren. Auf diesen Lignit wurde vor einigen Jahren ein Stollenbau betrieben, weil man aber den Lignit nicht verwerten konnte, wurde der Bau eingestellt. In dem bläulichgrauen, verwitternd gelblichen, etwas glimmerig-sandigen Thone, zwischen den beiden Flötzen, finden sich Molluskenschalen spärlich eingestreut; ich sammelte hier:

*Melanopsis cf. Visiana* Brus. ... ... *h.*
« *Sandbergeri* Neum. ... *s. h.*
« *recurrens* Neum. ... ... 1 Exempl.
« *cf. eurystoma* Neum. ... 2 «
*Neritina danubialis* Pfeif. ... ... 2 «
*Pisidium propinquum* Neum. ... *s.*
*Hydrobia syrmica* Neum. ... ... ... 2 «
*Valvata* sp. *Hydrobia* sp. Bruchstücke,
*Ostracoden.*

*b)* Südöstlich von der Stadt, bei der Mündung des Matej-Potok in die Donau, wurde 1894 eine Lignitgrube eröffnet. An den steilen Wänden des tief eingeschnittenen Grabens sieht man deutlich, dass nahe über einander 2 Lignitflötze, im ganzen etwa

1·5 M. mächtig, vorhanden seien und 3—4 M. tiefer bemerkt man auch die Spuren eines dritten, unreinen Flötzes. Die Flötze liegen zwischen gelbem, sandigem Thon; weiter unten folgt gelber, erhärteter Sand, und unter der Sohle des Grabens wurde durch Bohrung ein bläulicher Tegel erreicht. Blos in diesem fanden sich Molluskenschalen. Auf der Halde, neben dem Bohrloche, fand ich meistens nur Bruchstücke von:

*Unio* sp.
*Cardium semisulcatum* Rouss.
« *cf. simplex* Fuchs.
*Vivipara cyrtomaphora* Brus. Uebergänge in *Sadleri* und *Wolfi.*
*Lithoglyphus fuscus* Ziegl. (?)

Der Lignit selbst ist ziemlich rein, enthält viel Holzteile und Rinden, noch mehr aber verkohlte Bänder von Binsenblätter.

*c)* Noch weiter um eine Viertelstunde ostwärts, bei der Mündung des Remencsica-Grabens, befindet sich der Fundort H. Wolf's, die sogenannten «Räuberlöcher». Es waren das grosse, in der gelben mergeligen Sandwand ausgehöhlte Räume, welche aber während des Baues der Eisenbahn zerstört wurden. Aus der zurückgebliebenen 4—5 M. hohen Sandmauer konnte ich trotzdem eine ziemlich reiche Suite von Molluskenschalen in kurzer Zeit herauslösen. Es fanden sich in meiner Sammlung:

**Cardium speluncarium* Neum. ... ... *s. h.*
* « *Steindachneri* Brus. Fragm. *s.*
« *cf. Abichi* R. Hörn. ... ... 1 Fragm.
« *cf. Slavonicum* Neum. Jugendformen.
*Dreissena polymorpha* Pall. ... ... 1 Exempl.
*Vivipara Neumayri* Brus. ... ... 3 «
**Bithynia Pilari* Neum. ... ... ... *z. h.*
*Emmericia Jenkiana* Brus. ... ... 4 «
**Hydrobia syrmica* Neum. ... ... 3 «
*Planorbis Radmanesti* Fuchs ... *s.* «
*Planorbis* sp., *Valvata* sp. und
Knochenreste und Zähne von Fischen.
Ostracoden. Blattabdrücke.

NEUMAYR erwähnte hier ausser den mit Sternchen bezeichneten Arten noch: *Cardium simplex* FUCHS, *Melanopsis cf. Visiana* BRUS., *Vivipara pannonica* NEUM., *V. cyrtomaphora* BRUS., *V. Wolfi* NEUM., *Hydrobia aurita* NEUM., *H. acutecarinata* NEUM., *H. turricula* NEUM.; BRUSINA aber das auch von mir gefundene *Cardium Steindachneri*. Somit gelang es mir noch immer 8 neuere Formen an diesem Fundorte nachzuweisen.

III. Bei dem Kloster *Gergeteg* sieht man durch den tiefen Bacheinschnitt die versteinerungsreichen Paludinenschichten gut entblösst. Die Schichtbänke des rostgelben, stark glimmerig-sandigen Thonmergels lagern, flach gegen S einfallend, über bläulichgrauen, weniger sandigen Tegelschichten, und in beiden sammelte ich in ziemlicher Anzahl:

| | | |
|---|---|---|
| | *Cardium cf. Abichi* R. HÖRN. | 2 Exempl. |
| * | « *cf. ochetophora* BRUS. | 1 « |
| * | « *semisulcatum* ROUSS. | Fragm. |
| | Unio sp. (Partschi ?) | Fragm. |
| | *Dreissena polymorpha* PALL. | 2 « |
| | *Melanopsis eurystoma* NEUM. | 2 « |
| * | *Vivipara Sadleri* PARTSCH (NEUMAYR's 17. Fig.) dem Typ. nahe stehend | 4 « |
| * | Zwischen *Viv. Sadleri* und *Spurii* BRUS. Uebergangsform. | |
| * | *Viv. Spuri* BRUS. | 1 « |
| | « *Wolfi* NEUM. | 1 « |
| | Form zwischen *Viv. Sadleri* und *V. cyrtomaphora* BRUS. stehend | 2 « |
| | *Bithynia tentaculata* L. | 1 « |
| | *Planorbis* sp. | Fragment. |

NEUMAYR und BRUSINA haben ausser den mit einem Sternchen bezeichneten, in ihren oben citirten Arbeiten noch die folgenden Arten aufgezählt:

*Cardium hungaricum* HÖRN. Fragm.
« *Steindachneri* BRUS.
*Pisidium cf. supinum* A. SCHMIDT.

*Melanopsis cf. Visiana* Brus.
*Vivipara cyrtomaphora* Brus.
« *Lenzi* Neum.
« *Mojsisovicsi* Neum.
*Lithoglyphus fuscus* Ziegl.

Ich habe also ausser den bisher von hier bekannten Arten noch 6 neuere constatirt.

IV. In der Nähe des Klosters *Veliki Remeta*, unmittelbar im Hangenden des oben beschriebenen Cardiummergels, sammelte ich in einem gelblichgrauen, sandigen, mürben, lössartigen Mergel, welcher kaum geschichtet ist, folgende Arten der häufig vorkommenden Molluskenreste:

*Vivipara Sadleri* Partsch. --- --- --- 3 Exempl.
*Bythinia Pilari* Neum. --- --- --- 2 «
*Cardium Steindachneri* Brus. --- --- 3 «
« *ochetophora* Brus. --- --- 3 «
« *cf. Abichi* R. Hörn. --- --- 6 «
Unio sp. Fragmente, welche am
U. maximus erinnern.
*Planorbis micromphalus* Fuchs.

Endlich habe ich auch das Vorkommen der Paludinaschichten im Tale von Rakovac nach O. Lenz (14) in meine Karte eingetragen, obzwar wir von da keine einzige Versteinerung kennen, da diese noch vor ihrer Bestimmung zu Grunde gingen.

Was nun die stratigraphische Stellung unserer Paludinenschichten betrifft, so war Neumayr in seinem oben citirten Werke geneigt, die Schichten von Karlowitz und Gergeteg mit den mittleren Paludinenschichten Westslavoniens in Parallelle zu stellen. Da aber in diesem Horizonte bereits die verzierten Paludinen erscheinen, davon aber in der Fruscagora keine Spur vorhanden ist; da ferner hier in Gesellschaft der glatten Paludinen viele ober-pontische Arten vorkommen: halte ich es für wahrscheinlicher, dass sämmtliche bisher bekannten Paludinenschichten den unteren Paludinen-Horizont Westslavoniens repräsentieren; ja es ist sogar das nicht ausgeschlossen, dass die cardiumreichen Schich-

ten von Karlowitz und Gergeteg, welche keine Lignitflötze bergen und wirklich einen etwas tieferen Horizont einnehmen, wie die lignitführenden Schichten, sammt den früher beschriebenen Cardiummergeln noch in die oberpontische Stufe zu setzen sind. Ich habe sie blos mit Rücksicht auf ihren Paludinengehalt in diesem Capitel besprochen. Eingehenderen stratigraphischen und paläontologischen Untersuchungen bleibt es vorbehalten, diese Frage entgültig zu entscheiden.

### *7. Quarztrachyt.*

J. Rochlitzer entdeckte im Beli Potok Tale bei Jazak Gänge dieses Gesteins, welches er für Syenit hielt (25,89). B. von Inkey, dem Rochlitzer von diesem Gestein Handstücke einsendete, bemerkte sogleich, dass es unrichtig benannt wurde, entschied sich aber nicht, ob man es für einen kleinkörnigen Granit oder einen Rhyolith halten müsse (25,90). Er übergab mir daher das Gestein zur mikroskopischen Untersuchung, und ich hatte es entschieden für einen Quarztrachyt erkannt (26,142). Ich will die damals gegebene Physiographie dieses Quarztrachytes nicht wiederholen, sondern nur hervorheben, dass ich im Sommer 1894 das Vorkommen aufgesucht und mich überzeugt habe, dass die Angabe über dessen Auftreten im Ganzen richtig sei, nur dass der Trachyt nicht in Lagerform, sondern als Gang in den Thonglimmerschiefern steckt. Der obere Gang ist bl. in einer Länge von 150 M., der untere aber bl. 500 M. breit im Bachbette, gleich oberhalb der Quellen des «Vilena voda» entblösst und hebt sich mit seiner weissen Farbe von den dunkelgrauen oder rötlichen Phylliten auffallend ab. Das Streichen der Gänge durch das Bachbett ist nahezu ein südnördliches.

Ich habe aber noch ein zweites Vorkommen dieses Quarztrachytes in der Nähe von Vrdnik, am Rande der waldigen Morintovo-Anhöhe entdeckt. Die Stelle wurde mir als «Lagova» bezeichnet. Hier nämlich wurde der verwitterte, weisse, mürbe Trachyt durch einen kleinen Steinbruch aufgeschlossen. Das Gestein liegt hier unter einer 2—3 M. hohen Lössdecke und ist in dicken Tafeln abgesondert, welche unter 50° gegen SW einfallen, jedoch quer

sehr zerklüftet sind. Wenn wir es also hier mit einem Gang zu tun haben, was mir unzweifelhaft erschien, dann dürfte dieser in der Richtung NW—SO streichen. Der Aufschluss lässt dessen Mächtigkeit etwa 20 M. breit erkennen; ob er in Wirklichkeit nicht viel mächtiger sei, das liess sich an der mit Löss und Waldboden bedeckten Oberfläche nicht constatiren.

In der nächsten Umgebung dieses Trachytausbisses erblickt man auch kein anderes Gestein und weiss man also auch nicht bestimmt, zwischen welche Art von Schichten dieser Gang eingezwängt steckt? Indem jedoch im Morintovo Bache quarzitisch-krystallinischer Kalk mit Dioritschiefer aufgeschlossen vorkommt, am südlichen Fusse des Morintovo aber das Vorhandensein kohlenführender Sotzkaschichten durch Bohrung constatirt wurde: halte ich es für wahrscheinlich, dass der Trachytgang mehr in den Letzteren stecke, höchstens dass das nordwestliche Ende desselben in den azoischen Schichten hineinreichte.

Was das Alter der Eruption dieses Trachyts betrifft, so bieten die beschriebenen Vorkommnisse keine sicheren Anhaltspunkte zur Bestimmung desselben, um so weniger, da auch dessen Tuffe am südlichen Abhang noch nicht nachgewiesen wurden. Um so interessanter und wichtiger ist daher jene, durch Dir. J. Boeckh beobachtete Tatsache, dass bei Ledince, zwischen Leythakalken eingelagert, ein, Quarz, Feldspath und gelbe Biotitsschüppchen enthaltendes, tuffartiges Gestein vorkomme, welches ich, blos nach seiner Beschreibung, mit unserem Quarztrachyt in genetische Beziehung zu bringen geneigt bin. Ich halte es nicht für unmöglich, dass bei Gelegenheit der Trachyt-Eruptionen von Jazak und Vrdnik, dessen Asche bis Ledince gelangte; oder sollte auch in der Nähe von Ledince eine kleine Trachytpartie irgendwo stecken? Wenn also jene tuffartige Einlagerung wirklich von unserem Quarztrachyt herrührt, dann könnte dessen Eruptionszeit beiläufig in die Mitte des ober-mediterranen Alters hinein fallen.

### *IV. Quaternäre (diluviale) Bildungen.*

Die auffallendste Bildung ist der Löss, mit seinen weissen Schnecken und Mergelknollen-Einschlüssen, welcher in unserem

Gebirge als allgemeine Decke über sämmtliche bisher besprochene Bildungen ausgebreitet liegt, welche daher nur an denudirten Stellen zum Vorschein kommen. Seine Mächtigkeit, wie dies besonders zwischen Cserevic und Illok der Landstrasse entlang, und in der Umgebung von Karlowitz zu sehen ist, muss am Fusse und an den tieferen Gehängen des Gebirges, für sehr beträchtlich gehalten werden; auf den höheren Abhängen jedoch nimmt die Mächtigkeit seiner Decke schnell ab und an den Bergrücken zeigen sich blos zurückgebliebene Fetzen davon.

Ausser den bezeichnenden Schnecken, finden sich hie und da auch Säugetierreste darin. Im Sommer 1893 habe ich in der Leythakalkgrube bei Kercsedin, aus der Lössdecke von *Elephas primigenius* Blum. Hauerfragmente, von *Rhinoceros tichorrhinus* Fisch. einen unteren Backenzahn und von *Equus fossilis* v. Mey. Backenzähne erhalten.

An den Mündungen der grösseren Quertäler der nördlichen Seite, so besonders bei Cserevic, Beočin und Rakovac, finden sich in dem Lösse eingelagert, mehr oder minder ausgedehnte Geröll-Ablagerungen, welche durch die Bäche der betreffenden Täler, während der Diluvialzeit herabgetragen und abgelagert wurden. In einem solchen Geröllelager sind bei Cserevic vorgekommen: ein Stirnbein sammt Hörnerzapfen des *Bos primigenius* Boj. und Backenzähne von *Elephas primigenius*. Am Eingange des Beočiner Tales wird ein eben solches Schotterlager für die Orenstein'sche Cementfabrik abgebaut, und sieht man dasselbe bereits in 4—5 M. Mächtigkeit zu Tage gelegt. Das ganze Lager ist übrigens durch dünne, sandige Zwischenlagen in vier Bänke geteilt, und sieht man sowohl im Hangenden als im Liegenden typischen Löss. Ich sammelte hier eigenhändig: Zahnbruchstücke von *Elephas prim.*, Backenzähne von *Equus fossilis* und das Fragment des Unterkiefers von *Canis (spelaeus?)*

Es ist ferner bemerkenswert, dass in dem Gebiete des krystallinischen Kalkes und der Kalkphyllite der Löss diese nicht unmittelbar bedeckt, sondern eine 1—2 M. dicke Terrarossa-Lage sich dazwischen schiebt. Ob diese Terrarossa-Lage ebenfalls diluvial oder etwa älteren Ursprunges sei, dafür konnte ich keine Beweise finden.

An den beiden Enden des Gebirges, besonders in der Umgebung von Karlowitz und Illok, aber auch bei Cserevic und Beočin, kann man deutlich beobachten, dass der Löss nach unten in schlammigen Sand übergehe. In der Gegend von Karlowitz, auf der Anhöhe des Banstol und in den tiefen Wasserrissen gegen Bukowac zu, sieht man unter dem Löss den feinkörnigen Sand mit kleinen bunten Quarzschotterlagen abwechseln, ja dieser Schotter backt öfter zu einem lockeren Conglomerat zusammen. An sonstigen Orten, so besonders am Abhange des «Magarcsev breg», gegen die Donau zu, sehen wir nur gelben, schlammigen Sand unter dem Löss, und dieser übergeht stellenweise auch in etwas geschichteten sandigen Mergel, welcher mit faust- bis kopfgrossen Mergelknollen mit sehr rauher Oberfläche erfüllt sind. In diesen Concretionen fand ich sehr selten ebenfalls nur Löss-Schnecken, deshalb musste ich diese unter dem typischen Löss liegenden Bildungen noch dem Diluvium zurechnen, obgleich ihre petrographische Beschaffenheit sonst sehr an die Paludinenschichten der Räuberlöcher erinnert.

Dasselbe gilt auch für den schmutzig-gelblichen, schlammigen, an Glimmerschüppchen reichen Sand des Cserevicer Tales, in welchem häufig durch Eisenrost zusammengebackene Sandsteinknollen vorkommen, und welcher gegen Beočin zu weiter zieht. Auch dieser liegt unter dem typischen Löss, enthält keinerlei Fossilien und bedeckt die lignitführenden Schichten an der Sohle des Cserevicer Tales. Auch dieser Sand könnte eventuell der Levanteischen Stufe angehören, um so mehr, da er unmittelbar über den Paludinenschichten mit Thon wechsellagert; so lange wir aber keine entschiedenen Beweise für dessen tertiäres Alter anführen können, wollte ich ihn auf meiner Karte vom diluvialen Löss nicht abtrennen.

Bei Illok fällt unter der mächtigen Lössdecke dieser horizontal gelagerte, hell gelbliche oder grauliche, sehr glimmerreiche Sand, besonders auf der steilen Donauseite des Burgberges, noch mehr in die Augen. Ich fand darin keine Spur von organischen Resten, nur kleinere und grössere, bizarr gestaltete Sandsteinconcretionen, welche durch wenig Kalk- oder Eisenrost-Cement locker verbunden sind.

Von Illok die Donau aufwärts fahrend, kann man vom Schiffe aus gut beobachten, dass vom Wasserspiegel an bis etwa 10 M. hoch der gut geschichtete gelblichgraue Sand entblösst ist, über welchem der dunkler gelbe, verticalzerklüftete Löss die Erdwände bildet. Die schmale Sandzone sinkt aufwärts immer mehr hinunter und verschwindet bei Scharengrad entgültig unter der Lössdecke.

Man könnte diesen Sand ebenfalls in die Levanteische Stufe versetzen, wie es die Wiener Geologen, aus der Uebersichtskarte der Reichsanstalt geschlossen, factisch getan haben; ich stellte ihn aber, in Ermangelung positiver Daten, vor der Hand auch in das Diluvium.

Ich muss ferner noch bemerken, dass in der unteren Bácska, nachdem die Lössdecke hier in Folge der Denudation entfernt ist, unser glimmerreicher Sand unter den alluvialen Sumpfgebilden liegen müsse, da er ganz deutlich unter dem Donaubette gegen Norden zu fortstreicht. In der Tat wurde er bei der Bohrung des artesischen Brunnens in Zombor in bl. 11 M. Tiefe erreicht, wo er dann blos mit Unterbrechung zweier Mergelschlamm-Einlagerungen bis zum 59-ten Meter hinunter anhielt. Aus der oberen Hälfte dieser Sandablagerung kam auch hier kein Fossil zum Vorschein; nur in deren unteren Hälfte, vom 24-ten Meter angefangen, brachte der Bohrer einige Schnecken und Muscheln herauf, welche Herr Sectionsgeologe Jul. Halavács, wie folgt, bestimmte:

*a)* aus der 24-ten M. Tiefe *Vivipara* sp. ind. (*cf. Zsigmondyi* Hal.) Fragmente, und *Lithoglyphus naticoides* Fér.;

*b)* tiefer hinab brachte der Bohrer aus diesem Sande beständig Schalenreste, aber nur aus der 49 M. Tiefe auch einige bestimmbare Exemplare und Fragmente, wie: *Vivipara Boeckhi* Hal., *Vivipara* sp., *Lithoglyphus naticoides* Fér., *Unio* sp.

Wenn man auf Grund dieser Molluskenreste den glimmerreichen Sand wirklich in die Levanteische Stufe versetzen muss, so ist es klar, dass dies bezüglich des unteren Zweidrittelteiles geschehen kann; der obere Eindrittelteil kann noch immer diluvialen Alters sein. Am nördlichen Rande der Fruscagora aber, vielleicht nur Cserevic ausgenommen, kommt eben dieser obere Teil zum Vorschein.

Nach allen diesen Beobachtungen glaubte ich richtig zu han-

deln, als ich die direct unter der Lössdecke liegenden sandigen und schotterigen Ablagerungen vor der Hand zum Diluvium rechnete.

### *V. Alluviale Ablagerungen.*

Hieher gehören die verschiedenen Bodenarten, welche die Oberfläche des Gebirges bis zum Kamme hinauf, dicht überziehen, auf der geologischen Uebersichtskarte jedoch weggelassen wurden, da sonst der Bau des Untergrundes nicht zur Geltung käme; hieher sind ferner die Bachgerölle und das Geschiebe zu rechnen, welche die Sohle der etwas weiteren Täler dünn überziehen. Unter diesen alluvialen Geröllen findet man natürlich sämmtliche Gesteine des Gebirges vertreten, und sind dieselben auch ziemlich bunt. Auch solche Gesteine fanden sich, welche anstehend erst in neuester Zeit nachgewiesen wurden. Bisher konnte allein die Provenienz von Granitgeröllen noch nicht nachgewiesen werden, welche wir, Al. Popovics und ich, in den Tälern von Beočin, Rakovac, Ledince, Kamenitz und Vrdnik gefunden haben, und deren Beschreibung ich in meinen früheren Berichten (22) gab. Bei Kamenitz habe ich auch das Vorkommen von Altalluvium nachgewiesen (12,160); es ist jedoch wahrscheinlich, dass sich solches nach eingehender Untersuchung noch an mehreren Punkten des Gebirgsrandes auffinden liesse.

*

Zum Schlusse verweise ich den Leser auf die beigelegte geologische Karte und I—V Profile, welche den geologischen Bau des Gebirges klar darlegen und einer besonderer Erklärung hier nicht mehr bedürfen.

6.

# VERGLEICHENDE ANATOMISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER ANTIARIS UND ARTOCARPUS.

Von Dr. ALADÁR RICHTER,

STAATSGYMNASIALPROFESSOR IN BUDAPEST.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 20. Mai 1895 vom c. M. *Julius Klein*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIII, pp. 288—298. 1895.

Hierzu Tafel III.

Eine vorzügliche Mehrzahl der tropischen Flora gehört in den Kreis der Artocarpeen, deren Original-Exemplare ich in den botanischen Museen von München, Paris und London-Kew erfolgreich studiren konnte. Diesmal erlaube ich mir das Ergebniss meiner Forschungen — hauptsächlich über den berühmten Upas- oder Giftbaum (*Antiaris toxicaria* LESCHEN.) und den echten Brodbaum (*Artocarpus communis* FORSTER) Polynesiens, respective der Sunda-Inseln — vorzulegen.

Vom *Antiaris toxicaria* ist allgemein bekannt, dass der durch ihn in allen seinen Organen, hauptsächlich aber in der Rinde ausgeschiedene Milchsaft nach gehöriger Vorbereitung auf den (mit Pfeil) Verwundeten von tödtlicher Wirkung ist; im Uebrigen ist er selbst eine oft angewandte Arznei für innere und äussere Krankheiten und als solche ist ihm eine merkwürdige, aber zugleich traurige Rolle im Leben der Malayen zu Teil geworden. Sein urwüchsiger, 15—30 M. hoher Baum hat hauptsächlich in Java seine Heimat *

---

* Nach WIESNER sollen «auf ganz Java nur drei (?) Baumindividuen von Antiaris aus dem engeren Verwandtschaftskreise der *Antiaris toxicaria* bekannt sein, von denen aber nur einer nachgewiesenermaassen sicher *Antiaris*

und bildet mit dem *Strychnos tieuté* Leschen.[1] zusammen dessen berüchtigte Upas-Haine.

Nach Bentham und Hooker's «Genera Plantarum» gehört er im Rahmen der Urticaceen in die Gruppe der «Olmedieæ», dessen eine Haupt-Gattung der *Antiaris toxicaria* Leschen.[2] bildet, welcher einfache, wechselnde Blätter mit Stippeln, mit gemeinsamer Hülle versehene ♂ Blütenköpfchen und einsam stehende ♀ Blüten hat; seine Frucht aber ist fleischig und steinfruchtartig.

Bentham und Hooker bestimmen die Zahl der Arten wahrscheinlich — nach den im Kew-Herbarium gesehenen Exemplaren beurteilt — nach der Literatur auf 5—6; doch wären alle höchstens auf 3—4 Species zu reduciren. Im Münchener Universitäts-, im Pariser Museum, ferner in den Sammlungen Cosson's und Kew's dominiren ausser dem *Antiaris Bennetii* Seem. (Origin. im Herb. Mus. Paris) tatsächlich der *Antiaris toxicaria* Leschen. und *Antiaris saccidora* Dalz. als solche,[3] welche die vicariirende Upas-Arten von Java, respective Ceylon, also der «östlichen» und «westlichen» indischen Inselwelt bilden.

Im Auftrage des Pariser naturhistorischen Museums forschte Leschenault (1810) die naturgeschichtlichen Verhältnisse Java's und beschrieb bei dieser Gelegenheit genau den von ihm benannten Upas-Baum,[4] alle Märchen über den Haufen werfend,

---

*toxicaria* ist. Der giftige Baum, die echte *Antiaris toxicaria,* wurde von der Direction des botanischen Gartens in Buitenzorg der Cultur unterworfen und gegenwärtig wurde eine grosse Anpflanzung von Upas-Bäumen durchgeführt. Sowohl im botan. Garten selbst, als auch in einer Dependance derselben gedeihen zahlreiche Exemplare dieses Gewächses.» Nach Refer. Hanausek's im Botan. Centr.-Blatt 1895. p. 136—7. Die Originalabhandlung Wiesner's war mir leider unzugänglich. (Nov. 1895. Bei der Ergänzung dieser Abhandlung.)

Die Angaben Wiesner's scheinen mir jedoch bedenklich zu sein. Vide: Lewin, Pfeilgifte, 1894. p. 93, 94 etc. Auch in Cochinchina!

[1] Upas-Strauch, aus der Familie der Loganiaceen, ist lianartig.

[2] «Tjettek» oder «Tschettek» bei den Malayen. — Mém. sur le Strychnin tieuté et sur l'Antiaris. Ann. du Mus. Paris, XVI. 1810. p. 470. — Antiaris toxicaria = Antjar, sein Name auf Java.

[3] Die übrigen (?) Arten des Antiaris habe ich weder in obgenannten Orten, noch in den Herbarien Genf's, London's und Bruxelles' gefunden.

[4] Annales du Mus. Paris XVI. 1810. p. 478. t. 22.

welche Försch (1776), Chirurg aus Batavia, und nach ihm andere verbreiteten.

Sein Originale* bewahrt das genannte Institut selbst. Durch das ehrende Vertrauen Prof. Bureau's in Paris konnte ich Leschenault's Original-Exemplare auch studiren; in München aber die lebende Pflanze, welche Prof. Goebel von seiner Reise aus Java brachte.

Die hohen Zellen der oberen Epidermis der Blätter bilden mit seltener Ausnahme eine Zellenreihe. Das Bild der Oberfläche weist in Folge von «*cystolithartigen Ablagerungen*» hie und da trübweissliche Zellengruppen auf, welche von den ähnlichen «*verschleimten Zellen*» bei der blossen Uebersicht schwer zu unterscheiden sind (Epidermis mucigera. — Taf. III. Fig. 1*a*.).

Ihre Spaltöffnungen sind rundlich-oval. Die einzelligen und characteristisch gegen die Fläche des Blattes gebogenen sogenannten «*Cystolith-Haare*» der Blattunterfläche *bilden ein generisches Merkmal* (Taf. III. Fig. 1*c*.). Die in die niedere Zellenreihe der Epidermis gebettete Basis ist in Folge successiver Verkieselung geschichtet; in Jodlösung bleibt sie unverändert, mit Jodlösung und conc. Schwefelsäure hingegen färbt sie sich bläulich und zeigt nebst der Schichtung eine dickwandige Schale. Derartige Gebilde sind — wie Sachs'sches Verfahren bestätigt — gänzlich verkieselt und verursachen die Rauhigkeit der Blätter. (Taf. III. Fig. 4.). Die, die Artocarpeen allgemein kennzeichnenden Drüsen-Haare sind auch hier aus einzelligen Stielchen und mehrzelligen, kugelförmigen Köpfchen gebildet (Taf. III. 1*b* u. 5.). Das bifaciale Blattgewebe bildet einigermaassen den Uebergang zum centrischen Blattgewebe-Gebilde, im Übrigen ist es mit der Dicke des Schwammparenchyms übereinstimmend; die beiden zusammen aber — eben wie bei den Soroceen — sind schmal, daher sie in die Kategorie der weniger fleischigen Blätter gehören. In ihren einreihigen Pallisaden sind hie und da, von den Nachbarpallisadzellen durch ihre Grösse und durch ihren an Gerbstoff reichlichen rötlich-braunen Zelleninhalt unterschiedliche Pallisadzellen. Gleichfarbige und mit ähnlichem

---

* Trécul: Annales Scien. Natur. Sér. III. Tom. VIII. 1847. p. 143. — Ann. Mus. Paris l. c.

Inhalt versehene Zellen in den an Krystalldrusen reichlichen Begleitparenchym der Gefässbündeln. Die stark hervortretenden Gefässbündeln sind von beiden Seiten mit Sklerenchymbögen befestigt; dagegen sind die kleineren durchgehend, d. h. ihr dünnwandiges Parenchym berührt die Ober- und Unterfläche des Blattes gleichmässig (sogen. durchgehende Nerven). Die bei den Artocarpeen nach Entwickelung und Beschaffenheit übereinstimmenden Milchröhren verbreiten sich auch beim Antiaris hauptsächlich im Laufe der Adern, in der Rinde der Achse und im Markgewebe. Ihr Inhalt färbt sich in Jodlösung gelblich, verändert sich aber weder in erwärmtem Alkohol, noch Benzol oder Chloroform.*

Im Kreise der Artocarpeen kann der, in der mittleren Zone der Primär-Rinde auftretende Collenchym-Ring charakteristisch sein (Taf. III. Fig. 6*e*.); ferner das, dass die die Epidermis der Achse unmittelbar berührende Korkrinde stark sclerotisch ist. Ihre weisswandigen und stark strahlbrechenden Hartbastzellen gruppiren sich locker, ihren Gefässbündeln aber folgen reichlich die Krystalldrusen (Taf. III. 7*c*.). Ihre Libriform ist einfach getüpfelt, die Sclerenchymzellen aber haben im Allgemeinen sich von Innen ablösende Lamellen. Ausser ihrem untergeordnet ausgebildeten Holzparenchym sind die breiten Holzgefässe hervorzuheben, deren Einzelne sich in radialer Reihe anordnen, übrigens mit ovaler Oeffnung in einander münden (ovale Gefässdurchbrechung); ihre Seitenwände sind mit Hoftüpfeln versehen, dagegen dort, wo sie sich mit den 1—2-reihigen Markstrahlen berühren, mit einfachen Tüpfeln (Taf. III. Fig. 7*a*.).

Im Gegensatze zu *Antiaris toxicaria* ist *Antiaris saccidora* Dalz. (Habit. Mont. Nilghiri et Kurg. Coll. Thomson. Herb. Ind. Orient. Hook. fil. et Thomson. — Ex herb. Monac. et Cosson, Paris) kaum zu unterscheiden.** Ihr anatomischer Unterschied besteht darin, dass in der Epidermis der Blattunterfläche des *Antiaris saccidora* 2—3-zellige, mit Krystalldrusen gefüllte Krystallnester zu finden sind; ihre Spaltöffnungen aber sind oval (Taf. III.

---

* Nach den, an Prof. Goebel's Pflanze aus Java, gemachten Untersuchungen.

** Quasi forma *leiophylla* Antiaris toxicariæ.

Fig. 3.). — Merkmale, die einen relativen Wert haben, ob wir nun Holzner's oder Böhm's Hypothesis annehmen.[1] Das Vorkommen der Krystalle — wofern sie nicht entwickelungsgeschichtlich erwiesen sind — können bekanntlich auch aus physiologischen Gründen keine grössere Rolle spielen, als solche, die die Arten, d. i. den westlichen *Antiaris saccidora* vom östlichen *Antiaris toxicaria* streng trennen könnte. Ob Kurz's Auffassung richtig ist, der die Beiden auch phytographisch mit einander vereinigt hatte,[2] ist immerhin eine Frage (vide «Clavis analyt.»).

*Antiaris innoxia* Blume (in Rumphia p. 172. t. 54. — Trécul l. c. p. 144. Miqu. Ind. Batav. I. pars 2. p. 292) steht jedenfalls entfernter, welchen Hooker[3] mit *Antiaris toxicaria* vertauscht; andere wieder irrtümlich als Synonym mit *Antiaris saccidora* zusammenziehen.[4] Sein characteristischer Synonym ist: *Antiaris dubia* Spanoghe (in Linnæa XV. p. 343), welchen selbst Trécul[5] nicht kannte; seine aus Ceylon[6] gesammelten Exemplare habe ich auch nur in Cosson's Herbarium in Paris gesehen (Thwaites, Nr. 2231), aber nicht im Pariser Museum d'Histoire Naturelle und — was auffallend ist — in Kew auch nicht. *Antiaris innoxia* Bl., dessen Milchsaft angeblich unschädlich wäre, unterscheidet sich schon durch die rauhere Betastung seiner Blätter von *Antiaris toxicaria*, *A. saccidora* und *A. Bennettii*. Die Erklärung dessen finden wir in der Incrustation der Gewebe-Elemente, weil die untere Epidermis — ausserdem, dass die obere und untere Epidermis Krystalldrusen, die obere sogar cystolithartige Ablagerungen enthalten (vide *A. toxicaria*) — dicht (die Obere vereinzelt) mit langen, einzelligen und dickwandigen Haaren besetzt sind, die in Folge ihrer $SiO_2$-Incrustation sehr gebrechlich und an den Herbarium-Exemplaren

---

[1] Haberlandt: Physiolog. Pflanzenanatomie. 1884. p. 339.

[2] Hooker: Flora of British-India. 1890. p. 538.

[3] Comp. botan. Magaz. p. 11. tab. 51.

[4] Herbarium de Cosson, Paris.

[5] Trécul, l. c. p. 144.

[6] «Einer dieser Bäume («Antiaris toxicaria», vide pag. 128 sub* wurde von Greshoff untersucht, wobei sich herausstellte, dass sein Milchsaft gänzlich unschädlich ist. Dieser Baum gehört daher — nach Wiesner l. c. — zu *Antiaris innoxia*.»

selten unversehrt zu finden ist. Dies ist der Einzige unter den mir zur Verfügung gestandenen vier Antiaris-Specien, an dem ich — möglich wegen des geringen Materials — gekrümmte Cystolithhaare nicht constatiren konnte.

In der Literatur wird *Antiaris Bennettii* SEEM., dessen Milchsaft die Bewohner der Fidschi-Inseln angeblich zur Vergiftung ihrer Pfeile benützen, — nur vereinzelt erwähnt.[1] LEWIN, der die Pfeilgifte zum Gegenstand eines historischen und experimentellen Studiums machte, sah *A. Bennettii* nicht; das Pariser Museum d'Hist. Naturelle bewahrt die von SEEMANN 1860 auf den Fidschi-Inseln gesammelten Original-Exemplare,[2] und ich hatte die Gelegenheit (1892.) diese, sowie die Exemplare der Astrolabe-Expedition eben im Pariser Mus. d'Hist. Naturelle zu studiren.

Die Histiologie der Blätter des *Antiaris Bennettii* SEEM. (Orig.) unterscheidet sich von den drei Anderen in erster Reihe dadurch, dass das Gewebe rein bifacial ist, seine Pallisaden sind sogar locker, und im ganzen Mesophyll konnte ich gar keine Spur von gerbstoffhaltigen Zellen finden; jedoch den Character des Antiarisgenus bezeugen ausser den ungegliederten Milchröhren die mit $SiO_2$ incrustirten Cystol. Haare (Taf. III. Fig. 2.), die Krystalldrusen-Gruppen der unteren Epidermis und die schon beschriebenen Drüsenhaare. Cystolithen-Ablagerungen fand ich nicht.

Meine Untersuchungen erweiterte ich — soweit das mir zur Verfügung stehende geringe Material und die Rücksicht auf den Wert der Originale es erlaubte, — auch auf die Achsenanatomie der benannten Species und überzeugte mich davon, dass dieselbe mehr den generischen Character aufweist und höchstens die chemischen Eigenschaften des Inhalts zur Characterisirung der Species dienen können (vide Clav. analyticam).

In dem aus dünnwandigen Zellen bestehenden Marke (der Achse) des Antiaris (im Allgemeinen) ziehen sich der Länge nach ungegliederte Milchröhren;[3] die Zellen enthalten oft Krystall-

[1] L. LEWIN: Pfeilgifte. — Berlin, 1894. pag. 138.

[2] No. 449. — Viti or Fiji Islands. Collected by Dr. B. SEEMANN.

[3] Ihre Verzweigungen endigen blind! — Vergleiche DE BARY: Vergl. Anatomie der Veget. Organ. 1877. p. 199. HABERLANDT: Physiolog. Pflanzenanatomie, 1884. p. 224.

drusen (Taf. III. Fig. 8. *a.* u. *c.*). Seine Markstrahlen sind schmal und bestehen aus 1—2 Reihen. Seine Gefässe sind breitlumig und münden mit einfachen ovalen Oeffnungen ineinander. Seine Holzprosenchymzellen sind im Verhältnisse der Dicke der Wände weitlumig, so auch die mit Krystalldrusen und ungegliederten Milchröhren begleiteten Hartbastfasern der Rinde, die — mit von Innen loslösenden Lamellen — lockere Gruppen bilden. In der ebenfalls mit Milchröhren versehenen Primärrinde ist der *intermediäre Collenchymring* characteristisch für das Genus, welcher — unabhängig von dem subepidermoidalen Collenchym — bei *Antiaris Bennettii* besonders schön entwickelt ist und einen geschlossenen Ring bildet.* Die gelbbraunen Korkzellen sind stark verdickt und bilden ebenfalls einen continuirlichen Ring unter der Epidermis, aus deren Zellen sie sich entwickelten (Taf. III. Fig. 6.). Ueber die Letzteren ist einzig *Antiaris Bennettii* fraglich, da ich die Sclerosirung der Korkzellen an seinen zu jungen Aesten mit Sicherheit nicht constatiren konnte, und möglich, dass den Mangel derselben der so schon stark entwickelte Collenchymring ersetzt.

Gerbstoffhaltige parenchymatische Zellen sind in der Rinde und im Marke des *Antiaris saccidora* und *Antiaris innoxia* (Taf. III. Fig. 6.*b.*); bei *Antiaris toxicaria* nur im Marke, während *Antiaris Bennettii* (wie bei den Blättern) davon gar nichts enthält.

Im Unteren gebe ich die analytische Tabelle der behandelten Arten.

## Antiaris Leschenault.

Mém. sur le strychnin tieuté et sur l'Antiaris. Annales du Mus. Paris, 1810. p. 470. — Rob. Brown, General remarks, p. 70. — Blume, Rumphia, p. 56 et 172. — Bennett in Horsfield Plant. javan. rar. p. 52. — Trécul, Annales Sc. Natur. Sér. III. Tom. VIII. 1847. p. 143. fig. 158—62. etc.**

Obere Epidermiszellen des Blattes hoch und quadratisch im Querschnitte, stellenweise zweischichtig, mit schwach gewellten

* Bei *Antiaris saccidora* und *innoxia* ist dies in Folge der starken Lichtbrechung seiner Zellenwände in der Masse der Gerbstoff-führenden braunen Zellen auffallend.

** Das Referat über meine Abhandlung im Botan. Centr.-Bl. Bd. LXIV. Nr. 5. (Sitzungsberichte der botan. Section der k. ung. Naturw. Gesellschaft zu Budapest, 13. II. 1895) 1895. p. 156. ist unrichtig.

Seitenrändern. Epidermis mucigera. Die unteren Epidermiszellen kleiner, auch mit ± schwach gewellten Seitenrändern. Spaltöffnungen rundlich-oval, ohne Nebenzellen. Krystalldrusen-Gruppen überhaupt in der unteren Epidermis.

Einzellige, äusserst dickwandige und verkieselte, sogenannte Cystolithen-Haare, die characteristisch oft gegen die Blattfläche gekrümmt sind (except. *A. innoxia* Bl.). Kugelige Drüsenhaare mit kurzem einzelligen Stiel und wenigzelligen Köpfen.

Blattbau bifacial, mit Neigung zum centrischen Bau (except. *A. Bennettii* Seem.). Pallisadengewebe einschichtig. Das Schwammgewebe besteht zum Teil aus pallisadenzellenähnlichen Zellen (excl. *A. Bennettii*). Die Gefässbündel werden von Krystalldrusen begleitet und sind beiderseits mit Sclerenchym versehen. Die kleineren Gefässbündel mit dünnwandigen Elementen durchgehend. Gerbstoffartigen Inhalt enthaltende Zellen im ganzen Mesophyll (except. *A. Bennettii*). — Ungegliederte Milchröhren überhaupt in der Umgebung der Gefässbündel. Einzelkrystalle wurden nicht beobachtet.

Achse: Markzellen dünnwandig, Krystalldrusen enthaltend; ungegliederte Milchröhren. Markstrahlen 1—2-reihig und schmal. Holzgefässe breitlumig, einzeln oder zu Wenigen in radialer Richtung angeordnet; einfache, ovale Gefässdurchbrechung. Holzparenchym untergeordnet. Holzprosenchym mässig dickwandig, ziemlich weitlumig und einfach getüpfelt.

Die Hartbastfasern bilden lockere Bündel, deren Zellen weitlumig sind, mit ablösenden inneren Lamellen. Krystalldrusen; ungegliederte Milchröhren. Collenchymring in Mitte der primären Rinde. Kork entsteht unter der Epidermis; allseitig stark verdickt.

Zellen mit kirschbraunem gerbstoffartigen Inhalt in der Rinde und im Mark (except. *A. toxicaria* pro parte und *A. Bennettii*).

## Clavis analytica.

Blattbau mit Neigung zum centr. Bau. Schwammparenchym aus pallisadenzellenähnlichen Zellen. Gerbstoffhaltige Zellen im Pallisadengewebe und im Begleitparenchym der grösseren Gefässbündel ..... ..... ..... 1

Blattbau rein bifacial und nur chlorophyllführend. Gerbstoffhaltige Zellen weder im Mesophyll, noch in der Achse ..... ..... ..... ..... *Antiaris Bennettii* Seemann. Origin. l. c. No. 449. im Pariser Naturhist. Museum. — *Fidschi-Inseln.*

1. Gerbstoffhältige Zellen auch in der primären und secundären Rinde und im Mark der Achse ..... 2

Solche nur im Mark der Achse. Krystalldrusen in der unteren Blattepidermis der Gefässbündel; in der Oberen cystolithenartige Ablagerungen ohne Haare: *Antiaris toxicaria* Leschen. Origin. l. c. Im Pariser Naturhist. Museum. — *Java.* — [Sumatra occid. in Priamam, collect. Diepenhorst, in distr. Kotanopan, ad Surumantigi: Teysman. — Borneo, Philippin, Celebes, Ceylon. Malay Isl. — nach d. Literatur. — Exemplare sah ich aus Java, von Dr. Welwitsch, Iter Angolense No. 2553. Mus. Paris — u. Flora of Birma. Kurz. No. 1491. Herb. Monac.]

2. Lange, einfache, einzellige, dickwandige und verkieselte Haare (ohne Cystol.-Masse) auf den Nerven häufig (quasi trichophylla). Sogenannte Cystol.-Haare nicht vorhanden! Krystalldrusen-Gruppen und cystol.-artige Ablagerungen in den oberen und unteren Epidermiszellen. Milchsaft unschädlich ..... *Antiaris innoxia* Blume, in Rumphia, p. 172. t. 54. — Trécul l. c. p. 144. — Miquel, Ind. Batav. I. pars 2. p. 292. — (Syn. *A. toxicaria* Hook. in Comp. botan. Mag. p. 11. tab. 51. — non Leschen. — *Ant.*

*dubia* Spanoghe, in Linnæa, 1841. XV. p. 343. No. 732. — Arbor toxicaria femin. Rumphia Herb. Amb. II. p. 264. — *Antiaris saccidora* pro syn. in Herb. Cosson ist unrichtig.) — Habit. in *Ceylon.* Thwaites, No. 2231. Herb. Cosson in Paris. — [Timor, circa Kupaag et in Celebe. Apud. Trécul l. c. spec. ignota. — Celebes? apud Miquel l. c.]

Einfache, stark verdickte, einzellige, sogenannte Cystolithenhaare auf den Nerven (vide Taf. III. Fig. 4.).

Cystol.-Einlagerungen * und Krystalldrusen-Gruppen so wie bei *Antiaris innoxia* ..... ..... *Antiaris saccidora* Dalz. — Habit. Mont. *Nilghiri et Kurg.* Reg. trop. Coll. G. Thomson. Ex herb. Ind.-Or. Hooker fil. et et Th. Herb. Cosson, in Paris und in Herb. Monac. — (Malabar, Concan, Ind.-Orient. Coll. Stocks, Law. — in Herb. Mus. Paris.)

Nach bisherigen Beobachtungen kann O. Kuntze,** — der bei Speciesbenennungen als Sonderling bekannt ist, — grösstenteils Recht haben, dass die bisher beschriebenen, aber von den Autoren der tropischen Flora so oft confundirten Arten: — 1. *Antiaris* (*Ipo* Pers. 1807) *toxicaria* Leschen., 2. *A. saccidora* Dalz., 3. *A. Bennettii* Seem., 4. *A. innoxia* Blume, 5. *A. macrophylla* R. Br., 6. *A. rufa* Miqu., 7. *A. palembanica* Miqu. — nahe verwandt und beinahe Glieder eines «localen Formenkreises» (sens. ampl.) sind. Die vorgetragenen Details und die bisherigen Erfolge der anato-

---

* Durch Schwefelsäure gelöst, scheiden sich — ohne heftigere Gasentwickelung — Gypsnadeln in der Flüssigkeit aus.

** O. Kuntze: Genera Plantar. p. 628—29.

mischen Untersuchungen, — mit Bezug auf die verwandten Arten, deren Lebensbedingungen auch übereinstimmen, — sprechen dafür.

*

Von den bis jetzt bekannten, beiläufig 40 Arten der Artocarpeen ist der gewöhnliche Brodbaum: *Artocarpus communis* Forster (Syn. *A. incisa* L. fil.) jedenfalls der interessanteste, dessen 2—3 Pfund schwere, an Grösse einem Kopfe gleichende und an Stärke reichhaltige Scheinfrucht — geröstet von den Bewohnern Polynesiens als Brod gegessen wird.

Unter den Artocarpeen des Herbariums des Pariser «Jardin des Plantes» (Museum d'Histoire Naturelle) bemerkt ein inedirtes Manuscript über diese Art folgendes:

«*Arbor ad 50-pedum altitudinem excrescens, in insulis Moluccis et Polynesia tropica indigena, per varias orbis regionis calidiores propagata.*

*Varietas fructu apyreno* [var. *apyreno-carpa* A. Richt. Sitzungsberichte der k. ung. Nat.-wiss. Gesellsch. Budapest, 11. Apr. 1894. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XII, p. 405; Bot. Centr.-Bl. Bnd. LX. Nr. 6. p. 169.] *ex insula Taïti orta, Anglorum cura anno 1793 in insulas Antillanas introducta, in Brasilia nunc etiam plantata, v. c. prope Bahiam* etc. (In Herb. Mus. Natur. Paris.)»

Eigentümlich ist es, dass — während schon in der Linné-schen Encyclopädie: Band III. pag. 207. als Auctor der Artocarpus-Gattung Forster benannt wird, die als erste Art dieser Gattung beschriebene und gezeichnete *Artocarpus communis* Forster, trotz ihrer grossen geographischen Verbreitung und ihres Prioritätsgesetzes überall unter dem Namen *Artocarp. incisa* Linné fil. bekannt ist.

Georg Forster's 1784 erschienenes * und heute schon sehr seltenes Büchlein «Vom Brodbaum» befasst sich eingehend und einzig mit dem echten Brodbaume, wie dies Linné filius — abgesehen von dem unten auszuweisenden Zeitalter — überhaupt nicht tat. Auf der ersten Seite des Werkes ist ein Blatt des echten

---

* Georg Forster: Geschichte und Beschreibung des Brodbaums. — Programm. Cassel. 1784. 4. pag. 47. tab. 2. Hessische Beiträge. Not. I. pp. 208—232. et p. 384—400.

Brodbaumes in verkleinerter Form abgezeichnet, von dem je ein Forster'sches Original-Exemplar in den Universitäts-Herbarien Münchens [1] und Göttingens heute noch aufbewahrt wird.

Otto Kuntze bestreitet in seinem mit Ameisenfleiss geschriebenen Werke: Revisio Generum Plantarum [2] vom allgemein angenommenen Zeitpunkt Linné's 1753 hinaus rückwirkend, die Priorität des *Saccus* 1741. (inclus. Soccus) Rumph, Herb. Amb. I. p. 104—115. t. 30—34. — gegen die generische Befugtheit des *Artocarpus* Forster Charact. gener., p. 101. t. 51. 1776.

Die unglückliche Auffassung O. Kuntze's ist allgemein verurteilt worden; indem es zu ersehen ist, dass er mit seiner ad infinitum gemachten und weit vor das Linné-Zeitalter reichenden Zeitrechnung alles nur darum zerstört, um die von älteren Auctoren gut, ich könnte sagen musterhaft, beschriebenen Pflanzen umzutaufen und legionsweise seine Signatur: O. K. hinzusetzen, wie z. B. *Saccus communis* O. K., welches nur ein missglücktes Synonym für *A. communis* ist.[3] Nach der Palme eines so billigen Ruhmes strebt selten Jemand und es ist ganz richtig, dass die Botaniker über dieses Verfahren — trotz den vielen richtigen Bemerkungen O. Kuntze's — den Stab brachen.

Es ist wahr, dass unter den drei — im Jahre 1776 publicirten Gattungsnamen: 1. *Artocarpus* Forster, 2. *Radermachia* Thunb., 3. *Rima* Sonnerat, — *Artocarpus* allgemein benützt wurde und mit Recht; denn sein Auctor Forster hat mit seinen vielen Arbeiten zur Kenntniss der oceanischen Flora grosse Verdienste erworben und er war auch der Beschreiber der Gattung [4]

---

[1] Durch die Güte meines gewesenen Meisters Prof. Dr. Radlkofer in München, konnte ich selbe untersuchen. — Die vorliegende Abhandlung ist als vorläufige Mitteilung über die Anatomie der Artocarpeen (et Conocephaleen) zu betrachten.

[2] Pars II. (1891.) p. 628—9.

[3] *A. communis* Forster 1776 = *Rademachia incisa* Thunb. 1776 = *Art. incisa* L. fil. 1781, wäre nach O. K. richtiger = *Saccus communis* O. K. 1891! und vergisst, dass so der Linné fil.'sche Name auch berechtigt wäre.

[4] Forster, Johann Reinhold et Georg Forster: Characteres gener. plantarum, quas in itinere ad insulas maris australis collegerunt, descripserunt, delineaverunt annis 1772—75! London, 1776.

Forster, Georg: De plantis esculentis insularum oceani australis commentatio botanica. — Berolini 1786. 8. p. 53.

und später der Monographie des Brodbaumes[1] 1775, respective 1784.

In dieser Hinsicht irrten sich auch hervorragende Auctoren; so ehemals HOOKER,[2] später ENDLICHER[3] etc. Dagegen bewerkstelligen BENTHAM und HOOKER die nötige Correctur im Genera Plantarum:[4]

»Genus ab auctoribus Linnæo tribuitur, nunquam tamen a Linnæo patre editum fuit, sed a Linnæo filio in Supplemento sub p. 61. post Forsterum sub n. 1246 receptum!»

Linné filius hat den FORSTER'schen Gattungsnamen adoptirt und er selbst citirt Rumph Herb. Amb. I. 1741., t. 32—33., jedoch THUNBERG's Speciesnamen hinzufügend.[5] So kam der Name *Artocarpus incisa* L. fil. irrtümlich in allgemeinen Gebrauch[6] und ist somit zu ersehen, dass die Rehabilitation von *Artocarpus communis* FORSTER ohne Einwendung durchgeführt werden muss.

Das FORSTER'sche Original habe ich mit solchen Exemplaren verglichen, welche von MARTIUS *brasilianischer* Reise (cult. in Provinc. Paraënsis), aus *Mexico* (l. KARVINSKI), von der *Insel Mauritius* (leg. SIEBER, herb. Fl. Maurit. No. 46) und aus *Jamaica* (leg. KARVINSKI, 1827) im Münchener Univ.-Herbarium (Herb. Monacense) aufbewahrt sind. Das Ergebniss meiner, an dem vorhandenen Material gebrachten Forschungen habe ich später auch an den Pflanzen *Java's* (Herb. Cosson in Paris), *New-Kaledoniens* (Balansa, No. 3233, in Herb. Mus. Natur. Paris) und *Taïti's* (Lépine, 1847. Herb. Mus. Natur. Paris) bestätigt gefunden.

Die histiologische Beschaffenheit des Blattes des *Artocarpus communis* ist kurz die folgende (Taf. III. Fig. 9):

Die polygonalen Zellen des oberen Hautgewebes sind im Querschnitte mehr-weniger hoch, bilden eine Zellenreihe und ihre Seitenwände sind gerade. Sogenannte «epidermis mucigera» ist nich

---

[1] Vide l. c. — pag. 138. sub *.

[2] HOOKER: Botanic. Magas. t. 2869.

[3] ENDLICHER: Genera Plantar. 1836—40. p. 281. No. 1868.

[4] Vol. III. p. 376.

[5] *Radermachia incisa* THUNB. 1776. Act. Holm. XXXVI. (1776.) 252.

[6] So z. B. ZIPPEL-BOLLMANN: Ausländische Culturpflanzen etc. — EMERY: La vie végétale und in den Lehrbüchern.

vorhanden. Die Zellen des unteren Hautgewebes sind niedriger, übrigens so wie die des oberen Hautgewebes; ihre Spaltöffnungen haben keine Nebenzellen und stimmen nach Form und Beschaffenheit mit den übrigen Stoma's der Artocarpeen überein. Ihre Haarbildungen sind verschieden (Taf. III. Fig. 9), u. zw.:

1. Einfache, einzellige, verkieselt-dickwandige Trichome. Neben den Hauptadern:

2. Einfache und lange Haargebilde mit engen Lumen. 3. Kurze, dickwandige und stumpfe, und 4. einfache, warzige, sogenannte Hackenhaare auf dem unteren Hautgewebe.

5. Schildhaare, welche — characteristisch — trichterförmig in die Zellen der oberen Epidermis eingesenkt sind; sie bestehen aus vierzelligen verflachten Köpfchen auf einzelligen kurzen Stielen.

Das Gewebe der Blätter ist bifacial. Die Pallisadenschichte besteht aus einer Zellenreihe; jedoch eine viel dickere Schichte wird durch das Schwammparenchym — mit grossen Intercellular-Räumen — gebildet, in dem man auffallend grosse, rundliche Secretzellen in zwei- oder mehrfachen Gruppen findet, — Harzzellen, deren Inhalt sich in Alkohol löst. Schon die Emulsion der Blätter verrät, dass die ungegliederten Milchröhren im Blattparenchym überhaupt in der Umgebung der Gefässbündel durcheinander ziehen, derart, wie dies schon bei den Urticineen etc. — auf Grund der Untersuchungen DE BARY's, TRÉCUL's, VAN TIEGHEM's bekannt ist.* Die grösseren Bündel sind mit Sclerenchym und beiderseits stark entwickeltem Collenchym befestigt. Krystalldrusen sind im ganzen Mesophyll sichtbar, jedoch im Vergleich zu den übrigen Arten ist *Artocarpus communis* krystallarm zu nennen. Vereinzelte Krystalldrusen findet man in der unteren Epidermis der Gefässbündel, sonst aber nicht.

Mit den von mir bisher untersuchten circa 25 Arten von *Artocarpus* verglichen, tritt der, schon bei seiner Nützlichkeit hervorragende *Artocarpus communis* als solcher hervor mit seinen *zwei anatomischen Merkmalen*, welche auf die Art besonders characteristisch sind und welche bei den übrigen *Artocarpus*-Arten separat sehr selten vorkommen. Das Eine ist: die mit grüngelb-

* DE BARY, HABERLANDT l. c.

lichem und harzigem Inhalt gefüllten *Sercretzellen des Mesophylls* (Chlorophyllparenchym), das Zweite war: die zwischen die unteren Epidermiszellen trichterförmig *eingesenkten schildförmigen Drüsenhaare,* deren vereintes Auftreten einzig nur den *Artocarpus communis* characterisirt.

Der zweite bekannte Brodbaum ist der *Artocarpus integrifolia* L.[1] Seine Blätter haben auch ähnliche Drüsenhaare, aber auch sogenannte Cystolithen-Papillen, dagegen keine Secretzellen. Harzige Secretzellen hat zwar *Artocarpus echinata* Roxb.,[2] aber statt schildförmig sind die Drüsenhaare kugelig (Taf. III. Fig. 5.), welche sich aus den Epidermiszellen hervorheben; ausserdem sind die (grossen) Krystalldrusen-Nester der unteren Epidermis auch characteristisch für die Art.

Es ist zu ersehen, dass die mikroskopischen Untersuchungen viele solche Fragen lösen, auf welche die auf einseitiger Prüfung begründete Beschreibungen keine Antwort geben; überhaupt da, wo wir nicht über die sämmtlichen Bestandteile der betreffenden Pflanze verfügen. Die fleissigen Forschungen der anatomischen Merkmale sind zur Kenntniss der prähistorischen Flora unentbehrlich; zur Forschung der Flora der Gegenwart — sei dieselbe in systematischer Hinsicht zweiter Ordnung — sogar Erforderniss, dessen Notwendigkeit auch der conservative Kew einsah.[3] Denn es ist wahr, dass *die sogenannte «Anatomische Methode» mit gehöriger Rücksichtnahme der physiologischen Momente zur Feststellung des Wertes der Specien bedeutend beiträgt* und — wie die deutsche Fachschriften beweisen — in solcher Zeit, wo oft auch die Besten unserer Botaniker sich in erschreckender Weise in übertriebenes Forciren der sogenannten subtilen Specien und Bastarde einlassen, — vorzügliche Dienste leistet.

---

[1] Hooker: Botan. Magaz. t. 2833—34. Roxb. Fl. Ind. III. 522. — Specimen novæ orbis: Martius, Iter Brasil. Obs. No. 1560. Culta. [Herb. Monac.]

[2] Roxb. Fl. Ind. (1832.) III. p. 525. — Herb. Hort. Bot. Calcuttensis. [Herb. Monac.] — Culta.

[3] Herr Scott, Huxley's gewesener «Assistantprofessor», wurde als Pflanzenanatom in Kew («Jodrell-Laboratory») angestellt. — Aehnlicher Ansicht ist Van Tieghem in Paris und war Julien Vesque zu St. Vincennes (bei Paris).

## Erklärung der Abbildungen.

### TAFEL III.

Fig. 1. *Antiaris toxicaria* Leschen. — Querschnitt des Blattes. Die Milchröhren sind nicht angegeben. — *a.* Verschleimte Zelle. — *b.* Drüsenhaar. — *c.* Cystolith-Haar und (*d*) dessen Schale. — *e.* Kleines Gefässbündel. — Vergrösserung 150.

Fig. 2. *Antiaris Bennettii* Seem. — Querschnitt des Blattes. — *a.* Verschleimte Zelle. — *b.* Ungegl. Milchrohr. — *c.* Cystol.-Haar. — *d.* Drüsenhaar. — *e.* Gefässbündel. — Vergr. 150.

Fig. 3. *Antiaris saccidora* Dalz. — Flächenansicht der Blattunterseite mit Krystalldrusen-Gruppen (*a*) und Cystol.-Ablagerungen (*b*). — *c.* Cystol.-Haar. — *st.* Stoma. — Vergr. 450.

Fig. 4. *Antiaris saccidora* Dalz. — Nach dem Sachs'schen Verfahren zurückgebliebene (und verkieselte) Cystol.-Haar. — *a.* Basis-Teil — Vergrösserung 300.

Fig. 5. Drüsenhaar von *Antiaris*. — *a.* Stiel. — *b.* Kopf. — Vergr circa 600. (Typisch für die Artocarpeen.)

Fig. 6. *Antiaris saccidora* Dalz. — Querschnitt der Achse. — *a.* Kork. — *b.* Gerbstoffartigen Inhalt führende Zellen. — *c.* Milchröhren. — *d.* Bast. — *e.* Collenchymring. — *f.* Krystalldrusen. — *g.* Trichome. — *h.* Xylem. — *i.* Holzgefäss. — Vergr. circa 100.

Fig. 7. *Antiaris toxicaria* Lesch. — Längschnitt des Xylems, in der Nähe der secund. Rinde. — *a.* Holzgefäss. — *b.* Markstrahl. — *c.* Bastparenchym mit Krystalldrusen. — *d.* Milchrohr. — Vergr. 220.

Fig. 8. *Antiaris Bennettii* Seem. — Längschnitt des Markes aus der Achse. — *a.* Milchrohr. — *b.* Spiralgefäss. — *c.* Markzelle mit Krystalldrusen. — Vergr. 100.

Fig. 9. *Artocarpus communis* Forster (A. incisa L. fil.). — Querschnitt des Blattes. — *a.* Pallisadenschicht. — *b.* Durchgehendes (klein.) Gefässbündel. — *c.* Secretzellen. — *d.* Krystalldrusen. — *e.* Einfaches Haar. — *f.* Verkieseltes Haar. — *n.* Eingesenktes schildförm. Drüsenhaar. — Vergr. circa 120.

7.

# ÜBER EINE NEUE FORM DES MECHANISCHEN ARBEITSINTEGRALS.

Von KARL FUCHS,

PROFESSOR AN DER K. OBERREALSCHULE ZU ARAD.

Vorgelegt in der Sitzung der Akademie vom 18. März 1895 vom o. M. J. *Fröhlich.*

Aus «Mathematikai és Természettudományi Értesitö» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie) Band VIII, pp. 239—257, 1895.

Im vorliegenden Artikel soll gezeigt werden, wie man durch ein einfaches Integral solche mechanische Arbeiten ausdrücken kann, die nach den gebräuchlichen Methoden als mehrfache Integrale erscheinen.

## 1. Einleitende Bemerkung über das Arbeitselement solcher Kräfte, deren Intensität von der Entfernung, nicht aber von der Richtung abhängig ist.

Im Punkte $P$ des Raumes befinde sich ein fixer Massenpunkt $\mu$. Ausserdem sei ein endlicher Körper von beliebiger Form gegeben, dessen Dichte im Allgemeinen an verschiedenen Punkten eine verschiedene sei. Dieser Körper bewege sich im Raume in irgend einer Weise, wobei er Gestalt, Grösse und Dichte ändern mag, während seine Masse unveränderlich sei.

Zwischen dem fixen Massenpunkt $\mu$ und irgend einem Massenpunkt $m$ des Körpers soll eine centrale Kraft wirken, deren Intensität nur von der Entfernung abhängt, und den Massen proportional ist, die also durch den Ausdruck dargestellt wird:

$$\mu m \varphi(r).$$

Die Kraft ist eine abstossende, wenn $\varphi(r)$ positiv ist; im entgegengesetzten Fall ist sie eine anziehende.

Welche Arbeit leisten die zwischen $\mu$ und den Massenpunkten des Körpers wirkenden Kräfte, wenn der Körper aus einer Lage 1 in eine Lage 2 geführt wird? (Fig. 1.)

Wir wollen den mathematischen Ausdruck dieser Arbeit sowol nach der gebräuchlichen, als auch nach der vorzuführenden neuen Methode entwickeln, u. zw. unter der allgemeinen Annahme, dass die Function $\varphi(r)$ unbekannt und beliebig ist.

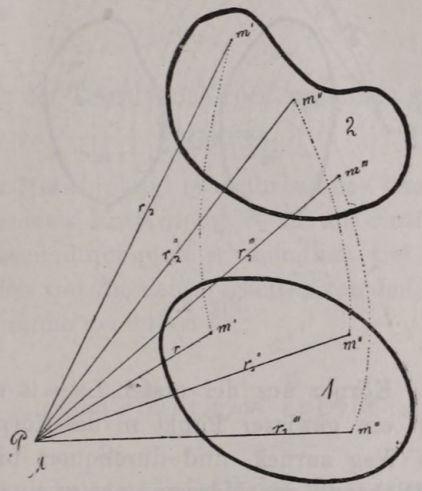



Fig. 1.

Die Massenpunkte des Körpers seien:

$$m' \quad m'' \quad m''' \ldots$$

Deren von $P$ gemessene Entfernungen seien:

$$r' \quad r'' \quad r''' \ldots$$

In der ersten Lage 1 des Körpers sei diese Entfernung bezeichnet mit:

$$r_1' \quad r_1'' \quad r_1''' \ldots$$

In der zweiten Lage 2 des Körpers aber mit:

$$r_2' \quad r_2'' \quad r_2''' \ldots$$

Aus dem Punkte $P$ construieren wir unendlich viel Kugelflächen, dergestalt, dass der ganze Raum in unendlich viele concentrische Schalen von der unendlich kleinen Dicke $dr$ zerfällt wird. (Fig. 2.) In jeder Schale mag die Function $\varphi(r)$ einen anderen Wert haben.

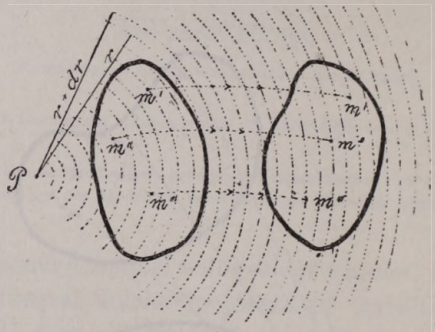



Fig. 2.

Wenn der Körper aus der ersten Lage in die zweite übergeht, dann legt ein gewisser Punkt $m$ des Körpers im Raume einen gewissen Weg zurück, und durchquert hiebei unendlich viele Schalen. Während der Massenpunkt $m$ eine gewisse Schale vom Radius $r$ und der Dicke $dr$ durchquert, ist er der unterdessen constant anzunehmenden Kraft $\mu m\varphi(r)$ ausgesetzt, und diese Kraft leistet während der Durchquerung die Arbeit

$$\mu m\varphi(r)dr.$$

Dies ist ein Element der Arbeit oder ein Arbeitselement. Unter einem Arbeitselement verstehen wir also diejenige Arbeit, welche die Kraft $\varphi(r)$ leistet, während ein Massenpunkt $m$ unter der Einwirkung des Massenpunktes $\mu$ eine Schale von der Dicke $dr$ durchquert.

Während der Körper aus der ersten Lage in die zweite über-

geht, werden vierfach unendlich viele Elementararbeiten geleistet. Es gibt nämlich jedes Massenelement $m$ unendlich viel Elementararbeiten; die Anzahl der Massenelemente aber ist entsprechend den drei Dimensionen des Raumes dreifach unendlich. All diese Arbeitselemente zusammengenommen geben die Translationsarbeit. Die Translationsarbeit ist demnach die Summe von vierfach unendlich vielen Arbeitselementen von der Form $\mu m\varphi(r)dr$.

Der Unterschied zwischen dem gebräuchlichen und dem neuen Verfahren liegt in der Reihenfolge der Summationen dieser Arbeitselemente.

## 2. Darstellung der Translationsarbeit nach dem gebräuchlichen Verfahren.

Wenn der Massenpunkt $m'$ während der Translation aus der von $P$ abgemessenen Entfernuug $r_1'$ in die Entfernung $r_2'$ übergeführt wird, dann durchquert er unendlich viel Schalen, und es werden unendlich viel Elementararbeiten von der Form $\mu m'\varphi(r)dr$ geleistet. Die Summe derselben ist:

$$\int_{r_1'}^{r_2'} \mu m'\varphi(r)\,dr = \mu m' \int_{r_1'}^{r_2'} \varphi(r)\,dr.$$

Ein analoges Integral liefert jeder Massenpunkt $m$. Die volle Translationsarbeit ist demnach:

$$L = \mu m' \int_{r_1'}^{r_2'} \varphi(r)\,dr + \mu m'' \int_{r_1''}^{r_2''} \varphi(r)\,dr + \cdots$$

$$L = \Sigma \mu m \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r)\,dr.$$

Nach dem gebräuchlichen Verfahren summiren wir also die Arbeiten, die *jedes einzelne Massenelement* während der ganzen Translation geliefert hat.

### 3. Darstellung der Translationsarbeit mit dem neuen Verfahren.

Während der Körper sich in der ersten Lage befindet, liegen seine sämmtlichen Massenpunkte zwischen einer gewissen kleinsten Entfernung $r=i_1$ und einer gewissen grössten Entfernung $r=e_1$ (Fig. 3, p. 151.). Analog befinden sich sämmtliche Massenpunkte in der zweiten Lage zwischen den zwei extremen Entfernungen $r=i_2$ und $r=e_2$. Der ganze Translationsprocess spielt sich daher zwischen den beiden extremen Entfernungen $R_1=i_1$ und $R_2=e_2$ ab.

Die zwischen $i_1$ und $e_2$ liegenden Schichten teilen wir in drei Gruppen. Die erste Gruppe umfasst das Intervall $i_1-e_1$, das zweite das Intervall $e_1-i_2$, die dritte das Intervall $i_2-e_2$. Diese Partien sind in der Figur mit II, III und IV bezeichnet. Die Gruppe I im Intervall $0-i_1$ und die Gruppe V im Intervall $e_2-\infty$ figuriren in der Rechnung nicht. In der Zeichnung ist in jeder der fünf Gruppen eine einzelne Kugelschale hervorgehoben. Die entsprechenden Radien sind mit $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$, $r_5$ bezeichnet.

So lange der Körper sich in der ersten Lage befindet, liegt innerhalb der Kugelfläche vom Radius $r_2$ ein grosser Teil des Körpers, welcher in Fig. 3 schraffiert ist. Dieser Teil ist umso grösser je grösser der Radius $r_2$ ist. Dieser Teil ist also eine Function von $r$ und kann demnach folgendermaassen bezeichnet werden :

$$M_1(r).$$

Der Index zeigt an, dass diese Masse sich auf die erste Lage des Körpers bezieht.

Während der Translation durchquert die ganze Masse $M_1(r)$ die Schale von der Dicke $dr$ und tritt aus dem Innern der Kugelfläche vom betreffenden Radius $r$. Während ein Massenelement $m$ dieser Masse $M_1(r)$ die Schale durchquert, wird die Arbeit

$$\mu m\varphi(r)\,dr.$$

geleistet. Alle Massenelemente $m$ der Masse $M_1(r)$ zusammengenommen geben daher die Arbeit

$$\mu M_1(r)\varphi(r)\,dr.$$

Eine Arbeit von dieser Form liefert jede einzelne Schale der Gruppe II. Jede Schale wird eben von der Masse durchquert, die sich vor der Translation innerhalb der Innenfläche der betreffenden Schale befindet.

2. Durch jede Schale der Gruppe III geht während der Translation die gesammte Masse $M$ des Körpers. Eine einzelne Schale vom Radius $r$ und der Dicke $dr$ liefert daher die Arbeit

$$\mu M \varphi(r)\, dr.$$

3. Durch eine Schale vom Radius $r_4$ in der Gruppe IV geht während der Translation derjenige Teil des Körpers, welcher in der Figur in der zweiten Lage schraffiert ist. Wenn wir unter $M_2(r_4)$ denjenigen Teil des Körpers verstehen, welcher in der zweiten Lage innerhalb der Kugelfläche vom Radius $r_4$ sich befindet, der also nicht schraffiert ist, dann können wir die hindurchgegangene Masse so bezeichnen:

$$M - M_2(r_4).$$

Die Masse, welche während der Translation irgend eine Kugelschale vom Radius $r$ durchquert, wollen wir ganz allgemein durch das Symbol $A(r)$ bezeichnen. Dann liefert die Schale vom Radius $r$ die Arbeit:

$$\mu A(r)\, \varphi(r)\, dr.$$

Wenn die Translation zwischen den Grenzen $R_1$ und $R_2$ vorgeht, dann können wir die Translationsarbeit so schreiben:

$$L_2 - L_1 = \sum_{R_1}^{R_2} \mu A(r)\, \varphi(r)\, dr.$$

Im neuen Verfahren summieren wir also die Arbeiten, die in den einzelnen Raumschalen geleistet werden.

Die Schalen der Gruppen I und V, d. i. der Intervalle $0 - R_1$ und $R_2 - \infty$ liefern offenbar keine Arbeiten. Wir können sie also in die Summe einbeziehen ohne deren Wert zu ändern und können somit schreiben:

$$L_2 - L_1 = \sum_{0}^{\infty} \mu A(r)\, \varphi(r)\, dr.$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck für das neue Verfahren.

## 4. Die Translationsarbeit in Integralform.

Jede Schale der Gruppe II (Fig. 3) liefert eine Arbeit von der Form:

$$\mu M_1(r)\,\varphi(r)\,dr.$$

Alle Schalen der Gruppe zusammengenommen also die Arbeit:

$$\mu \int_{i_1}^{e_1} M_1(r)\,\varphi(r)\,dr.$$

Jede Schale der Gruppe III liefert eine Arbeit von der Form:

$$\mu M \varphi(r)\,dr,$$

alle Schalen der Gruppen zusammengenommen also die Arbeit:

$$\mu M \int_{e_1}^{i_2} \varphi(r)\,dr.$$

Jede Schale der Gruppe IV liefert eine Arbeit von der Form:

$$\mu\,[M - M_2(r)]\,\varphi(r)\,dr =$$
$$= \mu M \varphi(r)\,dr - \mu M_2(r)\,\varphi(r)\,dr,$$

alle Schalen der Gruppe zusammengenommen also die Arbeit:

$$\mu M \int_{i_2}^{e_2} \varphi(r)\,dr - \mu \int_{i_2}^{e_2} M_2(r)\,\varphi(r)\,dr.$$

Die ganze Translationsarbeit liefert also die Arbeit (zwei Integrale können zusammengezogen werden):

$$L_2 - L_1 = \mu \int_{i_1}^{e_1} M_1(r)\,\varphi(r)\,dr - \mu \int_{i_2}^{e_2} M_2(r)\,\varphi(r)\,dr + \mu M \int_{e_1}^{e_2} \varphi(r)\,dr.$$

## 5. Symmetrische Form des Arbeitsintegrals.

In der dritten III. Schalengruppe unterscheiden wir eine Kugelfläche von dem beliebigen Radius $R$. Sie ist in Fig. 3 mit 00 bezeichnet. Während der Translation wird jeder einzelne Massenpunkt des Körpers von seinem Anfangsorte zuerst bis zur Kugelfläche 00, sodann von der Kugelfläche 00 bis an seinen Endort

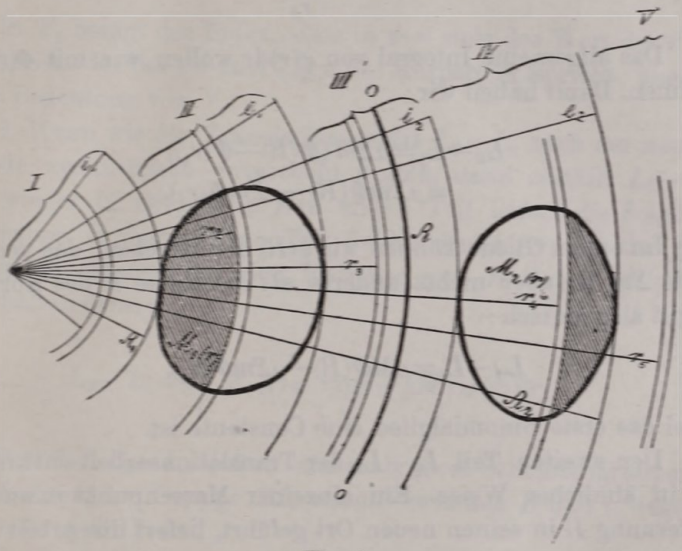



Fig. 3.

geführt. Wir wollen dem entsprechend die Translationsarbeit in zwei Teilen schreiben. Der erste Teil stellt die Arbeit dar, welche die Massenpunkte liefern, wenn sie von ihrem Anfangsorte bis in die beliebige Entfernung $R$ geführt werden; der zweite Teil stellt die Arbeit dar, die die Massenpunkte leisten, wenn sie aus der Entfernung $R$ an ihren Endort gebracht werden. Die Arbeit erscheint dann in symmetrischer Form.

1. Zuerst folgen wir der gebräuchlichen Methode. Wir zerlegen:

$$L_2 - L_1 = L_R - L_1 + L_2 - L_R$$

und entwickeln zuerst das erste Glied des Binoms. Ein einzelner Massenpunkt $m$ liefert für dieses Glied die Translationsarbeit:

$$\mu m \int_{r_1}^{R} \varphi(r)\, dr,$$

alle Massenpunkte zusammengenommen also die Arbeit:

$$L_R - L_1 = \Sigma \mu m \int_{r_1}^{R} \varphi(r)\, dr.$$

Das allgemeine Integral von $\varphi(r)dr$ wollen wir mit $\Phi(r)$ bezeichnen. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} L_R - L_1 &= \mu \Sigma m\, (\Phi(R) - \Phi(r_1)) \\ &= \mu \Sigma m \Phi(R) - \mu \Sigma m \Phi(r_1). \end{aligned}$$

Im ersten Gliede können wir $\varphi(R)$ herausheben; das verbleibende $\Sigma m$ ist aber nichts anderes als die Masse $M$ des Körpers. Es gilt also einfach:

$$L_R - L_1 = \mu M \Phi(R) - \mu \Sigma m \Phi(r_1),$$

wobei das erste Binomialglied eine Constante ist.

Den zweiten Teil $L_2 - L_R$ der Translationsarbeit entwickeln wir in ähnlicher Weise. Ein einzelner Massenpunkt $m$ aus der Entfernung $R$ in seinen neuen Ort geführt, liefert die Arbeit:

$$\mu m \int_{R}^{r_2} \varphi(r)\, dr,$$

und somit alle zusammengenommen die Arbeit:

$$\begin{aligned} L_2 - L_R &= \Sigma \mu m \int_{R}^{r_2} \varphi(r)\, dr \\ &= \mu \Sigma m\, (\Phi(r_2) - (R)) \\ &= \mu \Sigma m \Phi(r_2) - \mu M \Phi(R). \end{aligned}$$

Die ganze Translationsarbeit ist:

$$L_2-L_1=(L_R-L_1)+(L_2-L_R)=(L_2-L_R)-(L_1-L_R).$$

Wenn wir setzen:

$$V=\Sigma m\Phi(r)-M\Phi(R),$$

dann können wir die Translationsarbeit auch so schreiben:

$$L_2-L_1=\mu(V_2-V_1).$$

In $V_2$ besagt der Index, dass in $\Phi(r)$ stets der Wert des $r$ zu nehmen ist, der der zweiten Lage des Körpers entspricht; analog ist die Bedeutung von $V_1$.

2. Wenn wir die Translationsarbeit $L_2-L_1$ nach der neuen Methode symmetrisch entwickeln wollen, dann zerfällt $L_R-L_1$ selbst wieder in zwei Teile. Den ersten Teil liefern die Schalen der Gruppe II, den zweiten Teil liefern diejenigen Schalen der Gruppe III, die zwischen den Radien $e_1$ und $R$ liegen. (Fig. 3.) Wir erhalten dann:

$$L_R-L_1=\mu\int_{i_1}^{e_1}M_1(r)\,\varphi(r)\,dr+\mu M\int_{e_1}^{R}\varphi(r)\,dr.$$

Den Teil $L_2-L_R$ liefern abermals zwei Schichtengruppen: die Schichten der Gruppe III, welche zwischen $R$ und $i_2$ liegen, und die Gruppe IV.

Es gilt dann:

$$L_2-L_R=\mu M\int_{R}^{i_2}\varphi(r)\,dr+\mu\int_{i_2}^{e_2}[M-M_2(r)]\,\varphi(r)\,dr$$

$$=\mu M\int_{R}^{e_2}\varphi(r)\,dr-\mu\int_{i_2}^{e_2}M_2(r)\,\varphi(r)\,dr.$$

Es sei im Allgemeinen:

$$W=M\int_{R}^{e}\varphi(r)\,dr-\int^{e}M(r)\,\varphi(r)\,dr.$$

Dann gilt offenbar:

$$L_2 - L_1 = \mu(W_2 - W_1).$$

Hier bedeutet $W_2$ denjenigen Ausdruck, den wir aus $W$ erhalten, wenn wir für $i$ und $e$ diejenigen Entfernungen nehmen, die der zweiten Lage des Körpers entsprechen, und in $M(r)$ dasselbe tun. Eine analoge Bedeutung hat das Symbol $W_1$.

Offenbar bedeuten $\mu V$ und $\mu W$ dieselbe Arbeit, nämlich die Arbeit, die geleistet wird, wenn sämmtliche Massenpunkte $m$ aus der Entfernung $R$ an denjenigen Ort geführt werden, der ihnen bei einer gewissen beliebigen Lage des Körpers zukommt. Es gilt also $W = V$ oder

$$\Sigma m\Phi(r) - M\Phi(R) = -\int_i^e M(r)\,\varphi(r)\,dr + M\int_R^e \varphi(r)\,dr.$$

In jedem concreten Falle geben beide Ausdrücke dasselbe mathematische Gebilde, aber in verschiedener Form; man nennt dieses bekanntlich das Potential des Körpers.

## 6. Differentiale Verschiebungen.

Wenn der Körper starr ist und sich nur parallel zu sich selbst verschiebt, dann ist die Verteilung der Massenpunkte im Raume die Function von nur einer Variablen, dem Wege. Auch wenn der Körper starr ist und sich nur um eine fixe Axe dreht ist die Verteilung der Massenpunkte im Raume die Function von nur einem Variablen, dem Drehungswinkel $\vartheta$. Im Allgemeinen jedoch ist die Verteilung der Massenpunkte die Function von zwei, drei und mehr Variablen. Wenn die $n$ Massenpunkte sich von einander unabhängig bewegen, dann ist die Disposition der Punkte eine Function von $3n$ Variablen.

Wenn wir von differentialen Verschiebungen reden, dann ist die totale Aenderung der Disposition nichts anderes als die Summe der Verschiebungen, die die einzelnen Variablen verursachen. Zur Erläuterung unserer Methode genügt es also das Arbeitsintegral nur für den Fall zu entwickeln, wenn die Aenderung

der Disposition der Massenteilchen eine Function einer einzigen Variablen ist, die wir mit $s$ bezeichnen und unter der wir der Anschaulichkeit wegen einen Weg verstehen wollen.

In Fig. 4 ist die ursprüngliche Lage des Körpers durch eine kräftige Linie bezeichnet. Sie entspricht dem Werte $s$ der Variablen. Der Körper liegt dann zwischen den Entfernungen $r=i$ und

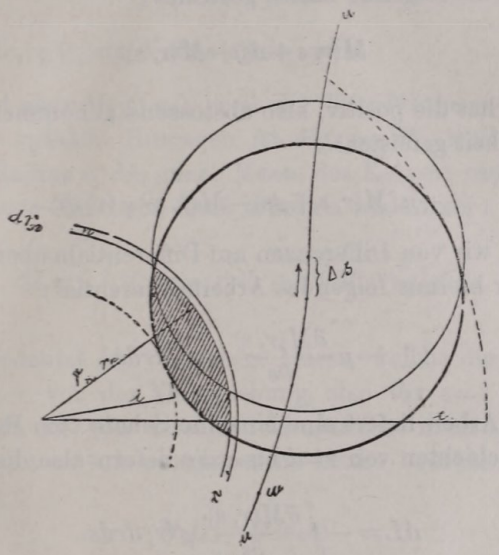


Fig. 4.

$r=e$. Eine Kugelschale vom Radius $r$ und der Dicke $dr$ teilt dann den Körper in zwei Teile. Der eine schraffierte Teil liegt innerhalb der Innenfläche der Kugelschale, der andere liegt ausserhalb derselben. Die schraffierte Masse ist nun eine Function der zwei Variablen $r$ und $s$. Eine Function von $r$ ist sie, weil sie umso grösser ist, je grösser $r$ ist, und eine Function von $s$, weil sie sich ändert, wenn $s$ einen anderen Wert erhält. Die schraffierte Masse können wir also bezeichnen durch das Symbol:

$$M(r, s).$$

Wenn die Variable $s$ sich um $\Delta s$ ändert, dann erhält die Masse eine andere Disposition, die durch den schwächeren Umriss angedeutet wird. Die Kugelfläche vom Radius $r$ enthält dann die Masse:

$$M(r, s+\Delta s).$$

Lassen wir diese grösser sein als $M(r, s)$, dann ist in Folge des Incrementes $\Delta s$ durch die Schale hindurch in das Innere der Kugelfläche die folgende Masse geströmt:

$$M(r, s+\Delta s)-M(r, s).$$

Dann hat die positiv, also abstossend genommene Kraft $\varphi(r)$ folgende Arbeit geleistet:

$$-\mu\,[M(r, s+\Delta s)-M(r, s)]\,\varphi(r)\,dr.$$

Wenn wir von Differenzen auf Differentiale übergehen, dann erhalten wir hieraus folgendes Arbeitsdifferential:

$$-\mu\,\frac{\partial M(r, s)}{\partial s}\,\varphi(r)\,dr ds.$$

Diese Arbeit liefert eine einzelne Schale vom Radius $r$.
Alle Schichten von $r=i$ bis $r=e$ liefern also die Arbeit:

$$dL=-\int_i^e \frac{\partial M(r, s)}{\partial s}\,\varphi(r)\,dr ds.$$

Dasselbe Problem können wir auch so fassen, dass wir vom Ausdruck für endliche Verschiebungen, p. 150 ausgehen:

$$L_2-L_1=\mu\int_{i_1}^{e_1} M_1(r)\,\varphi(r)\,dr-\mu\int_{i_2}^{e_2} M_2(r)\,\varphi(r)\,dr+\mu M\int_{e_1}^{e_2}\varphi(r)\,dr$$

und von endlichen auf unendlich kleine Verschiebungen übergehen. Dann gilt:

$$e_2=e_1+de_1, \quad i_2=i_1+di_1,$$

$$de_1=\frac{\partial e_1}{\partial s}\,ds, \quad di_1=\frac{\partial i_1}{\partial s}\,ds.$$

Das Arbeitsintegral erhält dann die Form:

$$L_{s+ds} - L_s = \frac{\partial L}{\partial s} ds =$$

$$= \mu \int_{i_1}^{e_1} M_1(r)\,\varphi(r)\,dr - \mu \int_{i_1+di_1}^{e_1+de_1} M_2(r)\,\varphi(r)\,dr + \mu M \int_{e_1}^{e_1+de_1} \varphi(r)\,dr =$$

$$= \mu \int_{i_1}^{e_1} M_1(r)\,\varphi(r)\,dr - \mu \int_{i_1}^{e_1} M_2(r)\,\varphi(r)\,dr + \mu M_2(i_1)\,\varphi(i_1)\,di_1 -$$

$$- \mu M_2(e_1)\,\varphi(e_1)\,de_1 + \mu M \varphi(e_1)\,de_1 = dL.$$

Hier ist aber $M_2(i_1)=0$, weil die Kugelfläche vom Radius $i_1$ keine Masse enthält. Hingegen ist $M_2(e_1)=M_1$, weil die Kugelfläche vom Radius $e_1$ die ganze Masse des Körpers umfasst. Wenn wir diese Werte einsetzen, dann erhalten wir kürzer:

$$dL = \mu \int_{i_1}^{e_1} M_1(r)\,\varphi(r)\,dr - \mu \int_{i_1}^{e_1} M_2(r)\,\varphi(r)\,dr.$$

Hier bedeutet $M_1(r)$ diejenige Masse, welche die Kugelfläche vom Radius $r$ vor der Verschiebung, also für $s=s$ umschliesst, während $M_2(r)$ die von derselben Kugelfläche nach der Verschiebung, also für $s=s+ds$ umschlossene Masse bedeutet. Mit anderen Worten:

$$M_1(r) = M(r, s)$$

$$M_2(r) = M(r, s+ds)$$

$$dL = \mu \int_{i_1}^{e_1} \{M(r, s) - M(r, s+ds)\}\,\varphi(r)\,dr.$$

Dieser Ausdruck stimmt aber überein mit dem direct aus den differentialen Verschiebungen gefundenen obigen Werte:

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -\mu \int_{i}^{e} \frac{\partial M(r, s)}{\partial s} \varphi(r)\,dr.$$

Nach diesen allgemeinen Entwicklungen können wir den Unterschied zwischen dem gebräuchlichen und dem neuen Verfahren bei der Darstellung des Arbeitsintegrals in folgender Weise

ausdrücken: Das gebräuchliche Verfahren integrirt *zuerst* nach $r$ und erhält dadurch sofort die eventuell unbekannte Function $\varphi(r)$ unter das Integralzeichen; das neue Verfahren integrirt *zuletzt* nach $r$, so dass bei unbekanntem $\varphi(r)$ eventuell alle vorhergehenden Integrationen ausführbar sind und $\varphi(r)$ dann nur zu einfachen unausführbaren Integralen führt.

## 7. Anwendung auf eine homogene Vollkugel.

Eine Vollkugel vom Radius $b$ habe die Dichte $\rho$; die Entfernung ihres Mittelpunktes vom Massenpunkte $\mu$ sei $u$. Diese ungewöhnlichen Buchstaben lehnen sich an LAPLACE's Arbeiten über Capillarität an.

1. Es soll die Kraft berechnet werden, mit welcher die Kugel vom Massenpunkt $\mu$ abgestossen wird, wenn die Centralkraft durch die nicht näher bekannte Function $\varphi(r)$ bestimmt wird.

Wir wenden zunächst die neue Methode an. Wir lassen $u$ um $du$ wachsen und erhalten eine Verschiebungsarbeit von der Form $Fdu$. Die Function $F$ ist dann die gesuchte Kraft.

Wir rechnen folgendermaassen: Eine Kugelschale vom Radius $r$ und der Dicke $dr$ schneidet mit ihrer Innenfläche eine Linse aus der Kugel, die in Fig. 5 schraffiert ist. Wenn $u$ um $du$ wächst, dann tritt durch die Kugelschale ein Teil der Linse, die gleich ist einer Scheibe vom Radius $h$ und der Dicke $du$. Den Ra-

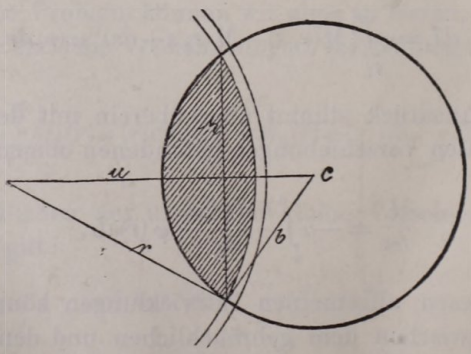



Fig. 5.

dius $h$ können wir aus $r$, $b$ und $u$ auch auf elementarem Wege finden:

$$h^2 = \frac{-r^4+2r^2(u^2+b^2)-(u^2-b^2)^2}{4u^2}.$$

Die Masse der Scheibe ist $\rho\pi h^2 du$, und die Arbeit, die bei ihrem Austritt geleistet wird, ist

$$\pi\mu\rho h^2\varphi(r)\,dr\,du.$$

Diese Arbeit liefert eine einzelne Schale vom Radius $r$, wenn die Kugel sich um $du$ verschiebt. Die ganze Verschiebungsarbeit finden wir durch Integration nach $r$ von $r=u-b$ bis $r=u+b$. Wenn wir den Wert von $h$ einsetzen, dann finden wir den Ausdruck

$$\frac{\pi\mu\rho}{4u^2}\left(-\int_{u-b}^{u+b} r^4\varphi(r)\,dr+2(u^2+b^2)\int_{u-b}^{u+b} r^2\varphi(r)\,dr-(u^2-b^2)^2\int_{u-b}^{u+b}\varphi(r)\,dr\right)du.$$

Wenn wir $du$ streichen, dann verbleibt der gesuchte Wert der Kraft.

2. Eine zweite Aufgabe ist die folgende. Es soll die Arbeit bestimmt werden, die die Kraft $\varphi(r)$ leistet, wenn die Kugel aus der Entfernung $u_1$ in die Entfernung $u_2$ übergeführt wird. Wir bestimmen diese Arbeit mittels der Function $W$, p. 153. In dieser Function erscheint die Masse $M(r)$, die in unserem Falle die in der Figur schraffierte Linse ist. Wir finden auch auf elementarem Wege für dieselbe den Werth:

$$M(r)=\pi\rho\left(\frac{1}{12}u^3-\frac{1}{2}ub^2+\frac{2}{3}b^3-\frac{1}{4}\frac{b^4}{u}\right)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\rho\left(-u+\frac{b^2}{u}\right)r^2+\frac{2\pi}{3}\rho r^3-\frac{\pi}{4}\rho\frac{r^4}{u}=$$
$$=\rho A+\rho Br^2+\rho Cr^3+\rho Dr^4.$$

Ausserdem enthält $W$ noch die Masse

$$M=\rho\frac{4\pi}{3}b^3=\rho Eb^3.$$

Die Function $W$ erscheint dann in folgender Form:

$$W=\rho E b^3 \int_R^{u+b} \varphi(r)\,dr - \rho \int_{u-b}^{u+b} (A+Br^2+Cr^3+Dr^4)\,\varphi(r)\,dr$$

$$W=\rho E b^3 \int_R^{u+b} \varphi(r)\,dr - \rho A \int_{u-b}^{u+b} \varphi(r)\,dr - \rho B \int_{u-b}^{u+b} r^2\varphi(r)\,dr -$$

$$-\rho C \int_{u-b}^{u+b} r^3\varphi(r)\,dr - \rho D \int_{u-b}^{u+b} r^4\varphi(r)\,dr.$$

Wenn wir hier einmal $u=u_1$, einmal $u=u_2$ nehmen, dann erhalten wir die Functionen $W_1$ und $W_2$, und die Translationsarbeit ist:

$$\mu(W_2-W_1).$$

Sie wird also ausschliesslich durch *einfache* Integrale von dem Typus

$$\int_{r_1}^{r_2} r^n \varphi(r)dr$$

ausgedrückt.

2*a*. Wir wollen dieselbe Translationsarbeit nun auch nach dem gebräuchlichen Verfahren, d. i. mittels des Potentials darstellen.

Die Schale vom Radius $r$ und der Dicke $dr$ schneidet aus der Kugel eine sphärische Lamelle, deren Innenfläche durch

$$\frac{\pi r}{u}\left(b^2-\overline{u-r}^2\right),$$

deren Masse durch

$$\frac{\pi\rho r}{u}[(b^2-u^2)+2ur-r^2]\,dr.$$

gegeben ist. Jeder Punkt dieser Lamelle hat das gleiche Potential, nämlich $\int\varphi(r)\,dr$; das Potential der Lamelle ist also:

$$\frac{\pi\rho}{u}[(b^2-u^2)r+2ur^2-r^3]\,dr\int\varphi(r)\,dr.$$

Die Summe aller Lamellen von $r=u-b$ bis $r=u+b$, d. h. die ganze Kugel, hat also das Potential:

$$V=\frac{\pi\rho}{u}(b^2-u^2)\int_{u-b}^{u+b} r\,dr\int\varphi(r)\,dr-$$

$$-2\pi\rho\int_{u-b}^{u+b} r^2\,dr\int\varphi(r)\,dr-\frac{\pi\rho}{u}\int_{u-b}^{u+b} r^3\,dr\int\varphi(r)\,dr.$$

Auch hier ist erst $u=u_1$, dann $u=u_2$ einzusetzen und die Differenz zu nehmen. Die Translationsarbeit ist also durch Doppelintegrale gegeben, die nur schwer auf einfache Integrale zu reduciren sind.

## 8. Der Binnendruck einer homogenen Flüssigkeit.

Eine homogene Flüssigkeitskugel habe den Radius $b$ und die Dichte $\rho$. Wie gross ist der radiale Druck der Flüssigkeit in der Tiefe $h$ unter der Oberfläche der Flüssigkeit?

Die Oberfläche der Flüssigkeitskugel sei $OO$; in der Tiefe $h$ unter derselben sei eine zweite Kugelfläche 00, Fig. 6, p. 163. Von der einen Kugelfläche zur anderen erstreckt sich ein radialer Flüssigkeitsfaden von der Länge $h$ und dem Querschnitt $dq$. Jeder einzelne Massenpunkt dieses Fadens wird von der umgebenden Flüssigkeit nach innen gezogen, wenn wir $\varphi(r)$ negativ sein lassen. In der vom Kugelmittelpunkt gemessenen Entfernung $z$ sei diese Kraft per Masseneinheit des Fadens gleich $\Psi(z)$, so dass das Faden element $\mu=\rho dqdz$ mit der Kraft

$$\rho dqdz\Psi(z)$$

radial nach innen gezogen wird. Der ganze Faden erleidet also den centripetalen Zug

$$\rho dq\int_{b-h}^{b}\Psi(z)\,dz.$$

Wenn wir hier den Factor $dq$ weglassen, dann verbleibt der Druck, den die Flächeneinheit der Kugelfläche 00 vom Radius $b$—$h$ in Folge der Molekularanziehungen durch die äussere Flüssigkeit in radialer Richtung erleidet. Dieser Druck ist unter dem Binnendruck in der Tiefe $h$ gemeint.

Das Integral

$$\rho \int_{b-h}^{b} \Psi(z)\, dz$$

hat aber auch noch eine zweite Bedeutung. Es bedeutet offenbar die Arbeit, die die Molekularkräfte leisten, wenn die Masse $\rho$ aus der Flüssigkeitsoberfläche $OO$ in die Tiefe $h$ geführt wird. Wir finden also den numerischen Wert des Binnendruckes in der Tiefe $h$, wenn wir die Arbeit berechnen, die geleistet wird, wenn die Masse $\rho$ aus der Flüssigkeitsoberfläche in die Tiefe $h$ geführt wird.

In Uebereinstimmung mit den gebräuchlichen Annahmen der Capillaritätslehre nehmen wir an, dass die Anziehungskraft eines Massenpunktes $\rho$ nur bis zu einer gewissen sehr kleinen Entfernung $\varepsilon$, die kleiner ist als $h$, eine nennenswerte Intensität besitzt.

In Fig. 6 ist der Massenpunkt $\rho$ in die Oberfläche gesetzt und ist eine Kraftschale vom Radius $r$ besonders gezeichnet. Der schraffierte Meniscus zwischen der Innenseite der Kraftschale und der Flüssigkeitsoberfläche enthält keine Flüssigkeit. Sein Volumen ist, wie wir auch auf elementarem Wege finden:

$$v = \frac{2\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^4}{4b}$$

Sobald jedoch der Massenpunkt $\rho$ in die Tiefe $h$ gebracht ist, ist die Kraftschale durchaus mit Flüssigkeit gefüllt. Während der Ueberführung ist also durch die Kraftschale von der Dicke $dr$ das Flüssigkeitsvolumen $v$ eingedrungen, wobei die Arbeit geleistet worden ist:

$$\rho \cdot \rho \left( \frac{2\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^4}{4b} \right) \cdot \varphi(r)\, dr.$$

Alle Schichten von $r=0$ bis $r=\varepsilon$ liefern also die Arbeit:

$$\frac{2\pi\rho^2}{3} \int_0^{\varepsilon} r^3 \varphi(r)\, dr + \frac{\pi\rho^2}{4b} \int_0^{\varepsilon} r^4 \varphi(r)\, dr =$$

$$= K + \frac{H}{b}.$$

So haben wir den Binnendruck einer Flüssigkeit gefunden, ohne eigentlich gerechnet zu haben.

Diese Ableitung des Binnendruckes ist nicht nur die kürzeste, sie ist auch die genaueste und von allgemeinster Giltigkeit.

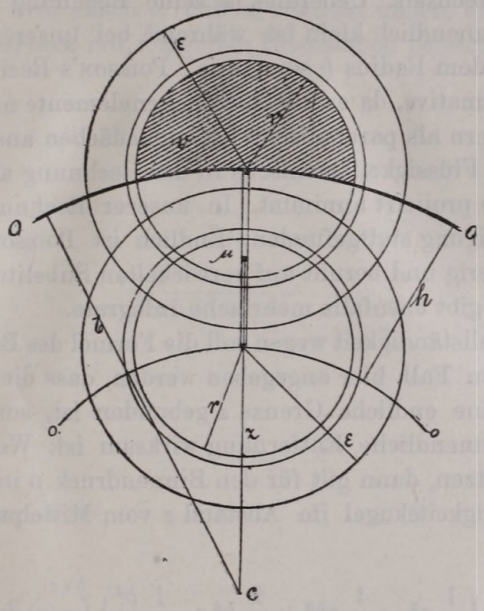



Fig. 6.

Laplace (Théorie de l'action capillaire, Paris, 1806, p. 11—13) drückt den Binnendruck durch ein dreifaches Integral aus. Von der Function $\varphi(r)$ setzt er voraus, dass sie mit wachsendem $r$ das Vorzeichen nicht wechselt. An diese Beschränkung ist unsere Ableitung nicht gebunden. Laplace's Ableitung bezieht sich nur auf concave Oberflächen. Der Uebergang auf convexe Flächen ist sehr anfechtbar. Unsere Ableitung ist für concave Oberflächen ebenso giltig, wie für convexe, denn für concave Oberflächen wird einfach das obige Volumen

$$v = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{\pi r^4}{4b}.$$

Poisson (Nouvelle théorie de l'action capillaire, Paris, 1831, pag. 12, erste Formel; pag. 14, zweite Formel) ist der einzige Autor, der den inneren Druck durch ein einfaches Integral darstellt; seine Formel ist identisch mit der unseren. Seine Ableitung ist aber ebenfalls an die Bedingung gebunden, dass $\varphi(r)$ das Vorzeichen nicht wechselt. Ueberdies ist seine Rechnung nur dann giltig, wenn $\varepsilon$ unendlich klein ist, während bei unserer Ableitung $\varepsilon$ auch gleich dem Radius $b$ sein kann. Poisson's Rechnung ist nur eine approximative, da er die Oberflächenelemente nicht als sphärische, sondern als parabolische Rotationsflächen ansieht, und die Masse eines Flüssigkeitsmeniscus in der Rechnung als in die Tangentialebene projicirt annimmt. In unserer Rechnung hat keine Vernachlässigung stattgefunden. Endlich ist Poisson's Ableitung sehr langwierig und beruht auf verwickelten Substitutionen.

Gauss gibt ebenfalls mehrfache Integrale.

Der Vollständigkeit wegen soll die Formel des Binnendruckes auch für den Fall hier angegeben werden, dass die Anziehungskraft an keine endliche Grenze $\varepsilon$ gebunden ist, sondern theoretisch bis in unendliche Entfernung wirksam ist. Wenn wir $b—h$ durch $z$ ersetzen, dann gilt für den Binnendruck $p$ in einer homogenen Flüssigkeitskugel im Abstand $z$ vom Mittelpunkt folgende Formel:

$$\frac{p}{\pi\rho^2} = \left(\frac{1}{12}z^3 - \frac{1}{2}zb^2 + \frac{2}{3}b^3 - \frac{1}{4}\frac{b^4}{z}\right)\int_{b-z}^{b+z}\varphi(r)\,dr +$$

$$+ \frac{4}{3}b^3\int_{z+b}^{z-b}\varphi(r)\,dr + \frac{1}{2}\frac{b^2-z^2}{z}\int_{b-z}^{b+z}r^2\varphi(r)\,dr +$$

$$+ \frac{4}{3}\int_0^{b-z}r^3\varphi(r)\,dr + \frac{2}{3}\int_{b-z}^{b+z}r^3\varphi(r)\,dr - \frac{2}{3}\int_0^{z-b}r^3\varphi(r)\,dr -$$

$$- \frac{1}{4z}\int_{b-z}^{b+z}r^4\varphi(r)\,dr + \frac{1}{4b}\int_0^{z-b}r^4\varphi(r)\,dr.$$

Sämmtliche Integrale gehören also auch hier zum Typus

$$\int_{r_1}^{r_2} r^n\,\varphi(r)\,dr.$$

In den vielen und complicierten Anwendungen, die ich vom neuen Verfahren gemacht habe, bin ich überhaupt noch auf keine Integrale von anderem Typus gekommen.

Wenn wir die Wirkungsweite auf $\varepsilon$ reduciren, dann verbleiben nur diejenigen Integrale, deren untere Grenze $=0$ ist. Ihre obere Grenze wird gleich $\varepsilon$, und es resultirt unsere obige Formel, die wir mit LAPLACE mit folgenden Buchstaben bezeichnen:

$$p=K+\frac{H}{b}.$$

8.

# ÜBER DAS RÄUMLICHE ANALOGON DES DESARGUES'SCHEN SATZES.

Von Dr. JULIUS VÁLYI,

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KOLOZSVÁR (KLAUSENBURG).

Vorgelegt in der Sitzung der Akademie vom 17. Oktober 1892 vom o. M. *Julius König*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XI, pp. 30—44. 1893.

Der Desargues'sche Satz kann in der Ebene auch folgenderweise formuliert werden:

Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte von zwei Dreiecken einem linearen Strahlenbüschel angehören, so gehören die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten einer linearen Punktreihe an.

Wenn man bedenkt, dass der lineare Strahlenbüschel im Raume mit sich selbst reciprok ist, so wird der analoge Satz lauten:

Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte von zwei Tetraëdern einem linearen Strahlenbüschel angehören, so gehören die Durchschnittslinien der entsprechenden Seitenflächen wieder einem linearen Strahlenbüschel an.

Eine solche Beziehung von zwei Tetraëdern werden wir *linear* nennen.

Dieser Satz, welcher weiter unten bewiesen wird, führt dann zur Frage, ob es mehrfach lineare Tetraëder gibt? Wir werden ihre Existenz beweisen und die sämmtlichen Arten von mehrfach linearen Tetraedern aufsuchen.

## 1. Über die linearen Strahlenbüschel.

Wenn die Gerade $p$ mit den räumlichen Coordinaten

$$p_{ik}\,(i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ p_{ik}+p_{ki}=0)$$

gegeben ist, so besteht zwischen diesen die Relation:

$$[p]=p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34}=0.$$

Wenn die Geraden $p$, $q$ durch die Coordinaten $p_{ik}\,q_{ik}$ gegeben sind, so ist die Bedingung dafür, dass die Geraden einander schneiden:

$$[p,\ q]=[q,\ p]=p_{23}q_{14}+p_{31}q_{24}+p_{12}q_{34}+p_{14}q_{23}+p_{24}q_{31}+p_{34}q_{12}=0.$$

Wir brauchen beide Relationen.

1. Suchen wir zuerst denjenigen linearen Strahlenbüschel auf, welcher durch zwei Strahlen $(p,\ q)$ bestimmt wird.

$$s_{ik}=\lambda p_{ik}+\mu q_{ik}$$

können nur dann Liniencoordinaten sein, wenn die Bedingung

$$[s]=\lambda\mu\,[p,\ q]=0$$

erfüllt wird. Zwei Strahlen erzeugen also nur dann einen linearen Strahlenbüschel, wenn sie einander schneiden. Der Strahlenbüschel besteht aus den sämmtlichen Geraden, welche in der gemeinsamen Ebene von $p$ und $q$ liegen und zugleich durch den gemeinsamen Punkt von $p$ und $q$ hindurchgehen, denn jede Gerade $(l)$, welche $p$ und $q$ schneidet, schneidet auch $s$, nämlich

$$[s,\ l]=\lambda\,[p,\ l]+\mu\,[q,\ l].$$

Solcher Strahlenbüschel soll *ein linearer ebener Strahlenbüschel* heissen.

Die Bedingung dafür, dass drei gegebene Geraden einem linearen ebenen Strahlenbüschel angehören, besteht darin, dass die sämmtlichen Determinanten dritter Ordnung der Matrix von den Liniencoordinaten der drei Geraden verschwinden müssen.

2. Suchen wir den linearen Strahlenbüschel auf, welcher durch drei Gerade $(p, q, r)$ bestimmt wird, wo die Geraden nicht einem linearen ebenen Strahlenbüschel angehören.

$$s_{ik}=\lambda p_{ik}+\mu q_{ik}+\nu r_{ik}$$

können nur dann Liniencoordinaten sein, wenn die Bedingung

$$[s] = \mu\nu\,[q, r] + \nu\lambda\,[r, p] + \lambda\mu\,[p, q] = 0$$

erfüllt wird. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

*a)* die Geraden $p$, $q$, $r$ schneiden sich paarweise nicht.

Dann besteht der Büschel aus einfach unendlich vielen Gliedern mit der Eigenschaft, dass jede Gerade $(l)$, welche die Geraden $p$, $q$, $r$ schneidet, schneidet auch sie, weil

$$[s, l] = \lambda\,[p, l] + \mu\,[q, l] + \nu\,[r, l]$$

ist. Hieraus folgt, dass der Büschel auf der Fläche zweiten Grades liegt, welche durch die Geraden $p$, $q$, $r$ geht und auf dieser Fläche diejenige Schaar von Geraden bildet, zu welcher auch die Geraden $p$, $q$, $r$ gehören.

*b)* $p$ und $q$ schneiden sich, aber die Geraden $q$ und $r$, $r$ und $p$ nicht.

Aus der Bedingungsgleichung

$$[s] = \nu(\lambda\,[p, r] + \mu\,[q, r]) = 0$$

folgt, dass in diesem Falle der Büschel aus zwei linearen ebenen Strahlenbüscheln besteht, deren einer $(\nu=0)$ die Grundstrahlen $p$, $q$, der andere die Grundstrahlen $r$, $s$ hat, wo

$$s_{ik} = [q, r]\,p_{ik} - [p, r]\,q_{ik}$$

sind. Also zwei lineare ebene Strahlenbüschel mit verschiedenen Centren und Ebenen, aber mit einem gemeinsamen Strahl $(s)$.

*c)* $p$ und $q$, $q$ und $r$ schneiden sich, aber $r$ und $p$ schneiden sich nicht.

Aus der Gleichung

$$[s] = \lambda\nu\,[p, r] = 0$$

folgt, dass auch in diesem Falle der Büschel aus zwei linearen ebenen Strahlenbüscheln besteht mit verschiedenen Centren und Ebenen, aber mit einem gemeinsamen Strahl ($q$).

*d)* $p$, $q$, $r$ schneiden sich paarweise, also haben sie entweder einen gemeinsamen Punkt, oder eine gemeinsame Ebene.

Jetzt ist die Gleichung $[s] = 0$ eine Identität. Der Büschel enthält zweifach unendlich viele Glieder mit der Eigenschaft, dass sie durch jede gemeinsame Schnittgerade von $p$, $q$, $r$ geschnitten werden. Sie bilden also einen *Strahlenbündel*, wenn $p$, $q$, $r$ einen gemeinsamen Punkt haben, ein *Strahlenfeld*, wenn $p$, $q$, $r$ in einer Ebene liegen.

Aus dem Bisherigen folgt, dass, wenn vier Gerade zu einem linearen ebenen Strahlenbüschel gehören, aber keine drei unter ihnen zu einem linearen ebenen Strahlenbüschel gehören, so können die folgenden vier Fälle vorkommen:

1. Die vier Geraden liegen auf einer Fläche zweiten Grades, aber schneiden sich paarweise nicht. *(Hyperbolische Strahlen.)*

2. Die vier Geraden bilden zwei Winkel mit verschiedenen Spitzen und Ebenen, aber in einer solchen Lage, dass die Spitze des einen Winkels in der Ebene des anderen liegt, und umgekehrt. *(Zweiwinklige Strahlen.)*

3. Die vier Geraden haben einen gemeinsamen Punkt. *(Centralstrahlen).*

4. Die vier Geraden liegen in einer Ebene. *(Feldstrahlen.)*

Die Bedingung dafür, dass vier gegebene Geraden zu einem linearen Strahlenbüschel gehören, besteht darin, dass die sämmtlichen Determinanten vierter Ordnung der Matrix von den Liniencoordinaten verschwinden müssen.

## 2. Über die linearen Tetraëder.

Es seien $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ die Eckpunkte und $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ die Seitenflächen von zwei Tetraedern. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass z. B.

$$\alpha_4 = A_1A_2A_3$$

sei. Entsprechende Elemente sollen gleiche Indices haben.

Wählen wir das erste Tetraeder zum Coordinatentetraeder und so seien die Coordinaten der Eckpunkte:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{matrix}.$$

Da auch das zweite Tetraeder ein wahres ist, so verschwindet die Determinante $B = |b_{ik}|$ nicht.

Die Coordinaten der Seitenflächen sind

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{matrix}$$

wo $B_{ik}$ die Unterdeterminante von $b_{ik}$ in $B$ bedeutet.

Wir setzen voraus, dass keines von den Elementen $b_{ik}\, B_{ik}$ verschwindet, dass also keiner von den Eckpunkten des einen Tetraeders in einer Seitenfläche des anderen Tetraeders liegt. Dadurch wird es auch ausgesprochen, dass keine drei unter den Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte in einer Ebene liegen und keine drei unter den Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen durch einen Punkt durchgehen.

Die Liniencoordinaten der Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte sind (wenn man dieselben nach der Reihenfolge

$$p_{23}\ p_{31}\ p_{12}\ p_{14}\ p_{24}\ p_{34}$$

aufzählt)

$$\begin{matrix} 0 & -b_{13} & b_{12} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{23} & 0 & -b_{21} & 0 & b_{24} & 0 \\ -b_{32} & b_{31} & 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{matrix}.$$

Die vier Geraden gehören zu einem linearen Strahlenbüschel, wenn jede Determinante vierter Ordnung aus dieser Matrix verschwindet. Dies führt zu den folgenden 7 Gleichungen:

$$(1) \qquad b_{12}\, b_{23}\, b_{31} = b_{13}\, b_{32}\, b_{21}$$
$$(2) \qquad b_{13}\, b_{34}\, b_{41} = b_{14}\, b_{43}\, b_{31}$$
$$(3) \qquad b_{14}\, b_{42}\, b_{21} = b_{12}\, b_{24}\, b_{41}$$
$$(4) \qquad b_{23}\, b_{34}\, b_{42} = b_{24}\, b_{43}\, b_{32}$$
$$(5) \qquad b_{12}\, b_{23}\, b_{34}\, b_{41} = b_{14}\, b_{43}\, b_{32}\, b_{21}$$
$$(6) \qquad b_{13}\, b_{34}\, b_{42}\, b_{21} = b_{12}\, b_{24}\, b_{43}\, b_{31}$$
$$(7) \qquad b_{14}\, b_{42}\, b_{23}\, b_{31} = b_{13}\, b_{32}\, b_{24}\, b_{41}.$$

Die vier letzten Gleichungen folgen aber aus den drei ersten. Nämlich:

(4) folgt aus der Multiplication von (1), (2) und (3),
(5) « « « « « (1) und (2),
(6) « « « « « (2) « (3),
(7) « « « « « (3) « (1).

Weil die Coordinaten homogen sind und der Voraussetzung nach nicht verschwinden, können sie immer so eingerichtet werden, dass

$$b_{21} = b_{12}, \quad b_{31} = b_{13}, \quad b_{41} = b_{14}$$

seien. Dann sind aber nach (1), (2) und (3) zugleich

$$b_{23} = b_{32}, \quad b_{34} = b_{43}, \quad b_{42} = b_{24},$$

d. h., $B$ ist eine symmetrische Determinante.

Ebenso besteht die Bedingung dafür, dass die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen zu einem linearen Strahlenbüschel gehören, darin, dass man die Determinante aus den Elementen $B_{ik}$ durch Multiplication der Reihen mit passend gewählten Factoren in eine symmetrische Determinante umwandeln könne. Die adjungierte und die ursprüngliche Determinante sind aber zu gleicher Zeit symmetrisch, woraus folgt, dass:

«Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte einem linearen Strahlenbüschel angehören, so gehören die Schnittlinien der entspechenden Seitenflächen wieder einem linearen Strahlenbüschel an —, und umgekehrt.»

Wenn aber die Relationen $b_{ik} = b_{ki}$ bestehen, so sind die

beiden Tetraeder polarreciprok in Bezug auf die Fläche zweiten Grades, deren Gleichung in Ebenencoordinaten lautet:

$$\Sigma b_{ik} u_i u_k = 0.$$

Es besteht also auch folgender Satz:

Ein Tetraeder steht mit seinem polarreciproken in linearer Beziehung.*

Um die verschiedenen Arten der linearen Tetraeder unterscheiden zu können, bemerken wir, dass die Geraden $A_1B_1$ und $A_2B_2$ sich schneiden, wenn

$$b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = 0$$

nach den Relationen $b_{ik} = b_{ki}$ schneiden sich dann auch $A_3B_3$ und $A_4B_4$.

$A_1B_1$, $A_3B_3$ einerseits, $A_2B_2$, $A_4B_4$ andererseits schneiden sich, wenn

$$b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32} = 0.$$

$A_1B_1$, $A_4B_4$ einerseits, $A_2B_2$, $A_3B_3$ andererseits schneiden sich, wenn

$$b_{12}b_{43} - b_{13}b_{42} = 0.$$

Die eine Gleichung ist eine Folge der beiden anderen.

Es sei noch zu bemerken, dass unter den Gleichungen

$$b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = 0, \quad B_{31}B_{42} - B_{32}B_{41} = 0$$

die eine eine Folge der anderen ist, woraus folgt, dass wenn $A_1B_1$, $A_2B_2$ sich schneiden, so schneiden sich auch $\alpha_3\beta_3$ und $\alpha_4\beta_4$.

Aus dem bisherigen folgt, dass man die folgenden drei Arten von linearen Beziehungen unterscheiden kann:

1. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte, so wie auch die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen sind hyperbolische Strahlen. *(Hyperbolische Beziehung.)* **

---

* Dieser Satz in einer anderen Formulierung rührt von CHASLES her. Siehe SALMON-FIEDLER. Analytische Geometrie des Raumes. Band I. Seite 180 und die beigefügte Notiz.

** Dieser Teil des Satzes rührt von O. HERMES her. (Crelle-Journal, Band 56.)

2. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte, so wie auch die Schnitlinien der entsprechenden Seitenflächen sind zweiwinklige Strahlen. *(Zweiwinklige Beziehung.)*

3. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte sind Centralstrahlen, die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen sind Feldstrahlen. *(Perspective Beziehung.)*

## 3. Über die mehrfach linearen Tetraëder.

Die Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ seien in linearer Beziehung nach der durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4 \end{pmatrix}$$

dargestellten Art, wo die entsprechenden Elemente in einer Colonne stehen.

Es fragt sich, ob es ausser dieser Beziehung, welche die *Grundbeziehung* heissen soll, auch noch andere lineare Beziehungen geben kann, wo das Entsprechen der Eckpunkte ein anderes ist.

Wir wollen diejenige Beziehung, deren Symbol aus dem der Grundbeziehung dadurch hergeleitet werden kann, dass man an die Indices der Elemente $B$ die Substitution $S$ anwendet, *die Beziehung* $S$ nennen. Hiernach wird das neue Zeichen der Grundbeziehung 1 sein, als das Zeichen der identischen Substitution.

Man erhält die Bedingungen für die Beziehung $S$, wenn man in den Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{12}b_{23}b_{31} &= b_{13}b_{32}b_{21} \\ b_{13}b_{34}b_{41} &= b_{14}b_{43}b_{31} \\ b_{14}b_{42}b_{21} &= b_{12}b_{24}b_{41} \\ b_{23}b_{34}b_{42} &= b_{24}b_{43}b_{32} \end{aligned}$$

deren eine eine Folge der drei anderen ist, an die ersten Indices die Substitution $S$ anwendet und nachher die Relationen $b_{ik}=b_{ki}$ benutzt, welche die Existenz der Grundbeziehung aussagen.

Man erhält auf diese Weise

1. Die Bedingungen für die Beziehung (12)

$$b_{13}\,b_{24}-b_{14}\,b_{23}=0$$
$$b_{11}\,b_{23}^2-b_{22}\,b_{13}^2=0$$
$$b_{11}\,b_{24}^2-b_{22}\,b_{14}^2=0,$$

deren letzte eine Folge der beiden ersten ist.

Die erste Gleichung zeigt, dass in diesem Falle weder die Grundbeziehung, noch die Beziehung (12) hyperbolisch sein kann.

2. Die Bedingungen für die Beziehung (12) (34), sind

$$b_{11}\,b_{23}\,b_{24}=b_{22}\,b_{13}\,b_{14}$$
$$b_{33}\,b_{41}\,b_{42}=b_{44}\,b_{31}\,b_{32}.$$

3. Die Bedingungen für die Beziehung (123) sind

$$b_{11}\,b_{24}\,b_{34}=b_{14}^2\,b_{23}$$
$$b_{22}\,b_{34}\,b_{14}=b_{24}^2\,b_{31}$$
$$b_{33}\,b_{14}\,b_{24}=b_{34}^2\,b_{12}.$$

4. Die Bedingungen für die Beziehung (1234) sind

$$b_{11}\,b_{22}\,b_{34}=b_{12}\,b_{13}\,b_{24}$$
$$b_{22}\,b_{33}\,b_{41}=b_{23}\,b_{13}\,b_{24}$$
$$b_{33}\,b_{44}\,b_{12}=b_{34}\,b_{13}\,b_{24}$$
$$b_{44}\,b_{11}\,b_{23}=b_{41}\,b_{13}\,b_{24},$$

deren eine eine Folge der drei anderen ist.

Aus diesen und den ähnlichen Bedingungen liest man die folgenden Zusammenhänge heraus:

1. Unter den Beziehungen (12), (23), (31) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

2. Unter den Beziehungen (12), (34), (12) (34) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

3. Unter den Beziehungen (12) (34), (13) (24), (14) (23) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

4. Unter den Beziehungen (123), (132) ist die eine eine Folge der anderen.

5. Unter den Beziehungen (123), (234), (14) (23) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

6. Die Beziehung (1234) zieht die Beziehungen (1432) und (13) (24) nach sich.

Wir teilen die Arten der mehrfachen Linearität folgender Weise in drei Gruppen ein:

1. Unter den vorhandenen Beziehungen gibt es mindestens eine perspective. Wir wählen eine solche zur Grundbeziehung.

2. Unter den vorhandenen Beziehungen gibt es keine perspective, wol aber mindestens eine zweiwinklige. Wir wählen eine solche zur Grundbeziehung.

3. Die vorhandenen Beziehungen sind sämmtlich hyperbolisch.

## I.

Es sei die Grundbeziehung perspectiv. Wählen wir das Perspectivcentrum zum Einheitspunkte des Coordinatensystems und so seien die Coordinaten von $B_1B_2B_3B_4$

$$\begin{matrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \nu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \varrho. \end{matrix}$$

Damit die Punkte verschieden seien, darf höchstens eine der Zahlen $\lambda\mu\nu\varrho$ eins sein. Dies wird vorausgesetzt.

1. Die Bedingung für die Beziehung (12) ist

$$\lambda = \mu.$$

2. Die Bedingungen für die Beziehung (12) (34) sind

$$\lambda=\mu,\ \nu=\varrho.$$

3. Die Bedingungen für die Beziehung (1234) sind

$$\lambda = \frac{1}{u} = \nu = \frac{1}{\varrho}.$$

4. Die Bedingungen für die Beziehung (123) sind

$$\lambda=\mu=\nu=1.$$

Dieser Fall ist also auszuschliessen.

Man erhält die sämmtlichen Fälle, wenn man diese und die ähnlichen Bedingungen combiniert. Wir führen nur die wesentlich verschiedenen Fälle vor und lassen die ähnlichen Fälle durch einen von ihnen repräsentieren.

Die vorhandenen Beziehungen sind:

2. Die perspective Beziehung 1 und die zweiwinklige Beziehung (12), wenn

$$\lambda=\mu,\ \nu \text{ und } \varrho$$

von diesen und von einander verschieden sind;

1. Die perspective Beziehung 1 und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (23), (31), wenn

$$\lambda=\mu=\nu \gtrless \varrho$$

sind.

3. Die perspective Beziehung 1 und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (34), (12) (34), wenn

$$\lambda=\mu \gtrless \nu=\varrho \gtrless \frac{1}{\lambda}$$

sind;

4. Die perspectiven Beziehungen 1 und (13) (24), die zweiwinkligen Beziehungen (13) und (24), die hyperbolischen Beziehungen (1234) und (1432), wenn

$$\lambda=\frac{1}{\mu}=\nu=\frac{1}{\varrho} \gtrless -1$$

sind;

5. Die perspective Beziehung 1 und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12) (34), (13) (24), (14) (23), wenn

$$\lambda=\mu=\nu=\varrho \gtrless -1$$

sind.

6. Die perspectiven Beziehungen 1, (12) (34), (13) (24), (14) (23)

und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (13), (14), (23), (24), (34), (1324), (1423), (1234), (1432), (1243), (1342), wenn

$$\lambda=\mu=\nu=\varrho=-1\ ^*$$

sind.

Die Zahlen der Mehrfachheit bei dieser Gruppe sind also

$$2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16.$$

## II.

Die Grundbeziehung sei zweiwinklig, und zwar so, dass $A_1B_1A_2B_2$ und $A_3B_3A_4B_4$ sich schneiden.

Wählen wir den Schnittpunkt der Geraden $A_1B_1$ und $A_2B_2$ zum Einheitspunkte des Coordinatensystems und so seien die Coordinaten von $B_1B_2B_3B_4$

$$\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \nu & a \\ 1 & 1 & a & \varrho. \end{array}$$

Damit die Beziehung nicht perspectiv sei, soll $a \gtrless 1$ sein. Damit die Punkte verschieden seien, sind die Fälle

$$\lambda=\mu=1,\ \nu=\varrho=a$$

auszuschliessen.

Wir setzen voraus, dass keine der vorhandenen Beziehungen perspektiv ist und deshalb schliessen wir die Fälle

$$\lambda=\mu=\frac{1}{a},\ \nu=\varrho=1$$

aus, denn im ersten Falle wäre die Beziehung (12), im zweiten Falle die Beziehung (34) perspectiv.

---

* Die mehrfach perspectiven Tetraëder habe ich schon bei einer früheren Gelegenheit aufgesucht. (Diese Berichte, Bd. IV. pp. 1—6. 1886.) Die zweiwinkligen und hyperbolischen Beziehungen sind aber damals ausser Acht geblieben.

1. Die Bedingung für die Beziehung (12) ist

$$\lambda = \mu.$$

2. Die Bedingung für die Beziehung (34) ist

$$\nu = \varrho.$$

3. Die Bedingungen für die Beziehung (13) sind

$$\lambda = \nu, \ a = 1.$$

Dieser Fall ist also auszuschliessen, so wie auch (14), (23), (24).

4. Die Bedingungen für die Beziehung (123) sind

$$\lambda a = \mu a = 1, \ \nu = a^2.$$

Dieser Fall ist also auch auszuschliessen, so wie auch alle diejenigen, deren Zeichen aus einer Cykle mit drei Elementen bestehen.

5. Die Bedingungen für die Beziehung (12) (34) sind

$$\lambda = \mu, \ \nu = \varrho.$$

6. Die Bedingungen für die Beziehung (13) (24) sind

$$a\lambda = \nu, \ a\mu = \varrho.$$

7. Die Bedingungen für die Beziehung (1324) sind

$$\lambda = \mu = \frac{a}{\nu} = \frac{a}{\varrho}.$$

8. Die Bedingungen für die Beziehung (1234) sind

$$a\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{a}{\varrho}.$$

Wir führen wieder nur die wesentlich verschiedenen Fälle vor.

Die vorhandenen Beziehungen sind:

1. Die zweiwinklige Beziehung 1 und die hyperbolische Beziehung (13) (24), wenn

$$a\lambda = \nu \gtrless a\mu = \varrho, \ 1 \gtrless a\lambda\mu \gtrless a.$$

2. Die zweiwinkligen Beziehungen 1 und (13) (24), wenn

$$a\lambda = \nu \gtrless a\mu = \varrho, \quad \lambda\mu = 1.$$

3. Die zweiwinkligen Beziehungen 1 und (13) (24), die hyperbolischen Beziehungen (1234) und (1432), wenn

$$a\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{a}{\varrho}, \quad 1 \gtrless \lambda \gtrless \mu \gtrless 1.$$

4. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (13) (24), (1234) und (1432), wenn

$$a\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{a}{\varrho} = a.$$

5. Die zweiwinkligen Beziehungen 1 und (12), wenn

$$\lambda = \mu, \quad \nu \gtrless \varrho.$$

6. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34) und (12) (34) wenn

$$\lambda = \mu, \quad \nu = \varrho, \quad a\lambda \gtrless \nu \gtrless \frac{a}{\lambda}, \quad \lambda\nu \gtrless 1.$$

7. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34), (12) (34) und die hyperbolischen Beziehungen (1324) (1423), wenn

$$\lambda = \mu = \frac{a}{\nu} = \frac{a}{\varrho} \gtrless -1.$$

8. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34), (12) (34) und die hyperbolischen Beziehungen (13) (24), (14) (23), wenn

$$a\lambda = a\mu = \nu = \varrho \gtrless -a, \quad a\lambda^2 \gtrless 1.$$

9. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34), (12) (34), (13) (24), (14) (23), (1324), (1423), wenn

$$a\lambda = a\mu = \nu = \varrho = -a \gtrless \pm 1.$$

Die Zahlen der Vielfachheit sind also bei dieser Gruppe

2, 4, 6, 8.

## III.

Wenn die vorhandenen Beziehungen sämmtlich hyperbolisch sind, so kann unter den Zeichen keine einfache Transposition vorkommen.

Nehmen wir zuerst den Fall, wo neben der Grundbeziehung auch die Beziehung (13) (24) vorhanden ist.

Wenn man den Punkt $B_1$ zum Einheitspunkt wählt, sind die Coordinaten von $B_1B_2B_3B_4$ nach den, die Beziehung (13) (24) charakterisierenden Bedingungen

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c\lambda & c & b \\ 1 & c & ac & a \\ 1 & b & a & a\lambda. \end{matrix}$$

Die Beziehungen sind hyperbolisch, wenn $a$, $b$, $c$ verschieden und $a\lambda \gtrless 1$, $c\lambda \gtrless 1$ sind.

1. Auch die Beziehungen (12) (34), (14) (23) sind vorhanden, wenn $\lambda = b$ ist.

2. Auch die Beziehungen (1234), (1432) sind vorhanden, wenn $\lambda = \frac{b}{ac}$ ist.

3. Auch die Beziehungen (234), (243), (124), (142) sind vorhanden, wenn

$$\lambda = -1,\ a+c=0,\ ac=b$$

sind.

Wir führen wieder nur die wesentlich verschiedenen Fälle vor und fügen die Bedingungen hinzu, dass die Beziehungen hyperbolisch und ausser ihnen keine weiteren vorhanden seien.

Die vorhandenen Beziehungen sind:

1. Die hyperbolischen Beziehungen 1 und (13) (24), wenn die Bedingungen der folgenden Nummern nicht erfüllt sind;

2. die hyperbolischen Beziehungen 1, (1234), (13) (24), (1432) wenn

$$\lambda = \frac{b}{ac} \text{ und } b,\ ac,\ 1$$

von einander verschieden sind;

3. die hyperbolischen Beziehungen 1, (12) (34), (13) (24), (14) (23), wenn

$$\lambda = b, \text{ und } bc,\ ca,\ ab \text{ von } 1$$

verschieden sind;

4. die hyperbolischen Beziehungen 1, (13) (24), (234), (243), (124), (142), wenn

$$\lambda = -1,\ a+c=0,\ ac=b$$

sind.*

Ein einziger Fall blieb noch übrig, wo die Substitutions-Zeichen der ausser der Grundbeziehung vorhandenen Beziehungen aus einer Cykle mit drei Elementen bestehen.

Wählen wir zum Repräsentanten den Fall, wo neben der Grundbeziehung die Beziehungen (234), (243) auftreten. Wenn man den Punkt $B_1$ zum Einheits-Punkt wählt, sind die Coordinaten von $B_1B_2B_3B_4$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & a \\ 1 & c & a & b \end{matrix}$$

Die Beziehungen sind hyperbolisch und ausser ihnen sind keine anderen vorhanden, wenn $a$, $b$, $c$ verschieden sind und keiner der Gleichungenpaare

$$\begin{matrix} b+c=0 & bc=a \\ c+a=0 & ca=b \\ a+b=0 & ab=c \end{matrix}$$

erfüllt ist.

Die Zahlen der Mehrfachheit bei dieser Gruppe sind also

$$2,\ 3,\ 4,\ 6.$$

---

* In einer solchen Beziehung stehen zwei Tetraden desselben Netzes auf einer Raumcurve vierter Ordnung vom ersten Geschlechte. (Diese Berichte Bd. X. Seite 186, 1893.)

Ich bemerke noch, dass dieselbe mehrfache Linearität auf mehrerlei Arten durch Substitutions-Zeichen charakterisiert werden können, denn eine jede der vorhandenen Beziehungen kann zur Grundbeziehung gewählt werden. Aber der Uebergang von dem einen Zeichen-System zum anderen kann sehr einfach geschehen.

Wenn man zur neuen Grundbeziehung diejenige wählt, deren altes Zeichen $S$ war, so wird das neue Zeichen der alten Grundbeziehung $S^{-1}$ sein, das neue Zeichen aber derjenigen Beziehung, deren altes Zeichen $S_1$ war, wird $S_1 S^{-1}$ sein, wo die Reihenfolge der Multiplication von rechts nach links zu verstehen ist.

9.

# MEHRFACH LINEARE TETRAËDER AUF EINER RAUMCURVE VIERTER ORDNUNG VOM ERSTEN GESCHLECHTE.*

Von Dr. JULIUS VÁLYI,

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KOLOZSVÁR (KLAUSENBURG).

Vorgelegt in der Sitzung der Akademie vom 13. März 1893 vom o. M. *Julius König*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XI, pp. 322—326. 1893.

Die parametrische Darstellung einer Raumcurve vierter Ordnung vom ersten Geschlechte lautet bei einem passend gewählten Coordinatensystem folgenderweise:

$$x : y : z : t = p(u)^2 : p'(u) : p(u) : 1.$$

Wir werden die Punkte der Curve mit den entsprechenden Werten des Parameters bezeichnen.

Wir betrachten nur solche lineare Beziehungen, wo die Eckpunkte beider Tetraëder auf der Curve liegen und die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte demselben Sehnensystem angehören. Um eine solche lineare Beziehung von anderen, etwa vorhandenen, Beziehungen zu unterscheiden, nennen wir diese eine *chordale* Beziehung.

Wenn die Eckpunkte der beiden Tetraëder $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ und $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ sind, so sind die Bedingungen der

---

* Dieser Aufsatz bildet eine Fortsetzung einerseits zur Mitteilung über die Raumcurven vierter Ordnung vom ersten Geschlechte (Mathem. u. Naturw. Berichte aus Ungarn Bd. X. Seite 181—188), andererseits zur Mitteilung über das räumliche Analogon des Desargues'schen Satzes. (Dieser Band dieser Berichte Seite 145). Die dort benützten Bezeichnungen und Erklärungen gebrauche ich auch jetzt.

$$\begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 u_4 \\ v_1 v_2 v_3 v_4 \end{pmatrix}$$

chordalen Beziehung

$$u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_2 \equiv u_3 + v_3 \equiv u_4 + v_4 \equiv c.$$

Wenn $2c$ nicht $\equiv 0$ ist, so ist die Beziehung hyperbolisch, wenn $2c \equiv 0$ ist, so ist die Beziehung perspectiv. Das Perspectivcentrum fällt mit der Spitze eines der vier Kegel zweiter Ordnung zusammen, welche durch die Curve hindurchgehen.

Wir nennen diese kurz *Kegelspitzen* und bezeichnen sie mit den Parametern der entsprechenden kegeligen Sehnensysteme $(0, \omega, \omega', \omega+\omega')$. Wir nennen die übrigen Glieder des durch die Curve gehenden Flächenbüschels zweiter Ordnung *Hyperboloide.*

Weil der Parameter des das eine Tetraeder in das andere projicirenden Sehnensystems schon durch ein Paar entsprechender Eckpunkte bestimmt wird, kann unter den Substitutionszeichen der neben der Grundbeziehung auftretenden chordalen Beziehungen weder eine Transposition, noch eine Cykle mit drei Elementen vorkommen. Die Zahl der Mehrfachheit der chordalen Beziehung kann höchstens vier sein.

## I.

Neben der Grundbeziehung tritt auch die chordale Beziehung (12) (34) auf, wenn die Congruenzen

$$u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_2 \equiv u_3 + v_3 \equiv u_4 + v_4 \equiv c_1$$
$$u_1 + v_2 \equiv u_2 + v_1 \equiv u_3 + v_4 \equiv u_4 + v_3 \equiv c_2$$

gleichzeitig bestehen, wo $c_1$ und $c_2$ incongruent sind.

Hieraus folgen

$$u_2 - u_1 \equiv u_4 - u_3 \equiv c_2 - c_1 \equiv c_1 - c_2$$

und

$$2(c_2 - c_1) \equiv 0,$$

also ist $c_2 - c_1 \equiv \omega$, oder $\omega'$, oder $\omega+\omega'$.

Bezeichnen wir eines von diesen mit $\tilde{\omega}$, so sind die Eckpunkte des ersten Tetraëders

$$u_1,\ u_1+\tilde{\omega},\quad u_3,\ u_3+\tilde{\omega},$$

d. h. $u_1u_2$ und $u_3u_4$ sind Duaden aus demselben Netze. Zwei solche Duaden nennen wir ein *Duadenpaar*.

Wenn man ein Duadenpaar durch irgend ein Sehnensystem auf die Curve projicirt, erhält man ein mit dem ersten zweifach lineares Duadenpaar. Denn aus den Congruenzen

$$u_1+v_1\equiv u_1+\tilde{\omega}+v_2\equiv u_3+v_3\equiv u_3+\tilde{\omega}+v_4\equiv c_1$$

folgen

$$u_1+v_2\equiv u_1+\tilde{\omega}+v_1\equiv u_3+v_4\equiv u_3+\tilde{\omega}+v_3\equiv c_1+\tilde{\omega}.$$

Die beiden Beziehungen sind zugleich hyperbolisch oder perspectiv. Die Perspectivcentren sind entweder die Kegelspitzen 0, $\tilde{\alpha}$ oder $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'$, wenn $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ ein primitives Periodenpaar bilden.

Der Fall verdient besonders bemerkt zu werden, wo die projicirenden Sehnensysteme conjugirt sind, d. h. auf einem Hyperboloide liegen.

Die Bedingung dafür ist

$$2c_1+\tilde{\omega}\equiv 0.$$

Die hieraus folgenden Werte

$$\frac{\tilde{\omega}}{2},\quad -\frac{\tilde{\omega}}{2},\quad \frac{\tilde{\omega}}{2}+\tilde{\omega}',\quad -\frac{\tilde{\omega}}{2}+\tilde{\omega}'$$

sind paarweise Parameter von conjugirten Sehnensystemen.

Also gehören zwei Hyperboloide zum Netze $\tilde{\alpha}$ mit der Eigenschaft, dass jedes Duadenpaar des Netzes durch die conjugirten Sehnensysteme irgend eines der beiden Hyperboloide in dasselbe Duadenpaar projicirt wird.

Zu den drei Duadennetzen gehören zusammen sechs solche Hyperboloide. Die Parameter ihrer conjugirten Sehnensysteme sind die 12 primitiven Viertelperioden.

## II.

Neben den chordalen Beziehungen 1 und (12) (34) tritt auch die chordale Beziehung (13) (24) auf, wenn nicht bloss $u_1u_2$ und $u_3u_4$, sondern auch $u_1u_3$ und $u_2u_4$ Duadenpaare sind. Die Eckpunkte eines solchen Tetraëders sind

$$u_1, \quad u_1+\omega, \quad u_1+\omega', \quad u_1+\omega+\omega'.$$

Dann bilden aber auch $u_1u_4$ und $u_2u_3$ ein Duadénpaar, folglich tritt auch die Beziehung (14) (23) auf. Also ist die chordale Beziehung vierfach.

Die vier Punkte sind dadurch charakterisirt, dass die zugehörigen Tangenten zu demselben Sehnensystem gehören. Vier solche Punkte nennt man ein *Quadrupel.*

Jeder Punkt der Curve gehört einem Quadrupel an.

Irgend zwei Quadrupel sind vierfach linear. Die Parameter der projicirenden Sehnensysteme sind

$$c, \; c+\omega, \; c+\omega', \; c+\omega+\omega'.$$

Die vier Beziehungen sind also entweder sämmtlich hyperbolisch oder sämmtlich perspectiv.*

Irgend ein der im Paragraph I. erwähnten Hyperboloidenpaare projicirt durch seine conjugirten Sehnensysteme ein Quadrupel in dasselbe Quadrupel.

## III.

Die chordalen Beziehungen 1, (1234), (13) (24), (1432) treten bei Tetraden desselben Netzes auf. Bezeichnen wir diese Beziehungen mit 1, 2, 3, 4.

---

* Die bisher erwähnten Sätze über Quadrupel wurden rein geometrisch von H. SCHRÖTER bewiesen. (Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species. 1890.)

Die Eckpunkte zweier solcher Tetraden sind

$$u, \quad u+\varepsilon, \quad u+2\varepsilon, \quad u+3\varepsilon,$$
$$v, \quad v+3\varepsilon, \quad v+2\varepsilon, \quad v+\varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ eine primitive Viertelperiode bezeichnet.

Die Parameter der projicirenden Sehnensysteme sind

$$c_1 \equiv u+v, \quad c_2 \equiv c_1+3\varepsilon, \quad c_3 \equiv c_1+2\varepsilon, \quad c_4 \equiv c_1+\varepsilon.$$

Hieraus

$$2c_1 \equiv 2c_3 \equiv c_2+c_4,$$
$$2c_2 \equiv 2c_4 \equiv c_1+c_3,$$

d. h. die Beziehungen 1 und 3, 2 und 4 sind von gleicher Art. Wenn aber zwei Beziehungen perspectiv sind, so sind die projicienden Sehnensysteme der beiden anderen Beziehungen conjugirt.

Die Perscpetivcentren bei dem Netze $\varepsilon$ sind entweder die Kegelspitzen 0, $2\varepsilon$ oder $2\varepsilon'$, $2\varepsilon+2\varepsilon'$ wenn $4\varepsilon$, $4\varepsilon'$ ein primitives Periodenpaar bezeichnen.

Zu jeder Tetrade gehören zwei mit ihr zweifach perspective Tetraden. In dieselbe Tetraden werden sie durch die conjugirten Sehnensysteme der beiden Hyperboloide projicirt, welche nach dem Paragraph I. zum Duadennetze $2\varepsilon$ gehören.

Es bestehen auch die Congruenzen

$$c_1+c_2 \equiv c_3+c_4$$
$$c_1+c_4 \equiv c_2+c_3.$$

Folglich wenn die projicirenden Sehnensysteme der Beziehungen 1 und 2, oder 1 und 4 conjugirt sind, so sind es auch diejenigen der beiden anderen Beziehungen.

Die Bedingung hierfür ist

$$2c_1+3\varepsilon \equiv 0 \quad \text{oder} \quad 2c_1+\varepsilon \equiv 0.$$

Unter den entsprechenden Werten

$$\frac{\varepsilon}{2}, \ \frac{3\varepsilon}{2}, \ \frac{5\varepsilon}{2}, \ \frac{7\varepsilon}{2}; \ \frac{\varepsilon}{2}+2\varepsilon', \ \frac{3\varepsilon}{2}+2\varepsilon', \ \frac{5\varepsilon}{2}+2\varepsilon', \ \frac{7\varepsilon}{2}+2\varepsilon'$$

sind die vier ersten und die vier letzten Parameter von in dieselbe Tetrade projicirenden Sehnensystemen, welche zugleich paarweise conjugirt sind.

Zu jedem Tetradennetze gehören also zwei Paare von Hyperboloiden mit der Eigenschaft, dass jedes Paar irgend eine Tetrade des Netzes durch ihre conjugirten Sehnensysteme in dieselbe Tetrade projicirt.

Zu den 6 Tetradennetzen zusammen gehören 24 solche Hyperboloide. Die Parameter ihrer conjugirten Sehnensysteme sind die 48 primitiven Achtelperioden.

10.

# ÜBER DIE POLARRECIPROKEN TETRAËDER.

Von Dr. JULIUS VÁLYI,

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KOLOZSVÁR (KLAUSENBURG).

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XII, pp. 93—95. 1894.

Ein Tetraëder steht mit seinem polarreciproken in linearer Beziehung.*

Es fragt sich, ob diese Beziehung hyperbolisch, zweiwinklig oder perspectiv sei?

Es seien gegeben eine Fläche zweiten Grades und drei Eckpuncte ($A$, $B$, $C$,) eines Tetraëders. Setzen wir voraus, dass die Ebene $A\ B\ C$ die Fläche nicht berühre.

Nehmen wir die Punkte $A$, $B$, $C$ zu Grundpunkten des Coordinatensystems. Der vierte Grundpunkt sei der Pol der Ebene $A\ B\ C$, welcher den vierten Eckpunkt ($D_1$) des polarreciproken Tetraëders bildet.

Die Gleichung der Fläche in Ebencoordinaten ($u$, $v$, $w$, $s$) wird folgende Form haben:

$$a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2+2a_{23}vw+2a_{31}wu+2a_{12}uv+s^2=0.$$

Wenn man zum vierten Endpunkt den Punkt ($\xi$, $\eta$, $\zeta$, 1) wählt, so sind die Eckpunkte des polarreciproken Tetraëders

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & -\xi \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & -\eta \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & -\zeta \\ 0, & 0, & 0, & 1. \end{matrix}$$

* Diese Berichte, Band XIII. p. 151, 1896.

Die beiden Tetraëder stehen in einer hyperbolischen, zweiwinkligen oder perspectiven Beziehung, je nach dem von den Gleichungen

$$a_{31}\eta - a_{12}\zeta = 0$$
$$a_{12}\zeta - a_{23}\xi = 0$$
$$a_{23}\xi - a_{31}\eta = 0$$

keine, oder nur eine, oder alle drei erfüllt sind.

1. Wenn $a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$ sind, d. h. die Punkte $A$, $B$, $C$ paarweise conjugiert sind, so steht das Tetraëder $ABCD$, wenn $D$ ein beliebiger Punkt ist, mit seinem polarreciproken in einer perspectiven Beziehung.

2. Wenn von den Grössen $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{12}$ nur zwei verschwinden, z. B. $a_{23}=a_{31}=0$, d. h. der Punkt $C$ und die Gerade $AB$ conjugiert sind, so steht $ABCD$ mit seinem polarreciproken

*α)* in einer *perspectiven* Beziehung, wenn der Punkt $D$ in der Ebene $ABD_1$ liegt,

*β)* in einer *zweiwinkligen* Beziehung in jedem anderen Falle.

3. Wenn unter den Grössen $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{12}$ entweder nur eine oder keine verschwindet, so seien die conjugierten Polaren von $BC$, $CA$, $AB$ mit $a'$, $b'$, $c'$ bezeichnet. Dann sind die Gleichungen

$$a_{31}y - a_{12}z = 0$$
$$a_{12}z - a_{23}x = 0'$$
$$a_{23}x - a_{31}y = 0$$

Gleichungen der Ebenen $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$. Die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden *(p)*.

Das Tetraëder $ABCD$ steht mit seinem polarreciproken

*α)* in einer *perspectiven* Beziehung, wenn der Punkt $D$ in der Geraden $p$ liegt,

*β)* in einer *zweiwinkligen* Beziehung, wenn der Punkt $D$ in einer der Ebenen $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$ liegt,

*γ)* in einer *hyperbolischen* Beziehung in jedem anderen Falle.

Dieselben Sätze gelten auch dann, wenn die Ebene $ABC$ die Fläche berührt.

Die bisherigen Ergebnisse gelten auch im Falle, dass an die Stelle der Fläche ein Kegelschnitt tritt.

Dann wird zwar das polarreciproke des Tetraëders durch vier Punkte der Ebene des Kegelschnittes gebildet, es besteht aber auch jetzt der Satz, dass die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte einem linearen Strahlenbüschel angehören.

Wenn man zum Kegelschnitte den unendlich entfernten imaginären Kreis des Raumes wählt, so sind die Verbindungslinien der Eckpunkte des Tetraëders mit den entsprechenden Punkten der polarreciproken Figur die Höhen des Tetraëders.

Die Ebenen $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$ stehen normal auf die Geraden $BC$, $CA$, $AB$. Die Gerade $p$ steht im Höhenpunkte des Dreiecks $ABC$ auf dessen Ebene senkrecht.

Die Höhen des Tetraëders $ABCD$ sind also *Centralstrahlen*, wenn $D$ auf der Gerade $p$ liegt,

*zweiwinklige Strahlen*, wenn $D$ in einer der Ebenen $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$ liegt,

*hyperbolische Strahlen* in jedem anderen Falle.

Wenn die Geraden $p$, $q$, $r$, $s$ normal auf den Ebenen der Dreiecke $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$ in ihren Höhenpunkten stehen, so schneiden die Geraden jede Höhe des Tetraëders. Daraus folgt, dass diese Geraden wieder einem linearen Strahlenbüschel angehören, welcher mit demjenigen der Höhen von gleicher Art ist.

Wenn die Höhen Centralstrahlen sind, so fallen $p$, $q$, $r$, $s$ mit den Höhen zusammen.

Wenn die Höhen zwei Winkel bilden mit den Spitzen $P_1P_2$ in den Ebenen $\sigma_1\sigma_2$, so bilden die Geraden $p$, $q$, $r$, $s$ ebenfalls zwei Winkel mit den Spitzen $P_1P_2$ in den Ebenen $\sigma_2\sigma_1$.

Wenn die Höhen hyperbolische Strahlen sind, so gehören die Geraden $p, q, r, s$ zu der anderen Schaar der Geraden auf demselben Hyperboloide.

Wenn die zu $p$, $q$, $r$, $s$ resp. parallelen Höhen $p_1$, $q_1$, $r_1$, $s_1$ sind, so schneiden sich die Ebenen $pp_1$, $qq_1$, $rr_1$, $ss_1$ in einem Punkte, nämlich im Mittelpunkte des Hyperboloides der Höhen.

Es sei endlich noch ein Lehrsatz erwähnt, welcher mit Hilfe der vorigen Sätze leicht bewiesen werden kann.

*Wenn die gegenüberliegenden Kanten eines Tetraëders auf einander senkrecht stehen, so liegen die Mittelpunkte der Kanten mit denjenigen Punkten der gegenüberliegenden Kanten, welche*

*von einander die kürzeste Entfernung haben, auf einer Kugel, deren Mittelpunkt im Schwerpunkte des Tetraeders liegt.*

Dieser Satz bildet die räumliche Verallgemeinerung des FEUERBACH'schen Satzes, wenn man denselben folgender Weise formuliert:

*Wenn die gegenüberliegenden Seiten eines ebenen vollständigen Vierecks auf einander senkrecht stehen, so liegen die Mittelpunkte der Seiten mit den Schnittpunkten der gegenüberliegenden Seiten auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Schwerpunkte der vier Eckpunkte liegt.*

---

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA BUDAPEST

Geologische Übersichtskarte
des

# FRUSCAGORA GEBIRGES

nach eigenen Untersuchungen und der Literatur
zusammengestellt von

**Dr. ANTON KOCH Univ. Professor in Klausenburg 1894.**

Maassstab 1 : 100,000.

## FARBEN- und ZEICHEN-ERKLÄRUNG.

- *a* — Bildungen der Jetztzeit (Alluvium).
- *d* — Quartärbildungen (Diluvium): Löss, Sand und Schotter.
- *Pa* — Untere Paludinen-Schichten (Levantische Stufe).
- *Pt* — Valenciennesia- (o. Cement-) u. Cardium-Mergel (Pontische Stufe).
- *cm* — Cerithiumkalk, Mergel und Sandstein (Sarmatische Stufe).
- *lm* — Leythakalk und Mergel (Obere od. II. Mediterranstufe).
- *s* — Kohlenführende Sotzkaschichten (ob. Oligocän-Stufe.)
- *Mc* — Magnesiakalk mit Chalcedonadern.
- *kr* — Glimmeriger Thonmergel, Kalkmergel, Kalkstein, Thonschiefer Sandstein, Conglomerat und Breccie. — Obere Kreide
- $t_2$ — Röthlicher o. grauer, dichter Kalkstein mit Calcitadern.
- $t_1$ — Röthlichgrauer Sandstein u. sandig-glimmeriger Schiefer (Werfener-Schiefer). — Unteres Trias
- *gp* — Vorherrschender Kalkglimmerschiefer u. krystall. Kalk, mit untergeordnetem Phyllit wechsellagernd.
- *gp* — Dieselben Gesteine mit Kieselsäure u. Eisenoxyd stark durchtränkt.
- *pt* — Vorherrschender Phyllit, untergeord. Thon-, Glimmer- u. Chloritschiefer.
- *am* — Amphibolit, eingelagert zwischen Phyllit.
- *gl* — Glaucophanit, eingelagert zwischen Phyllit.
- Ober-mediterr. rhyolithischer Quarztrachyt. (Gänge.)
- *tr* — Obercretaceischer doleritischer Trachyt. (Lager.)
- *s* — Ober cretac. Serpentin-Lager.
- *b* — Diorit und dessen klastische Gebilde (Grüne Schiefer).
- •• Braunkohlen Ausbisse und Schurfstollen.
- # Kohlengrube (Schacht).
- ⚒ Grössere Steinbrüche.

Lith. u. gedr. im kön. Geograph. Institute „Kogutowicz u. Dr° Budapest.

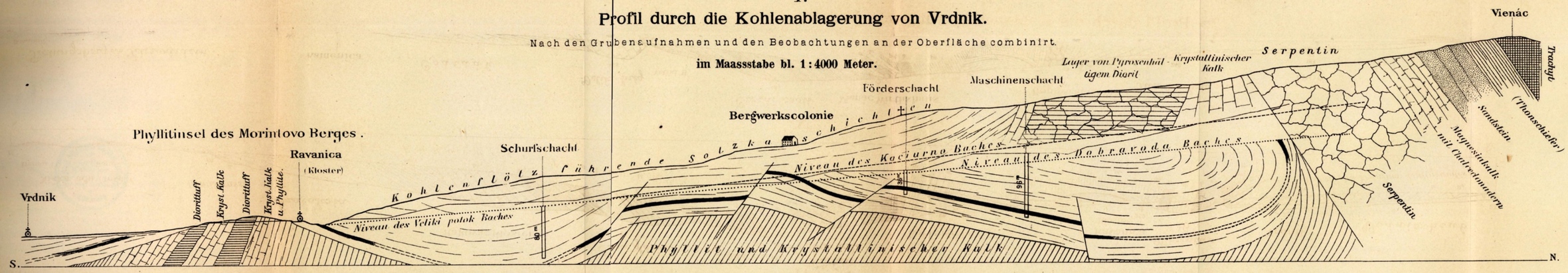
BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

## I.

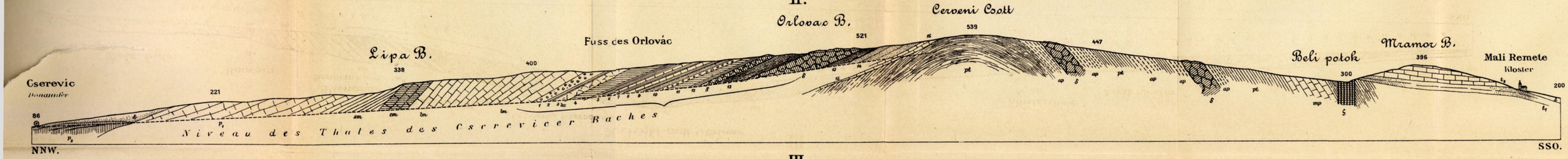
## Profil durch die Kohlenablagerung von Vrdnik.

Nach den Grubenaufnahmen und den Beobachtungen an der Oberfläche combinirt.

**im Maassstabe bl. 1:4000 Meter.**

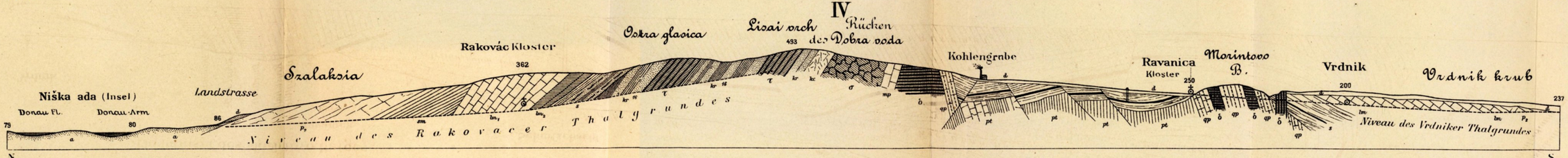



## II.

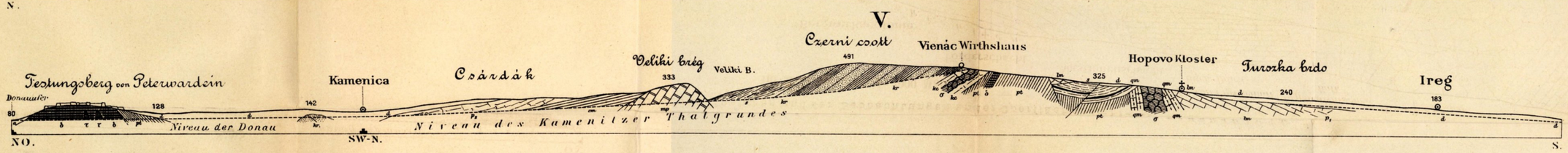



## III.

## IV.




## V.




Maassstab: 500m 4 3 2 1 0 500 1000 1500m zu den Profilen II, III u. IV. 500m 4 3 2 1 0 500 1000 1230m zu dem Profil I. Basis zur Höhe = 1:2.

# GEOLOGISCHE PROFILE AUS DEM FRUSCAGORA GEBIRGE.

**Nach eigenen Untersuchungen und der Literatur ausgeführt von ANTON KOCH, Univ. Professor in Klausenburg 1894.**

### Erklärungen der Buchstaben und Zahlen.

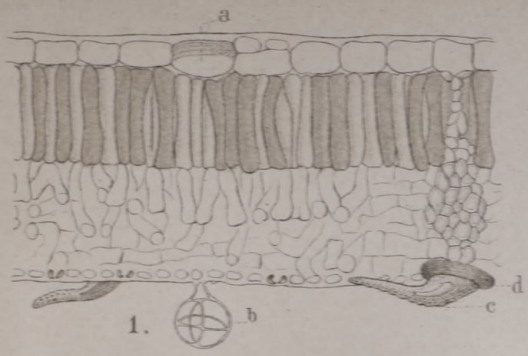
*a* = Jetzige Ablagerungen (Sand, Schlamm, Bachgerölle) Alluvium.
*d* = Quartäre Ablagerungen (Löss, Sand, Gerölle) Diluvium.
$p_2$ = Paludina-Schichten (Levantische Stufe).
$p_1$ = Valenciennesia- (Cement-) und Cardium-Mergel (Pontische Stufe).
*sm* = Tafeliger Mergel } Sarmatische Stufe.
*cm* = Cerithiumkalk }
*lm* = Leythakalk und Mergel ($lm_3$) (ob. Mediterranstufe).
*s* = Kohlenflötze-führende Sotzka-Schichten (ob. oligoc. Stufe).
*q* = Gänge rhyolithischen Quartztrachytes.
Einfache Zahlen bedeuten die Höhe ü. M. der betreffenden Stelle in Metern.

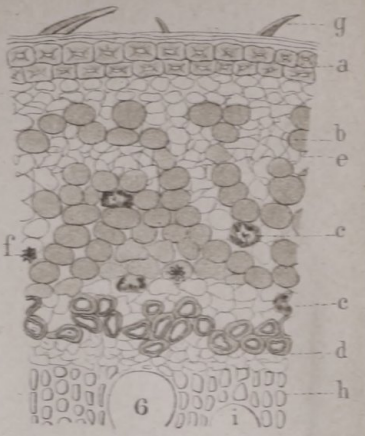
*kr.* = Ober-cretaceische Schichten überhaupt, speciell:
„ 1. = Conglomerat- und Breccien-Bänke.
„ 2. = Grüngetupfter rother Thonschiefer.
„ 3. *kc.* = Magnesitkalk mit Chalcedonadern.
„ 4. = Grüngetupfter, rother glimmeriger Thonschiefer.
„ 5. = Schwarzer, glimmeriger Mergelschiefer, reich an Petrefacten.
„ 6. = Hippuritenkalk-Bank
„ 7. = Sphaerulites-Thonmergel mit Serpentintrümmerchen.
„ 8. = Orbitulites- und Radiolithes-Kalkstein.

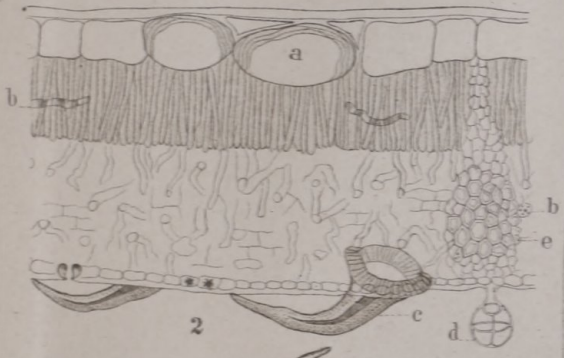
*kr.* 9. = Serpentinsandstein mit Kalkbindemittel und rother Schieferthon.
„ 10. = Sandstein, Conglomerat und dunkelgrauer Schieferthon.
„ 11. = Bläulichschwarzer Thonmergel und mit Brachyopoden erfüllte Serpentinbreccie.
„ 12. = Grauer, harter, tafeliger Kalkmergel.
„ σ = Serpentin-Lager.
„ 13. = Grauer, schieferiger Thonmergel mit einzelnen Kalkbänken.
„ 14. = Wechsellagernde Schichten von grauem Sandstein und Conglomerat, mit rothen Schieferthon-Schichten dazwischen.
„ 15. = Brauner tafeliger Kalk mit Molluskenschalen-Trümmern.
„ 16. = Wechsellagernde Schichten von Sandstein und dunkelgrauem Thonschiefer.

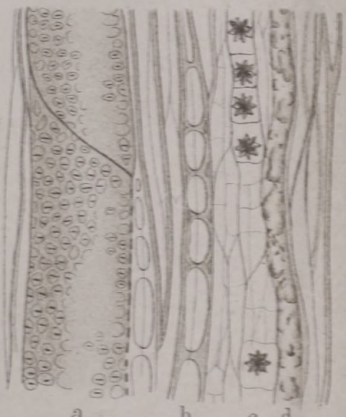
τ = Lager ober-cretaceischen doleritischen Trachytes.
$t_2$ = Untertriadischer Kalk.
$t_1$ = Röthlicher Werfenerschiefer.
*pt* = Vorherrschender Thonglimmerschiefer (Phyllit), untergeordnete Thon-, Glimmer- und Chloritschiefer.
*ap* = Amphibolit-Lager (nach Kispatić).
*gl* = Glaucophanit, eingelagert im Phyllit.
*mp* = Vorherrschender Kalkglimmerschiefer (Kalkphyllit) und kryst. Kalk, untergeordneter Phyllit.
*gp* = Dieselben Schiefergesteine reichlich mit $SiO_2$ und $Fe_2O_3$ durchtränkt.
*ò* = Diorit und dessen Detritusgebilde zwischen Phyllit eingelagert.

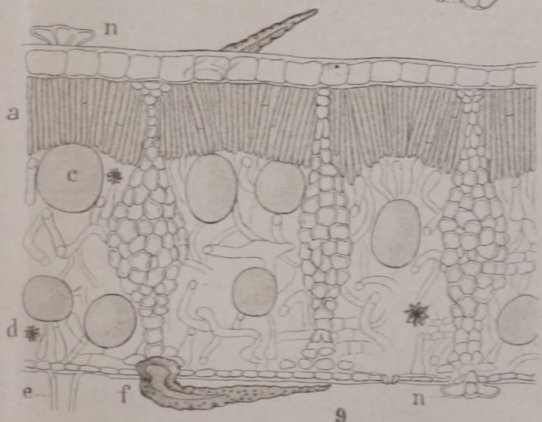
BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

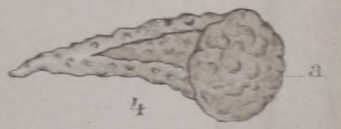


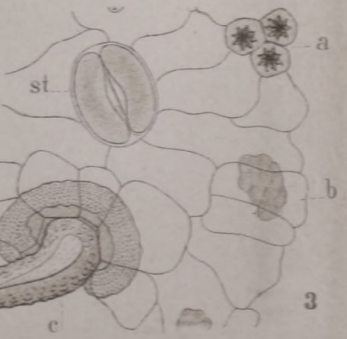



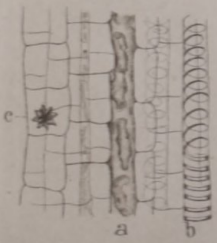



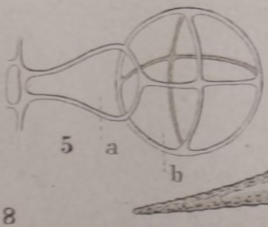




Ad nat. del. Autor

Lith. W. Grund Nachf. Budapest.

Aladár Richter: Antiaris und Artocarpus.

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

*Der Fortbestand der*

MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN

# BERICHTE AUS UNGARN

*ist durch die Munificenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der K. Ung. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft vollständig gesichert.*

Um einem verspäteten Erscheinen vorzubeugen, hat sich die Redaction entschlossen, die Berichte von jetzt ab, nach Maassgabe der einlaufenden Manuscripte, *heftweise* oder wenigstens in Halbbänden erscheinen zu lassen und dürfte der nächste Halbband noch im Sommer dieses Jahres ausgegeben werden.

Preis dieses Halbbandes der

**Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn**

2 fl. 50 kr. ö. W. oder 4 Mark = 5 Francs.

*Im Commissionsverlage von*

R. FRIEDLÄNDER & SOHN, BERLIN,

FRIEDRICH KILIAN, BUDAPEST,

*sind erschienen, und durch jede Buchhandlung zu beziehen:*

## Allgemeine Theorie des Electrodynamometers.

Ein Beitrag zur Anwendung und zur Integration der Differentialgleichungen der electrodynamischen Induction.

Von Dr. **I. Fröhlich,**

ö. ord. Professor an der Universität zu Budapest.

*Von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften aus der Bézsán-Stiftung gekrönte Preisschrift.*

Deutsche Ausgabe.

Gross-Quart, XVIII und 168 Seiten, mit drei Tafeln und Zeichnungen im Texte.

Preis stark cartonnirt 10 Mark.

---

## Monographia Chrysididarum orbis terrarum universi.

Von Alexander Mocsáry,

c. Mitglied der Ung. Akad. der Wissenschaften, Custos-Adjunct am Ung. Nationalmuseum.

Sonderausgabe der III. Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Gross-Quart, XV und 643 Seiten, mit zwei schönen Tafeln.

*Das Werk enthält die Beschreibung von 733 Chrysididenarten aus allen Teilen der Welt.*

Preis 32 Mark.

---

## Aranеæ Hungariæ.

Secundum collectiones a Leone Becker pro parte perscrutatas conscriptæ a Cornelio Chyzer et Ladislao Kulczyński.

*Tomus I.*

Salticoidæ, Oxyopoidæ, Lycosoidæ, Heteropoidæ, Misumenoidæ, Euertrioidæ, Tetragnathoidæ, Uloboroidæ, Pholcoidæ, Scytodoidæ, Urocteoidæ, Eresoidæ, Dictynoidæ.

(Accedunt tabulæ sex.)

*Budapestini 1892. — Editio Academiæ Scientiarum Hungaricæ.*

Preis 10 Mark.

*Tomi II-di pars prior:*

## Theridioidæ.

(Accedunt tabulæ quinque.)

*Budapestini 1894. — Editio Academiæ Scientiarum Hungaricæ.*

Preis 10 Mark.

---

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN.

179

# MATHEMATISCHE
UND
# NATURWISSENSCHAFTLICHE
# BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL v. THAN.

REDIGIRT VON

I. FRÖHLICH.

DREIZEHNTER BAND.

ZWEITE HÄLFTE.

1897.

BERLIN, R. FRIEDLÄNDER & SOHN.

BUDAPEST, FRIEDRICH KILIAN.

In Redactionssachen wende man sich an Prof. Dr. **I. FRÖHLICH**, Budapest, VIII., Eszterházy-utcza 3/b (Physikalisches Institut der Universität).

*Man beachte die Rückseite des Umschlages!*

# INHALT DER ZWEITEN HÄLFTE.


Seite

11. Roland Baron Eötvös: Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus (Vorläufige Mitteilung) ... 193
12. Julius Vályi: Ueber die mehrfachen Involutionen. Erste Mitteilung ... 244
13. Julius Vályi: Ueber die mehrfachen Involutionen. Zweite Mitteilung ... 259
14. Moritz Réthy: Das Princip der kleinsten Action und das Hamiltonsche Princip ... 270
15. Koloman Tellyesniczky: Ueber den Bau des Eidechsenhodens ... 303
16. Julius Vályi: Ueber die mehrfachen Involutionen. Dritte Mitteilung ... 343
17. Rudolf v. Kövesligethy: Ueber eine neue Methode der Morphometrie der Erdoberfläche ... 365
18. Rudolf v. Kövesligethy: Störungen im Vielkörpersystem ... 380
19. Ferdinand Gruber: Zur Theorie der *Fermat*'schen Congruenzen 413
20. Rudolf v. Kövesligethy: Neue geometrische Theorie der seismischen Erscheinungen ... 418

11.

# UNTERSUCHUNGEN ÜBER GRAVITATION UND ERDMAGNETISMUS.

(Vorläufige Mittheilung.)

Gelesen in den Sitzung der Akademie vom 20. April 1896

von Dr. ROLAND Baron EÖTVÖS,

O. M. UND Z. Z. PRÄSIDENT DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BUDAPEST.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIV, pp. 221—266. 1896.

Die vorliegende Abhandlung ist ein kurzer zusammenfassender Bericht über die Resultate meiner nun seit acht Jahren über Gravitation und Erdmagnetismus angestellten Untersuchungen. Die ausnehmend empfindlichen Methoden, die ich besonders zur Messung der räumlichen Variationen dieser Kräfte ersonnen habe, machten es möglich, mich solchen Aufgaben zuzuwenden, die bislang für unangreifbar gehalten wurden. Da sich mir im Laufe der Untersuchungen stets neue, der Lösung harrende Fragen aufdrängten, war es mir kaum möglich, die einstweiligen Resultate zu veröffentlichen. Die kurzen Berichte, die ich von Zeit zu Zeit der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorlegen konnte, genügen kaum, die Resultate meiner Forschungen weiteren Kreisen zugänglich zu machen, und so möge denn die vorliegende, noch immer kurzgefasste und vorläufige Mittheilung mit Übergehung der in Einzelheiten gehenden theoretischen Ableitungen und Beobachtungsresultaten klarlegen, was in meinen Untersuchungen als neu zu betrachten sei.

Es wäre ein Versäumnis, bei der Erwähnung meiner Arbeiten meiner Hülfsarbeiter zu vergessen. Durch Jahre hindurch

fand ich an Dr. RUDOLF v. KÖVESLIGETHY, gegenwärtig ö. ao. Professor an der Universität in Budapest einen eifrigen Gehilfen, und während der ganzen Zeit meiner Forschungen nahm an meinen Arbeiten zuerst als Hörer, später als Assistent des physikalischen Institust Dr. KARL TANGL regen Teil. Es mögen beide Herren auch auf diesem Wege meinen Dank entgegen nehmen.

Alle bei den Forschungen nötigen neuen Istrumente loben die hohe Sorgfalt, Präcision und Eleganz des Herrn FERDINAND SÜSS, Directors der staatlich unterstützten mechanischen Lehrwerkstätte in Budapest.

## I. Messung der räumlichen Variationen der Schwere.

### *1. Feststellung der Aufgabe.*

Unsere Kenntnisse über die räumlichen Variationen der Schwere sind wegen Unzulänglichkeit der sie messenden gebräuchlichen Instrumente bislang sehr lückenhaft geblieben. Das Pendel lässt dieselben in einer ihrer Kleinheit durchaus nicht angepassten Empfindlichkeit nur in grösseren Entfernungen erkennen, und die Waage, obwohl empfindlicher, bevorzugt nach Jolly's Verfahren nur eine einzige Richtung, indem sie blos die Vertikaländerung der Schwere giebt. Die Methoden und Instrumente, von denen in der Folge die Rede sein wird, erlauben das Abmessen der Variationen in kleinen Entfernungen von kaum einigen Decimetern und in verschiedenen Richtungen, sie ergänzen die mit dem Pendel und der Jolly'schen Waage angestellten Beobachtungen derart, dass nunmehr mit diesen zusammen die Schwerkraft der Grösse und Richtung nach nicht nur in einzelnen Punkten, sondern sogar in demjenigen Teile des Raumes als bekannt gelten kann, in welchem die Variation der Kraft als gleichmässig betrachtet werden darf. Mit Rücksicht auf dieses Ziel kann nun unsere Aufgabe näher umschrieben werden.

Bedeuten $X$, $Y$, $Z$ die Beschleunigungskomponenten im Punkte $x, y, z$; $X_0$, $Y_0$, $Z_0$, deren Werte im Anfangspunkte der Koordinaten, so bestehen für die rechtwinkligen Komponenten der Schwerebeschleunigung im gleichmässig veränderlichen Felde die folgenden Gleichungen:

$$X=X_0+\frac{\partial X}{\partial x}x+\frac{\partial X}{\partial y}y+\frac{\partial X}{\partial z}z,$$
$$Y=Y_0+\frac{\partial Y}{\partial x}x+\frac{\partial Y}{\partial y}y+\frac{\partial Y}{\partial z}z, \qquad 1)$$
$$Z=Z_0+\frac{\partial Z}{\partial x}x+\frac{\partial Z}{\partial y}y+\frac{\partial Z}{\partial z}z;$$

in welchen die nach den Koordinaten gebildeten Differentialquotienten von $X$, $Y$, $Z$ neun Konstanten sind.

Stellt man die Schwerkraft als Resultante der Anziehung der die Erde bildenden Massen und der Centrifugalkraft dar, und bezeichnet mit $V$ die Potentialfunktion der Anziehung der Erdmasse, mit $\omega$ die constante Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, mit $\rho$ den Drehungsradius des Punktes $x$, $y$, $z$, mit $U$ endlich die Kräftefunktion der Schwere, so kann man schreiben:

$$X=\frac{\partial}{\partial x}(V+\tfrac{1}{2}\rho^2\omega^2)=\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$Y=\frac{\partial}{\partial y}(V+\tfrac{1}{2}\rho^2\omega^2)=\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad 2)$$
$$Z=\frac{\partial}{\partial z}(V+\tfrac{1}{2}\rho^2\omega^2)=\frac{\partial U}{\partial z},$$

und hiernach ist:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}, \qquad 3)$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z},$$

und weiter auch:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=2\omega^2. \qquad 4)$$

Wählt man nun das Koordinatensystem derart, dass die $Z$-Axe der Richtung der Schwere im Anfangspunkte der Koordinaten parallel sei, so wird

$$X_0=0 \quad Y_0=0 \quad \text{és} \quad Z_0=g_0.$$

Die Gleichungen 1) drücken die Schwerebeschleunigung im ganzen gleichmässig veränderlichen Raume mit Hülfe von zwölf Konstanten aus; da jedoch die $Z$-Axe durch die Lotrechte bestimmt ist, mithin $X_0$ und $Y_0$ Null werden, $Z_0$ aber unmittelbar durch das Pendel erhältlich ist, so bleiben noch 9 Konstanten, zwischen denen die Gleichungen 3) und 4) zusammen vier Relationen bestimmen, so dass im Endresultate zur völligen Lösung der Aufgabe noch fünf Konstanten durch Messung zu bestimmen sein werden. Bevor ich auf die hiezu dienlichen Methoden eingienge, wird es gut sein jene einfachen Beziehungen anzuführen, welche zwischen den hier auftretenden Grössen und der Niveaufläche $U=$Const. der Schwere bestehen.

Bezeichnet nämlich im Anfangspunct der Koordinaten $\rho_x$ den Krümmungsgradius eines Normalschnittes dieser Fläche in der Richtung der $X$ Axe, $\rho_y$ dasselbe in der Richtung der $Y$ Axe, so ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_x},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_y}.$$

Nun kann aber unser Koordinatensystem um die $Z$ Axe auch derart gedreht werden, dass die $X$ und $Y$ Axe in die Richtungen der Hauptkrümmungsradien fallen; bedeuten dann $\rho_1$ und $\rho_2$ die beiden Hauptkrümmungsradien, so ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_1};$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_2};$$

und zugleich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die beiden ausserdem noch zu bestimmenden Differentialquotienten $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ haben eine doppelte Bedeutung.

*a)* Schreibt man nämlich einerseits

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y};$$

so ersieht man sogleich, dass sie die Schwereänderungen längs der $X$ und $Y$ Axe darstellen. Wenn nun in der Niveaufläche das Bogenelement $ds$ senkrecht zur Linie der konstanten Schwere steht, so ist:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} \sin \alpha;$$

mithin kann die Bestimmung der linksstehenden Differentialquotienten auf diejenige der Grössen $\frac{\partial g}{\partial s}$ und $\alpha$ zurückgeführt werden. Hiebei ist $\frac{\partial g}{\partial s}$ das Maass der grössten Schwereänderung in der Niveaufläche selbst, $\alpha$ der die Richtung dieser Aenderung charakterisierende Winkel.

*b)* Schreibt man aber andererseits:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z};$$

so gelangt man zur zweiten Deutung der linksstehenden Quotienten. In einem um $z$ unter dem Anfangspunkte gelegenen Punkte kommen nämlich zu der in der $z$ Richtung wirkenden Schwere noch die Beträge $\frac{\partial X}{\partial z} z$ und $\frac{\partial Y}{\partial z} z$, so dass in diesem Punkte die Resultierende um die ihrer Kleinheit halber mit der Tangente zu vertauschenden Winkel

$$E_x = \frac{1}{g}\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \quad \text{und} \quad E_y = \frac{1}{g}\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$

von der $Z$-Axe abweicht. Geht man also in der Vertikalen um die Längeneinheit abwärts, so findet man in der $XZ$-, beziehentlich $YZ$-Ebene die angeführten Richtungsänderungen der Schwere gegen die $Z$-Axe. Wir haben somit das Maass der Richtungsänderung der Schwerkraft in der Vertikalen gewonnen.

Die fünf, zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe notwendigen Daten sind somit bestimmt, sobald die Hauptkrümmungsradien der Grösse und Richtung nach, ebenso die Schwereänderung der Grösse und Richtung nach in der Niveaufläche selbst bekannt sein werden. Da aber die Jolly'sche Wägung im Sinne der Gleichungen 4) schon den Wert von $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ ergibt, so genügt zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien die Beobachtung des Wertes $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$, von welcher weiter unten die Rede sein wird.

## *2. Die Methode.*

Zur Lösung der nun genügend umschriebenen Aufgabe wurde die Coulomb'sche Waage benützt.

Verlegt man die $Z$ Axe in die Axe des Aufhängedrahtes der Coulomb'schen Waage, so lässt sich das Drehungsmoment der Schwere auf den Wagebalken auf Grund der Gleichungen 1) und 3) in folgender Weise ausdrücken:

$$F = \int (Yx - Xy)\, dm = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\int xy dm + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\int (x^2 - y^2)\, dm - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\int xz dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\int yz dm;$$

wo die Integration auf alle dem Drahte angehängten Massen zu erstrecken ist.

Legt man nun ein mit Waagebalken sich drehendes, mit ihm fest verbundenes Koordinatensystem $\xi$, $\eta$, $\zeta$ derart, dass die $\zeta$-Axe mit der Drehungsaxe $Z$ des Aufhängedrahtes zusammenfalle, $\xi$ im

Waagebalken mit der $X$ Axe den Winkel $\alpha$ bilde, so wird das Drehungsmoment:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}\int(\xi^2-\eta^2)\,dm + \\ + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\alpha\int\xi\eta dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos 2\alpha\int(\xi^2-\eta^2)\,dm - \\ - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}2\sin 2\alpha\int\xi\eta dm + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\cos\alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\sin\alpha\right)\int\xi\zeta dm - \\ - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\sin\alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\cos\alpha\right)\int\eta\zeta dm; \qquad 5)$$

dessen Ausdruck für jede beliebige Gestalt des Waagebalkens gültig ist.

Für das vorgesteckte Ziel kamen zwei Arten des Waagebalkens in Anwendung. Die erste Form war die eines einfachen cylindrischen Stabes, an dessen Enden kugel- oder cylinderförmige Massen befestigt waren; in der zweiten Form war eine der Kugel- oder Cylindermassen am einen Ende des Stabes aufgehängt, daher tiefer liegend als die andere Masse.

Fällt die $\xi$ Axe in die geometrische Axe des Stabes, so wird in beiden Fällen:

$$\int\xi\eta dm = 0,$$
$$\int\zeta\eta dm = 0,$$

und ausserdem im ersten Falle:

$$\int\xi\zeta dm = 0,$$

im zweiten Falle dagegen:

$$\int\xi\zeta dm = hlm,$$

wo $l$ den Drehungsradius der aufgehängten Kugel, $m$ deren Masse, $h$ ihre vertikale Entfernung von dem Stabe, bezüglich von der am anderen Ende des Stabes befestigten Kugel bedeutet.

Untersuchen wir nun gesondert für beide Formen des Balkens die mechanischen Verhältnisse der Coulomb'schen Waage.

1) Im ersten Falle, da beide Kugeln an den Enden des Stabes in gleicher Höhe liegen, wird nach 5)

$$F=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}\int(\xi^2-\eta^2)\,dm+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos 2\alpha\int(\xi^2-\eta^2)\,dm;$$

und legt man die $X$ und $Y$ Axe wie oben so, dass sie in die Richtung der Hauptkrümmungsradien fallen, wodurch $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=0$ wird, so wird einfacher:

$$F=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}\int(\xi^2-\eta^2)\,dm.$$

Wir setzen nun abkürzungsweise:

$$\int(\xi^2-\eta^2)\,dm=K',$$

und weiter:

$$\int(\xi^2+\eta^2)\,dm=K,$$

desgleichen

$$\frac{K'}{K}=(1-\varepsilon).$$

Hiebei bedeutet $K$ das Trägheitsmoment des Stabes; ist derselbe länglich, so wird $\varepsilon$ klein sein, in den meisten Fällen sogar ganz vernachlässigt werden können.

Erhält nun der Aufhängedraht der Coulomb'schen Waage durch das Drehungsmoment der Schwerkraft eine Torsion um den Winkel $\vartheta$, so wird

$$\tau\vartheta=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)K(1-\varepsilon)\frac{\sin 2\alpha}{2};$$

oder anders geschrieben:

$$\tau\vartheta=g\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)K(1-\varepsilon)\frac{\sin 2\alpha}{2};$$

da $\tau\vartheta$ das infolge der Torsion auftretende Drehungsmoment darstellt.

In einer einzigen Stellung des Waagebalkens lässt sich nun zwar der Winkel $\vartheta$ nicht ablesen; dreht man aber den Wage-

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

kasten mitsammt dem Torsionskopfe um eine vertikale Axe, so dass die Axe des Waagestabes mit der $X$ Axe den von dem früheren verschiedenen Winkel $\alpha'$ bilde, so verändert sich auch der Torsionswinkel des Aufhängedrahtes, und diese Veränderung von der Grösse $\vartheta' - \vartheta$ kann mit Hülfe von an Stab und Kasten angebrachten Zeiger, oder besser durch Spiegelablesungen bestimmt werden.

Schon drei Stellungen des Wagebalkens genügen, um sowohl den Winkel $\alpha$, als auch den Wert von $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ zu bestimmen. Jedoch erhält man ein übersichtlicheres und zur Berechnung geeigneteres Verfahren, wenn man die Waage in vier Lagen beobachtet, die einen Winkel von je 45° mit einander bilden.

Sei in der Anfangslage:

$$\vartheta = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

und senkrecht hierauf:

$$\vartheta' = -\frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

In einer, von der anfänglichen um 45° abweichenden Richtung:

$$\vartheta_1 = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\cos 2\alpha}{2},$$

und hierauf senkrecht:

$$\vartheta_1' = -\frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\cos 2\alpha}{2};$$

aus welchen Gleichungen unmittelbar folgt:

$$\vartheta' - \vartheta = -\frac{K}{\tau}(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha,$$

$$\vartheta_1' - \vartheta_1 = -\frac{K}{\tau}(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\alpha;$$

und:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\vartheta_1' - \vartheta_1},$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = \frac{\tau}{K(1-\varepsilon)}\sqrt{(\vartheta'-\vartheta)^2 + (\vartheta_1'-\vartheta_1)^2};$$

wobei der ohnehin sehr kleine Wert von $\varepsilon$ aus den Dimensionen des Balkens, $\frac{\tau}{K}$ aber aus dessen Schwingungszeit bestimmt werden kann.

Im luftleeren Raume gilt nämlich für Schwingungen von unendlich kleiner Amplitude, unter dem alleinigen Einflusse der Elasticität, die Gleichung:

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\pi^2}{T^2}.$$

Soll aber der Luftwiderstand und das aus der Schwereänderung entspringende Drehungsmoment Berücksichtigung finden, so schreiben wir die Differentialgleichung der Bewegung in der bekannten Form:

$$K\frac{d^2\omega}{dt^2} + H\frac{d\omega}{dt} + \mathrm{F}\omega = 0,$$

wo $\omega$ die Winkelelongation, $H$ eine von der Luftreibung abhängige Konstante, und $K$, wie früher, dasTrägheitsmoment bedeutet. Hiemit wird die Elongation eines Punktes des Waagestabes:

$$\omega = ae^{-\beta t} \sin \pi \frac{t}{T},$$

wobei

$$\beta = \frac{H}{2K},$$

gesetzt wurde, und

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\mathrm{F}}{K} - \beta^2$$

ist. In unserem Falle wird

$$\mathrm{F} = \tau - \frac{\partial F}{\partial \omega} = \tau - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) K(1-\varepsilon)\cos 2\alpha,$$

und daher auch:

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{K} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha - \beta^2.$$

Setzt man aber statt $\alpha$ den Wert $\alpha + \frac{\pi}{2}$, was einer, auf die frühere senkrechte Stellung des Wagebalkens entspricht, s ergiebt sich:

$$\frac{\pi^2}{T'^2} = \frac{\tau}{K} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha - \beta^2$$

und hieraus durch Addition:

$$\pi^2\left(\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T'^2}\right) = \frac{2\tau}{K} - 2\beta^2;$$

was sogleich auf den Wert von $\frac{\tau}{K}$ führt.

Zugleich ersieht man aber hieraus, dass die Beobachtung der Schwingungszeiten schon an und für sich zur Lösung der Aufgabe genügt.

Wir erhalten nämlich aus den für zwei aufeinander senkrechten Stellungen hier oben festgestellte Gleichungen:

$$\pi^2\left(\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha,$$

und aus weiteren zwei aufeinander senkrechten, zu den früheren um 45° abstehenden Richtungen in derselben Weise:

$$\pi^2\left(\frac{1}{T_1'^2} - \frac{1}{T_1^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\sin 2\alpha;$$

woraus sowol die Richtung $\alpha$ der Hauptkrümmungsradien, als der Wert

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

berechnet werden können.

Wenn man lediglich leichterer Uebersicht halber die bei den verwendeten Instrumenten ohnehin stets kleine Grösse $\varepsilon$ vernachlässigt und die Schwingungszeit der nur in Folge der Elasticität des Drahtes schwingenden Waage mit $T_0$ bezeichnet, so kann näherungsweise das Resultat unserer Ueberlegungen in folgender Weise ausgesprochen werden. Dreht man die Coulomb'sche Waage als Ganzes, mit Kasten und Torsionskopf in zwei zu einander um 90° geneigte Lagen, so erhält der Aufhängedraht eine Torsion von der Grösse:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\sin 2\alpha;$$

und zugleich verändert sich die Schwingungsdauer des Stabes bei dieser Drehung um den Betrag:

$$T' - T = -\frac{T_0^3}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\alpha = -\frac{T_0^3}{\pi^2} g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cos 2\alpha.$$

Wie zu ersehen, wird $\vartheta' - \vartheta$ ein Maximum für $\alpha = 45°$ und $135°$; $T' - T$ ein Maximum für $\alpha = 0$ und $90°$, wobei zugleich die Relation besteht:

$$(T' - T)_{\max} = T_0 (\vartheta' - \vartheta)_{\max}.$$

2) Wir haben nun noch die zweite Form der Coulomb'schen Waage zu behandeln, bei derselben ist eine der Massen um $h$ unter den Balken angebracht, somit ist, wie wir p. 199 fanden

$$\int \xi\zeta dm = mlh;$$

und somit:

$$U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}\int (\xi^2 - \eta^2)\, dm +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2)\, dm + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\cos\alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\sin\alpha\right) hlm.$$

Bringt man zunächst den Balken in die Richtung der $X$ Axe, so dass $\alpha = 0$ wird und dreht hierauf die Waage als Ganzes mit Kasten und Torsionskopf so lange, bis $\alpha = \pi$ wird, dann erhält der Aufhängedraht, den wir nun zum Unterschiede von dem das untere Gewicht tragenden Drahte Torsionsdraht nennen wollen, eine Torsion $(\vartheta' - \vartheta)$, dessen Wert sich aus der vorhergehenden Gleichung, zu

$$\vartheta' - \vartheta = -\frac{2hlm}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = -2\frac{\partial g}{\partial y}\frac{hlm}{\tau}$$

berechnet. Bringt man aber den Balken zuerst in die Lage $\alpha = \frac{\pi}{2}$, hierauf $\alpha = 3\frac{\pi}{2}$, dann wird die Torsion zwischen beiden Lagen ähnlich durch

$$\vartheta_1' - \vartheta_1 = \frac{2hlm}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{hlm}{\tau}$$

gegeben. Da hiebei $\frac{lm}{\tau}$ leicht entweder aus den Abmessungen des Instrumentes, oder der Ablenkung des hängenden Gewichtes durch die Anziehung einer von Aussen angebrachten Masse bestimmt werden kann, erhält man ohne weiteres $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$, die Horizontaländerungen der Schwere, mithin auch ihre Resultante nebst deren Richtung. Ausserdem bestimmt, wie wir wissen, p. 197, P. *b)*:

$$E = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial s}$$

die Veränderung der Richtung der Schwere in der Verticalen.

3) Benützt man daher beide Formen der Coulomb'schen Waage nach den angegebenen Methoden, so gelangt man einerseits zur Kenntniss der Richtungen der Hauptkrümmungen der Niveaufläche, und der Differenz der Hauptkrümmungen $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$, andererseits zur Kenntniss der Veränderung der Schwere in der Niveaufläche selbst, sowol der Grösse, als auch der Richtung nach. Da weiter die Jolly'sche Wägemethode den Wert von $\frac{\partial g}{\partial z}$ ergiebt, so findet man mit Hülfe der aus Gleichung 4) entspringenden Relation:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = g\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + 2\omega^2$$

auch die Summe der Hauptkrümmungen, mithin die Hauptkrümmungsradien $\rho_1$ und $\rho_2$.

Ich bemerke zugleich, dass die vollständige Behandlung der Bewegung des in der Vertikalebene schwingenden Pendels in ähnlicher Weise, wie es hier für die Coulomb'sche Waage geschah, auch zur Bestimmung von $\frac{\partial g}{\partial z}$ vorteilhaftere Methoden an die Hand gibt, als wir sie in der Jolly'schen Wägung kennen. Die experimentale Verwirklichung dieser auf das Pendel mit langer Schwin-

gungsdauer bezüglichen Methoden scheiterte aber an den bekannten Schwierigkeiten, die jedem um eine Horizontalaxe sich drehenden Instrumente anhaften.

### *3. Die Instrumente.*

Die besprochenen Messungen konnten natürlich mit der gewünschten Genauigkeit nur mit solchen Instrumenten ausgeführt werden, deren Empfindlichkeit der Kleinheit der zu messenden Kraftänderungen angepasst war. Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, berechnen wir die zu messenden Grössen für eine schematische Erde, wie sie zur näherungsweisen Darstellung der Erdgestalt und der Schwere zu dienen pflegt. Ein solches Schema liefert unter andern LISTING's typisches Rotationssphaeroid, für welches

$$a = 637\,736\,500 \text{ C.};$$

und

$$b = 635\,529\,800 \text{ C.};$$

weiterhin

$$g_\varphi = 978{,}0728\,(1 + 0{,}005\,201\,3 \sin^2\varphi)$$

ist.

Für die Breite $\varphi = 47° 30'$ von Budapest erhält man hieraus die folgenden Werte:

$$g = 980{,}838;$$

$$g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = 4\,836.10^{-12};$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 7\,960.10^{-12};$$

$$E = \frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{g} = 8\,115.10^{-15};$$

oder

$$E = 0{,}000\,001\,673$$

Bogensecunden, und endlich

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3\,080.10^{-9}.$$

Die Torsion des Aufhängedrahtes der Coulomb'schen Waage erster Form wird ein Maximum, wenn die Stabaxe mit dem Meridian einen Winkel von 45° bildet. Zwischen zwei solchen zu beiden Seiten des Meridians gelegenen Stellungen ist die Torsion

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right);$$

also, wenn z. B. $T_0 = 1000^s$ ist, so wird

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{1000^2}{\pi^2} . 4\,836.10^{-12} = 0{,}000\,490$$

was 1·7 Bogenminuten entspricht.

Bezeichnet man weiter die Schwingungszeit um den Meridian mit $T$, in der Ost-Westlinie mit $T'$, so wird:

$$T - T' = T_0(\vartheta' - \vartheta) = 0{,}49^s,$$

etwa eine halbe Sekunde.

Für die zweite Form der Coulomb'schen Waage mit zwei in verschiedener Höhe angebrachten Massen wird die Torsion zwischen zwei auf den Meridian senkrechten Lagen des Balkens

$$\vartheta' - \vartheta = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{hlm}{\tau};$$

was mit den Abmessungen eines meiner Instrumente: $h = 100\ C$, $l = 13\frac{1}{3}\ C$, $m = 30\ g$ und $\tau = 0{\cdot}4$ giebt,

$$\vartheta' - \vartheta = 2.7\ 960.10^{-12} . 100\,000 = 0{,}001\,492,$$

was beiläufig 5 Bogenminuten entspricht.

Es ist hiemit klar, dass bei der Konstruction für unseren Zweck genügend empfindlicher Instrumente das Hauptaugenmerk auf die Herstellung langer Schwingungsdauer gerichtet sein muss, und dieser Ueberlegung ist es zu danken, dass ich jene kleinen Kräfteänderungen nicht nur beobachten, sondern selbst messen konnte, die bislang unter Anwendung von Instrumenten kleiner Schwingungsdauer ganz unbemerkt bleiben mussten.

Meine Instrumente besitzen eine Schwingungsdauer von 10 bis 20, in manchen Fällen von noch mehr Minuten und bei die-

ser bisher kaum je erreichten Empfindlichkeit konnte sowohl die Gleichgewichtslage, als die Bewegung des Balkens wahrhaft bewunderungswürdig stabil, beziehentlich regelmässig gemacht werden, und dies nicht nur in gut geschützten Kellerräumen, sondern in jeder beliebigen Lokalität des Laboratoriums, ja sogar bei Nacht auch im Freien unter einem einfachen Leinwandzelte.

Der einzige Kunstgriff, — wenn dieses Wort benützt werden soll, — den ich anwendete, bestand darin, dass ich den Waagebalken in doppelwandige, denselben möglichst eng umschliessende Metallkasten aufhing. Im Laufe meiner Untersuchungen bediente ich mich verschieden geformter Kästen: bald eines horizontalen Rohres, welches den Wagebalken eng umschloss, bald eines länglichen flachen Parallelepipeds, bald eines niederen Kreiscylinders. Die letztere Form wurde als die vorteilhafteste befunden, da in ihr der Balken ganz frei schwingen kann, und in jeder Lage zu den Wänden des Kastens symmetrisch bleibt.

Die durch eine $\frac{1}{2}$—1 Centimeter dicke Luftschicht von einander getrennten Kastenwände bestehen aus 2—4 Milimeter dickem Messingbleche, und ebensolche doppelwändige, ebenso dicke und von einander getrennte Wände bilden auch das Rohr zur Aufnahme des Aufhängedrahtes. Auf diese Weise ist in dem inneren Kasten die Wirkung einseitiger Erwärmung möglichst verkleinert, und äussere Temperaturveränderungen dringen durch die allerseits gleich dicken Metallwände und Luftschichten von allen Seiten fast gleichzeitig in den inneren Kastenraum hinein. Auch dürften in dem höchstens 2—3 Centimeter hohen inneren Schwingungsraum die Wirkung vertikaler Luftströmungen durchaus unmerklich bleiben. Nimmt man noch hinzu, dass auch die allseitig gut leitende Umkleidung äussere elektrische Einwirkungen vollkommen ausschliesst, so dürfte die, den bisherigen Erfahrungen gegenüber wohl Wunder nehmende Stabilität meiner so äusserst empfindlichen Waagen zur Genüge erklärt sein.

Der Balken hing meistens an einem 100—150 Centimeter langen Platindraht, der schon Monate vorher durch angehängte Gewichte gestreckt war. Der zumeist benützte Draht hatte einen Durchmesser von $^1/_{25}$ Millimeter, eine Tragfähigkeit von 120—130 Gramm, während der daran schwingende Waagebalken 80—100

Gramm wog. Für eine Meterlänge des Drates war im Durchschnitt der Torsionskoëfficient $\tau = 0{,}3$ CGS.

Nach dem Beispiele Boys' stellte ich auch Versuche mit Quarzfäden gleicher Länge und Tragfähigkeiten an. Da dieselben sogleich nach ihrer Anfertigung eine ganz bewunderungswürdig konstante Elasticität besitzen, bieten sie entschiedene Vorteile, doch schien es mir geraten, bei meinen tragbaren Apparaten vorläufig noch die vorhergehend gestreckten Platindräte beizubehalten, da die bei ihrer grossen Tragfähigkeit ziemlich starren Quarzfäden gar zu leicht brechen. Auch ist ihre Empfindlichkeit geringer als die der Platinfäden; es gelang mir kaum einen Quarzfaden von 100 Gramm Tragfähigkeit herzustellen, dessen Torsionskoëfficient $\tau$ für ein Meter Länge kleiner gewesen wäre, als die Einheit. Meine mehrere Monate hindurch gestreckten und schwerbelasteten Platindräte zeigten ebenfalls durchaus genügende Konstanz, und wenn sie auch nach der Neuaufstellung der Wage einigen Gang aufweisen, so konnte dieser seiner Regelmässigkeit wegen leicht in Rechnung gezogen werden.

Da sich im Laufe meiner Untersuchungen die Zahl meiner Instrumente bedeutend mehrte, mögen dieselben, um sie leichter unterscheiden zu können, besonders benannt werden.

Die Coulomb'sche Waage erster Form, welche den Wert von $G\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ ergiebt, möge *Krümmungsvariometer*, die Wage zweiter Form, welche die Schwereänderung in der horizontalen und zugleich die Richtungsänderung der Schwere nach unten anzeigt, möge *Horizontalvariometer* genannt werden.

An dieser Stelle soll nur das Wesentliche über die Einrichtung dieser Instrumente hervorgehoben werden.

1. *Das Krümmungsvariometer* (Fig. 1 u. 2) besteht aus einem cylindrischen Waagekasten, welcher in einem starken Holzringe an diesen befestigten Metallarmen ruht. Zur horizontalen Einstellung des Kastens dienen drei Metallschrauben. Der Holzring selbst steht auf drei 120 Centimeter hohen Spreitzfüssen. Der cylindrische Waagekasten ist um eine vertikale Axe über einem geteilten Kreise drehbar. Am untern Ende des den Aufhängedrat einschliessenden Rohres befindet sich ein rundes Fenster, dessen eine Hälfte durch

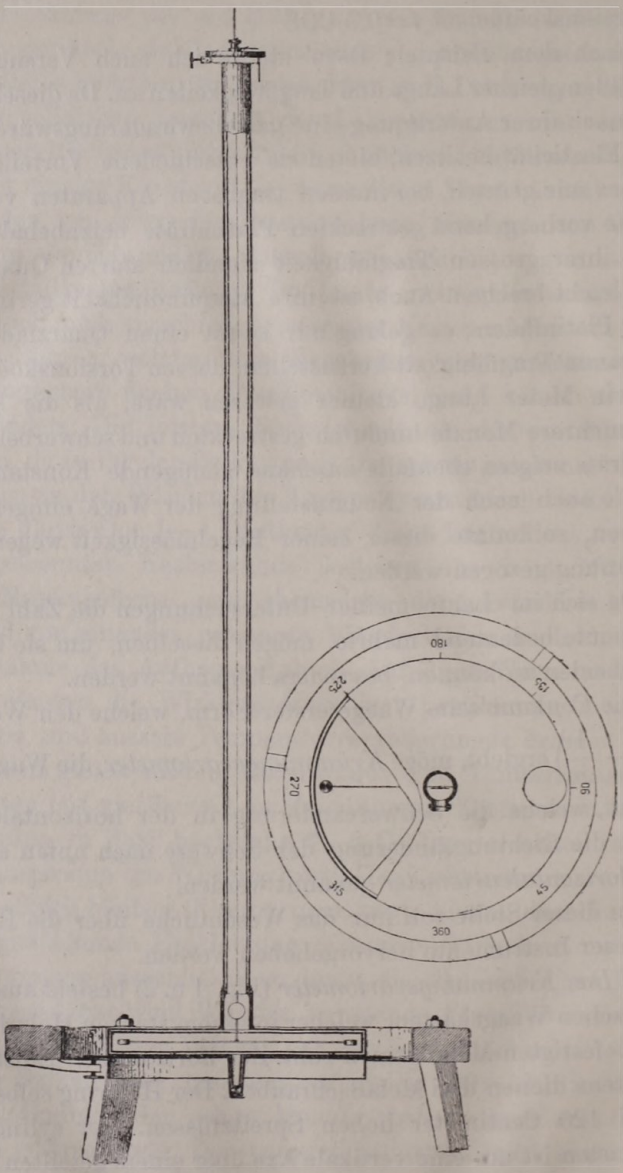



Fig. 1. und 2.

einen an das Rohr befestigten, fixen Spiegel verdeckt ist, während die andere Hälfte den auf dem schwingenden Balken befestigten Spiegel sehen lässt. Der fixe, am Rohr befestigte Spiegel lässt sich durch Stellschrauben so einstellen, dass das Bild einer vor das Fenster gestellten Skale zugleich mit dem Bilde des schwingenden Spiegels im Gesichtsfelde des Ablesefernrohres erscheine. Die Verschiebung der beiden Spiegelbilder gegeneinander dient zur Abmessung des Torsionswinkels $\vartheta' - \vartheta$. Am Ende des Balkens liegen cylindrische Gewichte von je 30 Gramm, ihre Mittelpunkte stehen von einander um 34 C. ab. Der innere Durchmesser des Kastens beträgt 40 C. seine Höhe 2 C. Die Deckel sowohl des innern als äusseren Kastens sind abhebbar. Der 150 Centimeter lange Drat ist an beiden Enden an Metallplättchen gelötet, die mittels Schrauben einerseits an die Stange des Torsionskopfes, andererseits an den Wagebalken befestigt wurden.

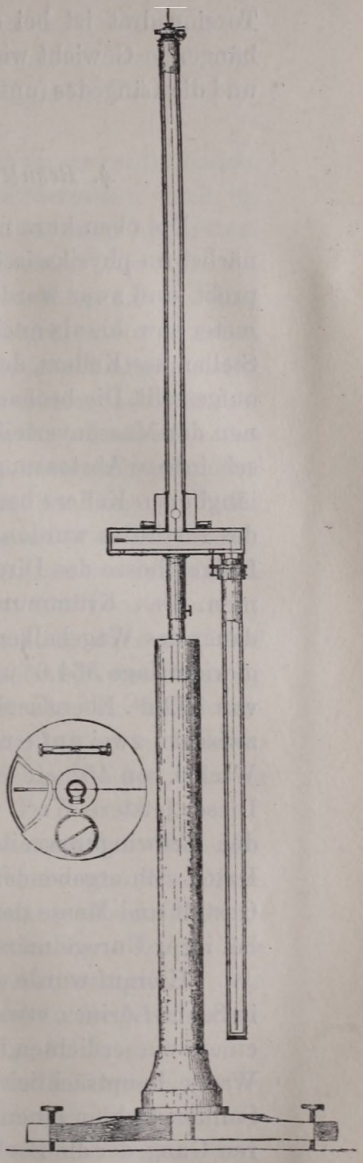


Fig. 3. und 4.

2. Das *Horizontalvariometer* (Fig. 3 und 4) ist auf einer 140 C. hohen mit einem Kreuzgestelle verbundenen Säule drehbar angebracht. Der Kasten ist wie oben cylinderförmig und trägt auf seinem oberen Deckel eine Boussole zur Bestimmung seiner Drehung. Das dem einen Ende des Waagebalkens angehängte cylindrische Gewicht ist in ein doppelwandiges Rohr geschlossen, welches durch an dem Boden des Kastens angebrachte Stellschrauben vertikal eingestellt werden kann. Die zur Ablesung der Torsion dienenden Spiegel sind ganz so eingerichtet, wie es vorher beschrieben wurde. Der

Torsionsdrat ist bei diesem Instrumente 40 Centimeter lang, das hängende Gewicht wiegt 30 Gramm, sein Drehungsarm ist 13·2 C und die Längedes (unteren) Aufhängedrates beträgt 100 Centimeter.

### *4. Resultate der bisherigen Messungen.*

Die oben kurz mitgeteilten Messungsmethoden wurden zunächst im physikalischen Institute der Budapester Universität erprobt, und zwar wurden beide Instrumente, das Krümmungvariometer sowohl, als auch das Horizontalvariometer an verschiedenen Stellen des Kellers, des Erdgeschosses und des ersten Stockwerkes aufgestellt. Die beobachteten Variationen entsprachen im Allgemeinen der Massenverteilung des Gebäudes, und besonders war die scheinbare Abstossung des unter dem Gebäude sich hinziehenden länglichen Kellers bemerkbar. Die ersten Messungen ausserhalb des Institutes wurden am Fusse des Blocksberges bei Ofen im Erdgeschosse des Directionsgebäudes des Bruckbades vorgenommen. Das Krümmungsvariometer ergab hier als Schwingungsdauer des Wagebalkens um die gegen den Berg gerichteten Gleichgewichtslage 564,6$^s$ und darauf senkrecht die Schwingungsdauer von 572·2$^s$. Ebendaselbst betrug die Torsion des Aufhängedrates zwischen zwei auf einander senkrechten, mit den vorherigen einen Winkel von 45° einschliessenden Richtungen 45 Bogenminuten. Dieser letztere Wert weicht kaum um eine Minute von dem aus den Schwingungszeiten berechneten Werte ab. Die aus diesen Daten sich ergebenden Variationen der Schwere entsprechen der Gestalt und Masse des Berges, soweit man diese beiden Faktoren bei ihrer Unregelmässigkeit überhaupt in Rechnung ziehen kann.

Hierauf wurde das Horizontalvariometer in meinem Garten in Szent-Lőrincz, etwa 8 Kilometer von Budapest, im Freien, unter einem wasserdichten Leinwandzelte aufgestellt. Bei Tage zeigte die Waage, hauptsächlich unterder Wirkung der auf das Zelt fallenden Sonnenstrahlen einen fortdauernden bald langsamen, bald rascheren Gang, der die Beobachtung unmöglich machte. Nachtsüber dagegen gestaltete sich alles günstiger: der Waagebalken nahm seine Gleichgewichtslage so sicher und stabil an, wie früher im Laboratorium.

Die während mehrerer Nächte fortgesetzten Beobachtungen ergaben ein unter sich durchaus gut stimmendes Resultat. Namentlich war die Wirkung des sanft ansteigenden Terrains bemerklich, auf dem mein Garten liegt.

Nach diesen vorbereitenden Studien schien es nun möglich, systematische Beobachtungen der Schwereänderungen auch im Freien anzustellen. So begaben sich denn mit meinen Apparaten, und dazu gehörenden tüchtigen Leinwandzelten versehen die Herrn Prof. Ludwig v. Bodola, Dr. Rudolf v. Kövesligethy und Karl Tangl, denen später ich selber nachfolgte, auf den neben Kis-Czell sich erhebenden Sághberg. Derselbe ist ein abgestutzter, aus der Ebene isolirt bis 150 Meter Höhe aufragender Basaltkegel, dessen Gestalt und ziemlich homogene Gesteinsmasse einen verhältnissmässig einfachen und leicht zu untersuchenden Fall der Massenanziehung verwirklicht. Zudem ist der Berg gerade für das Studium der Schwereänderungen auch schon aus dem Grunde besonders interessant, da der unermüdliche Altmeister der Pendelmessungen, Oberstlieutenant R. v. Sterneck, den Berg genau erforschte und zu dem Resultate zu kommen schien, dass zwei auf dem flachen Plateau des Berges nahe in demselben Niveau liegende und von einander nur 150 Meter entfernte Punkte einen Schwerunterschied gleich dem $\frac{1}{30000}$-tel des Gesammtbetrags aufwiesen. Eine so grosse Veränderung könnte unsere Theorie der Schwere kaum erklären.

Obwohl die obgenannten Herren über ihre nach meinen Methoden auf dem Sághberge angestellten Beobachtungen besonders berichten werden, glaube ich doch soviel schon jetzt erwähnen zu sollen, dass nach diesen Beobachtungen zwischen den beiden Sterneck'schen kritischen Punkten Schwereänderungen in dem angeführten Betrage nicht bestehen, dass vielmehr die gewonnenen Resultate mit der Theorie in bestem Einklang stehen.

Es mag noch erwähnt werden, dass das Krümmungsvariometer auch zur Beantwortung der Frage beigezogen wurde, ob die materielle Constitution der Körper auf die von der Erdmasse erlittene Anziehung Einfluss habe?

Werden zu diesem Zwecke an den beiden Enden des Waagebalkens Körper verschiedener Substanz, z. B. Kupfer und Kork be-

festigt, so müsste sich nach einer Drehung der Wage um 180° der etwaige Einfluss in der Richtungsänderung der Schwere fühlbar machen. Da aber meine diesbezüglichen Untersuchungen selbst mit diesen ausserordentlich empfindlichen Methoden keine merklichen Unterschiede in der Richtung der Schwere ergaben, fühle ich mich zu dem Schlusse berechtigt, dass die Erdanziehung für jene Stoffe dieselbe ist, oder doch höchstens eine weit ausserhalb der Grenzen des Beobachtbaren liegende Verschiedenheit zeige. Die Unterschiede in der Massenanziehung müssten sich nämlich auch in den Unterschieden der Schwererichtung offenbaren, da ja die Schwere die Resultante der Massenanziehung und der von stofflichen Beschaffenheiten unabhängigen Centrifugalkraft ist. So konnte ich zum Schlusse gelangen, «dass wenn überhaupt eine Differenz in der Schwere der Körper von gleicher Masse, jedoch verschiedener Substanz vorhanden wäre, diese in Bezug auf Messing, Glas, Antimonit und Korkholz jedenfalls kleiner sein müsste, als ein zwanzigmillionstel, in Bezug auf Luft und Messing aber gewiss kleiner als ein Hunderttausendstel». (S. Math. u. Naturw. Berichte in Ungarn VIII. p. 65, 1890; Beiblätter zu WIEDEMANN's Annalen der Ph. u. Ch. 1891. Seite 688.)

## II. Ueber die Messung der räumlichen Aenderungen der erdmagnetischen Kraft.

Ich stellte mir weiter die Aufgabe, die räumlichen Aenderungen der erdmagnetischen Kraft in eben solcher Vollständigkeit messbar zu machen, die ich in Bezug auf die Schwerkraft mit gutem Erfolge anstrebte.

Die Komponenten $X$, $Y$, $Z$ der auf die Einheit magnetischer Flüssigkeit wirkenden Kraft (magnetische Intensität) lassen sich unter entsprechender Deutung ebenfalls durch die Gleichungen 1) der I. Abteilung ausdrücken; bedenkt man ferner, dass auch diese Kraft eine Potentialfunktion besitzt, so übersehen wir sogleich, dass die vollständige Lösung der Aufgabe die Bestimmung der folgenden sechs Daten erheischt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z};$$

zwischen denen für ausserhalb der wirkenden magnetischen Massen gelegene Punkte die Beziehung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{dy^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

besteht.

Bei der oben bezeichneten Aufgabe ist unser Augenmerk in erster Linie auf diejenige translatorische Kraft zu richten, welche sich als die ganze auf einen Magnet wirkende Kraft dann zu erkennen giebt, wenn wir die Empfindlichkeit der Beobachtung soweit steigern, dass sie die magnetischen räumlichen Intensitätsänderungen verrät. In der Tat betrachtete ich auch als zunächst anzustrebendes Ziel die Messung dieser translatorischen Kraft.

Auf Grund der Gleichung 1) der vorhergehenden Abteilung lassen sich die Komponenten $P_x$, $P_y$, $P_z$ der translatorischen Kraft $P$ leicht für einen Magnet berechnen, dessen Moment durch die Komponenten $M_x$, $M_y$, $M_z$ gegeben ist. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} P_x &= M_x \frac{\partial X}{\partial x} + M_y \frac{\partial X}{\partial y} + M_z \frac{\partial X}{\partial z}, \\ P_y &= M_x \frac{\partial Y}{\partial x} + M_y \frac{\partial Y}{\partial y} + M_z \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ P_z &= M_x \frac{\partial Z}{\partial x} + M_y \frac{\partial Z}{\partial y} + M_z \frac{\partial Z}{\partial z}. \end{aligned} \qquad 1)$$

Zunächst legen wir unser Koordinationssystem derart, dass die $Z$-Axe nach abwärts, die $X$-Axe in den magnetischen Meridian nordwärts, die $Y$-Axe in die magnetische erste Vertikale ostwärts zu liegen komme. Beschränken wir uns einstweilen auf den Fall, wo die Axe des Magneten mit dem magnetischen Meridian den sehr kleinen Winkel $\varepsilon$ einschliesst, so können wir die uns hier ausschliesslich interessirenden Horizontalkomponenten der erdmagnetischen Kraft in folgende Form bringen:

$$P_x = M_h \frac{\partial X}{\partial x} + M_h \frac{\partial X}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial X}{\partial z};$$

$$P_y = M_h \frac{\partial Y}{\partial x} + M_h \frac{\partial Y}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial Y}{\partial z};$$

wenn $M_h$ und $M_v$ die horizontale, beziehentlich vertikale Komponente des magnetischen Momentes bezeichnen.

Zur Messung dieser horizontalen Kräftekomponenten benütze ich ein auf dem Princip der Coulomb'schen Waage beruhendes Instrument, welches das *magnetisches Translatometer* genannt werden mag, und welches durch die Fig. 5 in vertikalem, durch die Fig. 6 in horizontalem Durchschnitte dargestellt wird. Der äusseren Form nach ähnelt das Instrument dem Horizontalvariometer, doch hängt am Ende des Waagebalkens ein Magnetstab, dessen Neigung gegen der Horizontalen verändert werden kann. Des Weiteren geschieht die Drehung dieser Waage nicht um die vertikale Mittelaxe des Waagebalkens, sondern um dessen Ende, beziehentlich um jenes Vertikalrohr, in welchem der Draht des aufgehängten Magneten geborgen ist. Sowohl dieses Rohr, als auch der an dessen Ende den Magnet umschliessende Kasten bestehen aus eisenfreiem Kupfer. Bei diesem Instrumente ist auf feinere Teilung des Torsionskopfes mehr Gewicht zu legen, und es ist wünschenswert an demselben wenigstens die Minute ablesen zu können. Die Drehung des Waagekastens als Ganzes ist ebenfalls an einer Kreisteilung ablesbar, die Ablenkung des Waagebalkens gegen den Kasten und den Torsionskopf durch Spiegelablesung messbar.

In der Fig. 7 bezeichnet $OA$ den Waagebalken, $C$ den Fusspunkt des denselben tragenden Drahtes. Die Drehung der Waage geschieht um den Punkt $O$ derart, dass der Punkt $C$, mithin auch der Torsionskopf den Kreis vom Radius $OC=l$ beschreibt.

Dieses Instrument wird zur Messung der translatorischen Kraft folgenderweise benützt:

Durch geeignete Aufstellung des Kastens und Rectification des Aufhängedrahtes mittels des Torsionskopfes wird der Waagebalken in die, auf dem magnetischen Meridian senkrechte Lage $OCA$ gebracht (Fig. 7), und zwar so, dass der unten aufgehängte Magnet mit dem magnetischen Meridian einen der Null möglichst

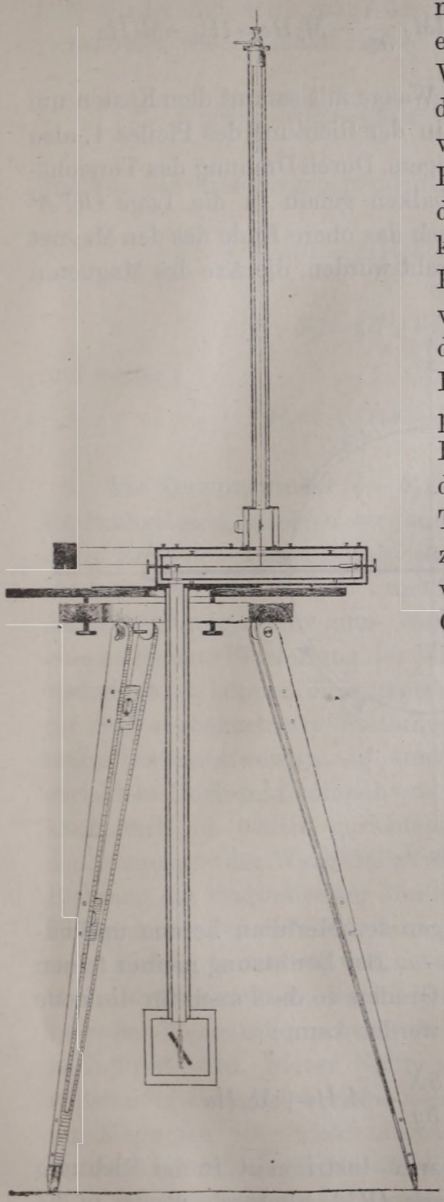


Fig. 5.

nahe kommenden Winkel ($\varepsilon$) einschliesse. Der obere, den Waagebalken tragende Draht, der kurz Torsionsdraht genannt werden möge, wird in diesem Falle durch zwei Kräftc tordirt; die eine ist die $X$-oder Meridiankomponente der translatorischen Kraft, die am Hebelarme $l$ wirkt, die andere die Drehkraft des hängenden Magneten unter Einfluss der horizontalen Komponente $H$ der erdmagnetischen Intensität. In dieser Stellung des Waagebalkens ist mithin der Torsionsdraht gedrillt, und bezeichnet wieder $\vartheta$ den Torsionswinkel, so hat man im Falle des Gleichgewichtes:

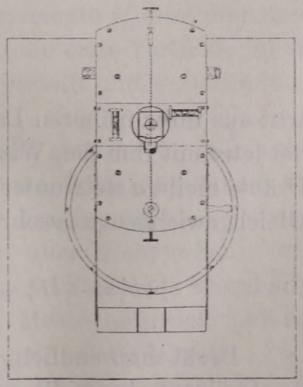


Fig. 6.

$$\tau\vartheta = lM_h\frac{\partial X}{\partial x} + lM_h\frac{\partial X}{\partial y}\varepsilon + lM_v\frac{\partial X}{\partial z} - M_hH\varepsilon = lP_x - M_hH\varepsilon.$$

Nun drehe man die ganze Waage mit sammt dem Kasten um 180 Grade, und zwar zunächst in der Richtung des Pfeiles 1, also entgegen dem Gange des Uhrzeigers. Durch Drehung des Torsionskopfes wird hierauf der Wagebalken genau in die Lage $OC'A'$ gebracht. Dabei ist natürlich auch das obere Ende des den Magnet tragenden Drates um 180° gedreht worden, die Axe des Magneten

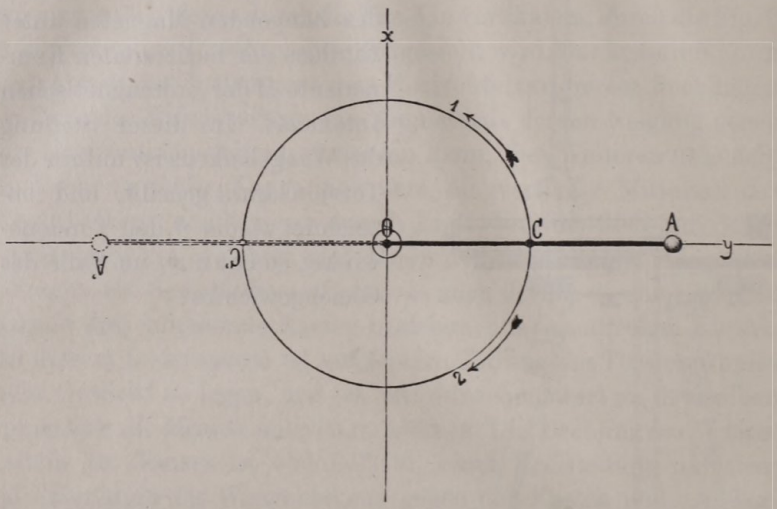



Fig. 7.

tritt aus ihrer früheren Lage gegen den Meridian heraus und bildet jetzt mit ihm den Winkel $\varepsilon - \alpha$. Bei Benützung meiner feinen Drähte bleibt $\alpha$ stets unter 1—2 Graden, so dass auch für die neue Gleichgewichtslage geschrieben werden kann:

$$\tau\vartheta_1' = -lP_x + lM_h\alpha\frac{\partial X}{\partial y} - M_hH\varepsilon + M_hH\alpha.$$

Dreht man endlich das ganze Instrument in der Richtung des Pfeiles 2, durch die erste Lage $OCA$ hindurch wieder in die Lage $OC'A'$, wobei natürlich der Wage eine volle Umdrehung er-

teilt wurde, und stellt man den Waagebalken mit Hilfe des Torsionskopfes wieder genau ein, so hat man :

$$\tau\vartheta_2' = -lP_x - lM_h a\frac{\partial X}{\partial y} - M_h H\varepsilon - M_h Ha,$$

und aus den drei vorangehenden Gleichungen ergiebt sich :

$$\tau(\vartheta - \vartheta_1') = 2lP_x - lM_h a\frac{\partial X}{\partial y} - M_h Ha,$$

$$\tau(\vartheta - \vartheta_2') = 2lP_x + lM_h a\frac{\partial X}{\partial y} + M_h Ha,$$

und weiter :

$$P_x = \frac{\tau}{4l}((\vartheta - \vartheta_1') + (\vartheta - \vartheta_2')).$$

Die Torsionswinkel $(\vartheta - \vartheta_1')$ und $(\vartheta - \vartheta_2')$ werden am Torsionskopfe abgelesen, insofern wir jene Winkel suchen, um welche das obere Ende des Torsionsdrahtes gedreht werden muss, um den Waagebalken nach den mit 1 und 2 bezeichneten Drehungen in die Anfangsstellung relativ zum Waagekasten zu bringen. Insofern eine so genaue Einstellung des Waagebalkens mit Schwierigkeiten verknüpft ist, können die entsprechenden Torsionswinkel aus den für zwei engbenachbarte Stellungen gültigen Daten durch Interpolation bestimmt werden. In ähnlicher Weise, wie die nordwärts gerichtete Horizontalkomponente der translatorischen Kraft, $P_x$, kann auch die östlich gerichtete Komponente $P_y$ bestimmt werden, wenn nur der Waagebalken statt in die erste Vertikale, in die Richtung des magnetischen Meridians gestellt und weiterhin dem Früheren analog verfahren wird.

Bislang hatten wir unser Augenmerk blos auf die erdmagnetische Kraft gerichtet, obwohl den früheren Erfahrungen nach die Lage des Waagebalkens auch durch die Variationen der Schwere beeinflusst wird. Dieser Einfluss kann aber leicht erkannt und vollständig eliminirt werden, wenn man an Stelle des ausgehängten Magneten eine nicht magnetische Masse anbringt und das Instrument nun als Horizontal-Schwerevariometer benützt.

Die Bestimmung der Komponenten der magnetischen Translationskraft können zugleich zur Kenntniss der räumlichen Inten-

sitätsänderung führen, und zwar am vorteilhaftesten auf die Weise, dass man die Messung zuerst mit einem abwärts, dann mit einem aufwärts geneigten Magnete vornimmt. Ist z. B. der Neigungswinkel der Magnetaxe gegen die Horizontale zuerst $i$ dann $-i$, dann ist für den ersten Fall:

$$M_h = M\cos i, \quad M_v = M\sin i;$$

für den zweiten Fall dagegen

$$M_h' = M\cos i, \quad M_v' = -M\varepsilon\sin i.$$

Indem wir eine genaue Einstellung voraussetzen, so dass $\varepsilon = 0$ genommen werden darf, dann werden die Horizontalkomponenten der Translationskraft bei abwärts geneigtem Magnete:

$$P_x = M\cos i\frac{\partial X}{\partial x} + M\sin i\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P_y = M\cos i\frac{\partial Y}{\partial x} + M\sin i\frac{\partial Y}{\partial z},$$

und ähnlich für den zweiten Fall, nämlich den eines aufwärts geneigten Magnets:

$$P_x' = M\cos i\frac{\partial X}{\partial x} - M\sin i\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P_y' = M\cos i\frac{\partial Y}{\partial x} - M\sin i\frac{\partial Y}{\partial z},$$

woraus durch passende Verknüpfung sofort die Werte der gesuchten Aenderungen in der Form

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{P_x' + P_x}{2M\cos i},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} = \frac{P_x - P_x'}{2M\sin i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = \frac{P_y + P_y'}{2M\cos i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} = \frac{P_y - P_y'}{2M\sin i},$$

folgen.

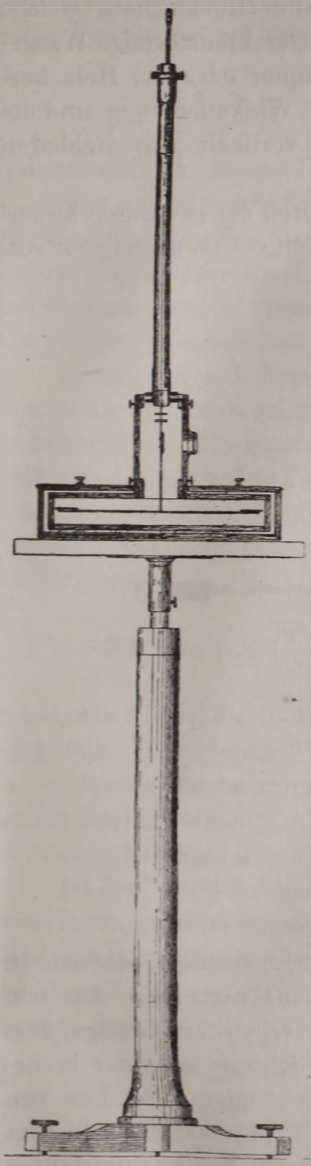


Fig. 8.

Von den sechs, zur vollständigen Lösung der vorgelegten Aufgabe notwendigen Bestimmungsstücken sind somit auf dem vorher beschriebenen Wege vier Daten gewonnen, und somit bleiben noch zwei, oder mit Hinsicht auf die Gleichung $\Delta^2 V=0$, noch ein Stück unbekannt.

Diesem Zwecke dient das *astatische Variometer*, dessen einfachen Bau die Figur 8 im vertikalen, die Figur 9 im horizontalen Durchschnitte darstellt. Auch dieses Instrument ist eine Coulomb'sche Waage, an dessen feinem Drate ein aus leichten Aluminiumröhren zusammengesetztes Kreuz hängt. Die Enden der Kreuzbalken tragen vier sich gegenseitig möglichst astatisirende Magnete derart, dass zwei sich gegenüber stehende Magnete die Nordpole nach aussen, die andern beiden nach innen kehren, wie dies auch die umstehende Figur 10 versinnlicht. Zur mög-

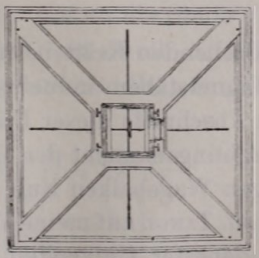


Fig. 9.

lichst genauen Astasirung dienen kleine Hilfsmagnete, welche auf den Balken gelegt werden können. Der kreuzförmige Waagebalken sowohl, als aus eisenfreiem Kupfer oder aus Holz hergestellte Waagekasten trägt Spiegel zur Winkelmessung und die ganze Waage ruht auf einem um eine vertikale Axe drehbaren Tische.

Ein nicht zu unterschätzender Vorteil der gewählten besonderen Form des Waagebalkens ist die völlige Unabhängigkeit von

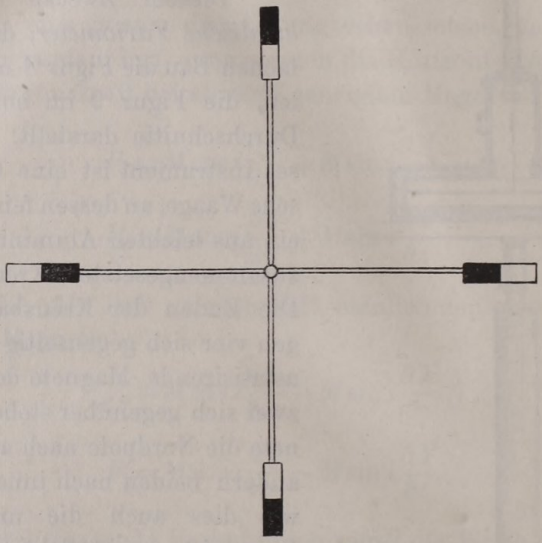


Fig. 10.

allen drehenden Kräften, die aus Schwereänderungen oder dem in den Magnetstäben inducirten Magnetismus herrühren. Aus dem ersten Abschnitte dieser Untersuchungen erhellt zur Genüge, dass das Drehungsmoment der Variation der Schwere auf einen kreuzförmigen Wagebalken Null wird. Weiters zeigten besondere von Dr. Karl Tangl auf meine Veranlassung im physikalischen Institut der Budapester Universität gerade zu diesem Zwecke angestellten Versuche, dass die Induction der erdmagnetischen Kraft einem astatischen Nadelpaare ein Drehungsmoment erteilt, das in der

Form $C \sin 2\alpha$ dargestellt werden kann. Für zwei aufeinander senkrechte Nadelpaare hat man sohin:

$$C \sin 2\alpha + C \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

wodurch auch der zweite Teil unserer Behauptung erhärtet wird.

Man braucht also bei der Berechnung des Drehungsmomentes eines ähnlich gebauten kreuzförmigen Waagebalkens durchaus nur die magnetische Kraft in Rücksicht zu nehmen und kann deren Wirkung ganz so bemessen, als ob die Magnete frei von Induction blieben, also konstant wären.

In dem engen Rahmen dieses Berichtes glaube ich die Rechnungen übergehen zu sollen, welche ich für Magnete beliebiger Gestalt und auf dem Kreuze eingenommener beliebiger Lage anstellte. In dem einfachen Falle, wenn die Axen der Magnete parallel den Kreuzstäben liegen, gilt für das Drehungsmoment desjenigen einzelnen Magneten, dessen Nordpol nach Aussen gerichtet ist, die Gleichung:

$$F = -HM \sin \alpha + Ml\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) \sin 2\alpha + 2Ml \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \; ;$$

wobei, wie früher, die $X$-Axe in den magnetischen Meridian nordwärts fällt, und $\alpha$ jenen Winkel bezeichnet, den der Drehungsradius des Magnetcentrums mit der $X$-Axe einschliesst. $H$ ist weiter die Horizontalkomponente der Intensität und $l$ der Drehungsradius des Mittelpunktes des Magnetstabes.

Ist der Nordpol des auf dem Kreuzarm liegenden Magneten nach innen gekehrt, so hat man einfach $-M$ an die Stelle von $M$ in obiger Gleichung zu setzen. Man erhält so durch betreffende Addition für das Drehungsmoment des aus vier Magneten bestehenden Systems:

$$F = -H\mu \sin \gamma + (M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4) \cdot \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) \sin 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha\right)$$

wo $\mu$ das Gesammtmoment der aus vier Magneten bestehenden nahezu astatischen Kombination bedeutet, und $\gamma$ der noch unbe-

kannte Winkel ist, den die magnetische Axe dieses zusammengesetzten Magneten mit der $X$ Axe einschliesst. $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ bezeichnen die Absolutwerte der Momente der einzelnen Magnete, $l_1$, $l_2$, $l_3$ und $l_4$ die Drehungsradien ihrer Mittelpunkte.

Setzt man nun Kürze halber:

$$M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4 = 4Ml;$$

was vier gleichmomentigen und auf dem Kreuze von der Drehungsaxe in gleicher Entfernung angebrachten Magneten entsprechen würde, und berechnet die Drillung des Torsionsdrahtes in den durch die verschiedenen Werte von $\alpha$ gekennzeichneten Stellungen, so erhält man die folgende Tabelle:

$$\alpha = 0 \qquad \tau\vartheta_0 = -\mu H \sin\gamma + 8Ml\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y};$$

$$\alpha = \pi \qquad \tau\vartheta_\pi = +\mu H \sin\gamma + 8Ml\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \tau\vartheta_{\frac{\pi}{4}} = -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}}(+\sin\gamma + \cos\gamma) + 4Ml\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right);$$

$$\alpha = 3\frac{\pi}{4} \qquad \tau\vartheta_{\frac{3\pi}{4}} = -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\gamma + \cos\gamma) - 4Ml\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right);$$

aus welcher sich durch geeignete Kombination:

$$2\mu H \sin\gamma = \tau(\vartheta_\pi - \vartheta_0)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\mu H \sin\gamma - 8Ml\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = \tau(\vartheta_{\frac{3\pi}{4}} - \vartheta_{\frac{\pi}{4}})$$

ergiebt. Misst man also auf eine früher schon ausführlich erörterten Weise die Torsionswinkel des Aufhängedrahtes zwischen den vier angegebenen Lagen, so erhält man hieraus den Wert der noch fehlenden Angabe $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$.

Es könnten natürlich zu eben diesem Zwecke auch andere vier Lagen gewählt werden, ja durch Hinzuziehung einer fünften Stellung wäre auch der Wert von $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ messbar. Die mit dem Translatometer angestellten Messungen machen dies jedoch über-

flüssig, da die Aufgabe durch den Wert von $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$ zusammen mit der Gleichung $\Delta^2 V = 0$ und den früheren Resultaten vollständig gelöst ist.

Um beurteilen zu können, wie hoch die Empfindlichkeit meiner Instrumente gesteigert werden kann, möge ein Beispiel angeführt werden. Nach unserem magnetischen Karten vergrössert sich die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Intensität um beiläufig 0,001 C. G. S., wenn man von Budapest um 20 Kilometer nach Süden geht. Es kann daher beiläufig gesetzt werden:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{0{,}001}{2\,000\,000} = 5.10^{-10}.$$

Der Draht meines magnetischen Translatometers erlaubt die Aufhängung eines Magneten von 30—35 Gramm Gewicht, dessen Moment $M = 1000$ gesetzt werden kann; da weiter der Drehungsradius des Magneten $l = 20$ c, die Torsionskonstante des Drahtes $\tau = 0{,}25$ ist, so kann, von anderen Veränderungen abgesehen, der Torsionswinkel, p. 218:

$$\vartheta = \frac{l}{\tau} M \frac{\partial X}{\partial x} = 0{,}000\,04$$

gesetzt werden. Bei einer Drehung des Instrumentes um 180° wächst dieser Winkel auf das Doppelte, beträgt also rund $\frac{1}{4}$ Bogenminute.

Meine Instrumente entstanden nicht aus dem Wunsche, mit ihnen der kartographischen Aufnahme der magnetischen Elemente eines Landes oder gar Erdteiles zu dienen, sondern sie sollen vielmehr nur jene Veränderungen kundgeben, welche nahe Massen, Berge, Täler oder unterirdische magnetisch wirkende Gesteine in der erdmagnetischen Kraft bewirken. In diesem Sinne mögen sie der Geologie gute Dienste leisten, begnügen sich aber in diesem Falle schon mit einer bedeutend kleineren Empfindlichkeit. So reichte bei den Messungen, die ich bisher im physikalischen Laboratorium und später im Herbste des Jahres 1895 in meinem in Szt.-Lőrincz gelegenen Garten anstellte, stets schon die Aufhängung solcher Magneten völlig aus, deren Moment blos 200 C. G. S.

betrug, deren Empfindlichkeit also $^1/_5$ der im Beispiele angeführten Empfindlichkeit ausmachte.

Im physikalischen Laboratorium erhielt ich auch so noch auf mehrere Grade sich belaufende Torsionen. In Szent-Lőrincz beobachtete ich im Freien unter Zelten, gerade so, wie mit dem Schwerevariometer, und zwar zumeist bei Nacht; an trüben, regnerischen Tagen konnte auch tagsüber gut beobachtet werden.

Ich halte meine Methode besonders zum Studium der nahe unter der Erdoberfläche cirkulirenden elektrischen Erdströme für besonders geeignet, da diese nun selbst an Ort und Stelle, nicht aber, wie es früher geschah, blos in den bekannten Plattenleitungen erforscht werden können. Entfernt man nämlich an einem Orte, wo die erdmagnetischen Aenderungen schon gemessen wurden, einen Teil der umliegenden Bodenmassen, z. B. durch Aushebung eines Grabens, so werden die infolge dessen sich in der magnetischen Kraft verratenden Aenderungen nicht blos der Entfernung der Bodenmassen entsprechen, sondern zugleich eine Folge der Ausschaltung jener die besagten Massen durchfliessender Stromteile und der Modification der ganzen Stromverteilung sein. Im Laufe meiner zu Szent-Lőrincz angestellten Versuche, bei welchen das astatische Variometer 150 Centimeter hoch über dem Erdboden aufgestellt war, liess ich, anderthalb Meter von dem Fusspunkte des Instrumentes entfernt, einen zwei Meter langen, einen Meter breite nund ebenso tiefen Graben ziehen. Die hiedurch veranlasste Aenderung im Stande des Instruments entsprach der Wirkung eines in die Mitte des Grabens versetzten Magneten von etwa 100 C. G. S. Momenteinheiten. Heftige Schneefälle bei Eintritt des Winters machten meinen Untersuchungen ein Ende, so dass ich nicht ermessen konnte, welcher Teil an der besagten Aenderung auf Rechnung der etwa magnetisch beschaffenen sandigen Bodenmasse, und welcher der sie durchziehenden Erdströme zu schreiben sei.

Die beschriebenen Magnetovariometer sind zugleich als sehr empfindliche Galvanometer verwendbar, und erlauben bequem die Bestimmung des Moments konstanter Magnete. Ein Magnet vom Momente 10,000 C. G. S. übte noch in einer Entfernung von 15—20 Meter merkbare Wirkung auf das Translatometer aus.

Eine interessante Frage, deren Lösung ebenfalls von meinen Instrumenten zu erwarten ist, bilden die zeitlichen Variationen der magnetischen Kraftänderungen. Vorderhand wurde im physikalischen Institute durch Monate hindurch der Gang des Translatometers, d. h. die zeitliche Variation der translatorischen Kraft auf photographischem Wege registrirt. Die auffällig hervortretende tägliche Periode dieser Variationen ist sicherlich zum grossen Teil eine Folge jener Ströme, welche durch die unterirdisch gelegten Kabel auch dem Erdboden in der Stadt überliefert werden. Jedenfalls wäre die Wiederholung ähnlicher Beobachtungen ausserhalb der Stadt, also bei Ausschluss dieser künstlichen Stromquellen sehr erwünscht.

## III. Bestimmung der Gravitationskonstante.

Beobachtungen über Gravitation sind seit dem Jahre 1888 im physikalischen Institute der hiesigen Universität fast alltäglich geworden. Ausser den eigentlichen Untersuchungen haben auch meine Hörer sowohl während des Vortrages, als im Laufe der practischen Uebungen genügsam Gelegenheit, sich aus eigener Erfahrung mit der gegenseitigen Anziehung der Massen bekannt zu machen.

Der erste Apparat, mit dem es mir im Jahre 1888 in einem populären Vortrage gelang, die Erscheinung der Massenanziehung einem grösseren Hörerkreise sichtbar zu machen, war ähnlich dem Quadranten-Elektrometer gebaut. Unter dem in seinem Metallkasten gut geschützten Coulomb'schen Waagebalken befindet sich ein in Quadranten geteiltes cylindrisches Metallgefäss, dessen zwei gegenüberliegende Quadranten mit von unten zugeführtem Quecksilber abwechselnd gefüllt wurden. Das Instrument war schon bei einer Schwingungsdauer von 3—4 Minuten genügend empfindlich, und zeigte selbst im gleichen und erleuchteten Lehrsaale überraschende Stabilität. Die Berechnung der Anziehung der Quecksilberquadranten ist wohl etwas langwierig. Eine lange und abwechselungsreiche Reihe von Messversuchen wurde seitdem bald mit kugelförmigen, bald mit parallelepipedischen Bleimassen angestellt, deren Gewicht in manchen Versuchen 50—100 Kilogramm, in anderen 1 Kilogramm oder gar noch weniger betrug.

Für diese, ihrer Methode nach dem Cavendish'schen Verfahren übrigens ähnlichen Messungen ist besonders hervorzuheben, dass die anziehenden Massen meistens mit dem Waagebalken nicht in derselben Höhe, sondern auf einer unter demselben in horizontaler Ebene drehbaren Tischplatte angebracht wurden. Diese Anordnung ist schon deshalb vorteilhaft, weil hiebei der Waagebalken in einen für seinen vollkommenen Schutz so sehr geeigneten flachen cylindrischen Metallkasten eingeschlossen werden kann, wie dies in der I. Abteilung des Näheren erörtert wurde. Ein weiterer Vorteil ergiebt sich daraus, dass die Anordnung so gewählt werden kann, dass die Aenderung der abzumessenden Kraft während der Ausweichung des Waagebalkens vollkommen vernachlässigt werden kann. Die anziehenden Massen können nämlich auf der unter dem Wagebalken befindlichen Platte in eine solche Lage gebracht werden, dass ihre Wirkung auf den Balken ein Maximum wird. Das geschieht z. B. bei der Anziehung von Kugeln in dem Falle, als die auf den Balken senkrechte Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der anziehenden und der dem Balken aufgesetzten Kugeln mit der Horizontalen einen Winkel von nahe 55° bildet. In dieser, dem Maximum der Wirkung entsprechenden Lage genügt es zur Bestimmung der relativen Stellung der aufeinander wirkenden Massen, blos auf die Abmessung des vertikalen Abstandes Sorge zu verwenden, was ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist.

Dass bei einer solchen Anordnung die abzumessende Kraft kleiner wird, als sie im Falle mit dem Waagebalken gleich hoch angebrachter Massen wäre, kommt bei der Empfindlichkeit meiner Apparate nicht in Betracht, da bei einer Schwingungsdauer von 10 oder mehr Minuten auch so noch Ablenkungen von über 2 bis 3 Graden erzielt wurden. Um überzeugende Belege des regelmässigen Verlaufes der ganzen Erscheinung zu gewinnen wurden photographische Aufnahmen derselben verfertigt, welche dadurch entstanden, dass von dem Spiegel des Wagebalkens reflektirtes Licht auf eine mit lichtempfindlichem Papier bezogene und durch Uhrwerk gleichmässig gedrehte Walze fiel.

Bei den Messungen selbst bediente ich mich zumeist der Poggendorff'schen Skalenablesung, die photographische Methode

wurde eher zur beweiskräftigen Demonstration meiner Behauptungen oder aber in solchen Fällen herangezogen, da übergrosse Empfindlichkeit der Instrumente ein Annähern an dieselben verbot. Von solchen Fällen soll noch später die Rede sein.

Ich komme nun zur Darlegung einer wesentlich neuen Methode, die sich mir während meiner auf die Aenderungen der Schwerkraft bezüglichen Untersuchungen darbot. Das Wesen dieser zur Bestimmung der Gravitationskonstante dienlichen Methode besteht nämlich darin, dass nicht die Kraft selbst, sondern nur deren Aenderung gemessen wird, also nicht die Ablenkung des Waagebalkens, sondern einzig dessen Schwingungsdauer und deren Veränderung benützt wird.

Zu dem Ende wurde die in ihrem doppelwandigen Metallkasten gut geschützte Coulomb'sche Waage zwischen zwei auf quadratischer Grundfläche sich erhebenden vertikalen Bleisäulen aufgestellt; der leere Raum zwischen den beiden Säulen besass ebenfalls quadratischen Grundriss. Die Art der Aufstellung ist übrigens aus Fig. 11 ersichtlich. Die Basis der Säulen beträgt nahezu 30×30 Centimeter, die Höhe 60 Centimeter und die Entfernung der gegen einander gekehrten Säulenflächen ebenfalls 30 Centimeter, so dass die ganze Bleimasse als eine 90 Centimeter lange, 30 Centimeter dicke und 60 Centimeter hohe Wand betrachtet werden kann, aus deren Mitte eine quadratische Säule von 30 Centimeter Seitenlänge herausgehoben wurde.

Die Schwingungen des Waagebalkens wurden um zwei aufeinander senkrechten Gleichgewichtslagen beobachtet: um eine longitudinale, in die Längsrichtung der Wand fallende, und um eine darauf senkrechte transversale Lage. In der longitudinalen Stellung betrug die Schwingungsdauer 641 Sekunden, in der transversalen 860 Sekunden.

Die Wahl dieser eigentümlichen Aufstellung der anziehenden Massen entsprang aus folgender, auf einen idealen Fall bezugnehmenden Ueberlegung. Denken wir uns eine unendlich lange, unendlich hohe, aber endlich dicke, parallelepipedische, vertikale, homogene Wand, und legen durch deren Mitte als Anfangspunkt ein orthogonales Koordinatensystem, deren $Z$-Axe nach unten ge-

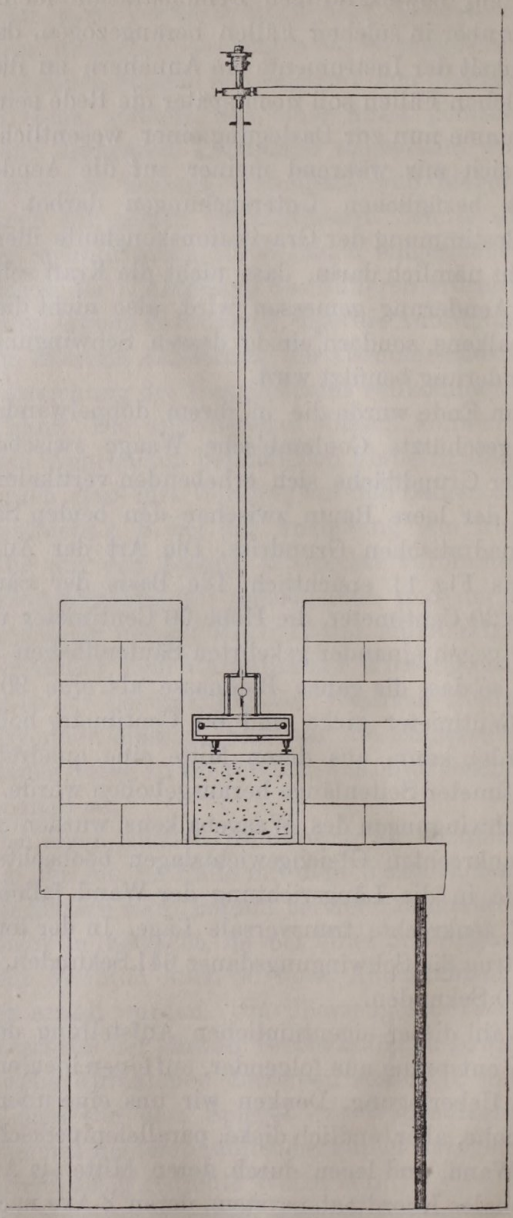


Fig. 11.

kehrt ist, dessen $Y$-Axe in der Längsrichtung der Wand sich erstreckt, während die $X$-Axe hierauf senkrecht steht.

Für einen im Innern dieser Wand vom Anfangspunkte in endlicher Entfernung liegenden $(x, y, z)$ Punkt ist die Anziehung senkrecht zu deren vertikalen Längswand, und mithin wird

$$\frac{\partial V}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

weiterhin

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}=0,$$

und somit bleibt:

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-4\pi f\sigma,$$

wo $\sigma$ die Dichte der homogenen Wand, $f$ die Konstante der Gravitation bedeutet, d. h. jene Anziehungskraft, die im Sinne des NEWTON'schen Gesetzes die Masseneinheit auf die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung ausübt.

Es kann daher die Mitte des Wandinnern als gleichmässig veränderliches Kraftfeld betrachtet werden, und wenn der Waagebalken im Innern der Wand in der $XY$-Ebene frei drehbar gedacht wird, können auf seine Schwingungen die Gleichungen der Abteilung I angewendet werden. Bezeichnet daher $T_l$ die Schwingungszeit um die longitudinale, der Längsrichtung der Wand entsprechenden Gleichgewichtslage, $T_t$ die Schwingungszeit um die darauf senkrechte transversale Lage, so kommt (vergl. p. 203):

$$\pi^2\left(\frac{1}{T_l^2}-\frac{1}{T_t^2}\right)=2(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right);$$

oder mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$\frac{1}{T_l^2}-\frac{1}{T_t^2}=\frac{8\pi f\sigma}{\pi^2}(1-\varepsilon). \qquad 1)$$

Diese Gleichung wird aber auch dann noch richtig bleiben, wenn man aus der unendlichen Wand eine vertikale Säule mit quadratischem Querschnitte derart heraushebt, dass deren Mittelpunkt in die Drehungsaxe des Waagebalkens falle, und dieser nun

in der Tat frei drehbar wird. Bezeichnet man nämlich das Drehungsmoment um die longitudinale, beziehentlich transversale Gleichgewichtslage im Falle der vollen Wand mit $f_l\omega$ und $f_t\omega$, für die unterbrochene Wand mit $f'_l\omega$ und $f'_t\omega$, so ist, wie leicht einzusehen:

$$f'_l\omega - f'_t\omega = f_l\omega - f_t\omega,$$

da die Waagestange in beiden aufeinander senkrechten Lagen der herausgehobenen quadratischen Säule gegenüber in derselben relativen Lage steht, und sonach die Entfernung dieser Masse in beiden Fällen das Drehungsmoment der anziehenden Kräfte um ebendieselbe Grösse verändert; es besteht also mit entsprechenden Bezeichnungen die Gleichung:

$$\frac{\pi^2}{T_l^2} - \frac{\pi^2}{T_t^2} = \frac{\pi^2}{T_l'^2} - \frac{\pi^2}{T_t'^2} = \frac{f_l - f_t}{K};$$

welche unsere Behauptung und die zwei vorangehenden Gleichungen erhärtet.

Für die Säulen endlicher Dimensionen, welche auf die früher beschriebene Weise aufgestellt und bei den Versuchen tatsächlich verwendet wurden, sind ähnliche Ueberlegungen anwendbar; der einzige Unterschied besteht darin, dass in der erwähnten Gleichung an die Stelle von $8\pi$ der Zahlenwert 13,427 tritt. Zunächst gilt diese Zahl strenge nur für die beiden am Ende des Waagebalkens befestigten Kugeln, beansprucht aber bei den gewählten Abmessungen der Waage für die der Drehungsaxe näher gelegenen Teile des Wagebalkens nur sehr kleine Verbesserungen. Es wird sonach:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{13{,}427}{\pi^2} f \cdot \sigma(1 - \varepsilon')$$

wobei $\varepsilon'$ eine kleiner als ein Procent ausfallende Korrectionsgrösse bedeutet, die von den Dimensionen des Waagebalkens und der nicht unendlichen Ausdehnung der anziehenden Wand abhängt.

Die Beobachtung der Schwingungszeiten kann mit überraschender Sicherheit und Genauigkeit angestellt werden. Die Herren Dr. Rudolf Kövesligethy und Dr. Karl Tangl bestimmten aus

59 vom 26. Jänner bis 26. März 1891 sich erstreckenden Beobachtungsreihen den Wert der Grösse $\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2}$. Jede Beobachtungsreihe umfasste 8 Schwingungen um die longitudinale und ebensoviele um die transversale Gleichgewichtslage.

Die äussersten Werte der auf unendlich kleine Amplituden reducierten Schwingungszeiten dieser langen Beobachtungsreihe, während welcher die Temperatur des verfinsterten Kellerraumes von 2° C auf 5 ° C stieg, sind 640,97 und 641,28 Sekunden für die longitudinale, und 859,29 und 860,32 Sekunden für die transversale Stellung. Bei der Berechnung der Beobachtungen fasste ich die Werte der Schwingungsdauer für beide Lagen von je einem Tage zusammen, und erhielt als Mittelwert der 59 Beobachtungen:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = 0{,}000\,001\,080\,31.$$

Unter allen 59 Werten ist nicht einer, der vom Mittel auch nur um ein Tausendstel des Betrages abweiche, und der wahrscheinliche Fehler des Mittels beträgt nur vier Einheiten der letzten Dezimale, also etwa $\frac{1}{25000}$-tel des Ganzen. Bestimmt man darauf die Schwingungszeiten für beide Richtungen auch bei weggenommenen Bleisäulen, so erhält man $T_l = 742{,}82$ Sekunden für die longitudinale und $T_t = 759{,}07$ Sekunden für die transversale Lage, welcher Unterschied offenbar eine Folge der Anziehung der den Beobachtungsraum umgebenden Wände und Bodenmassen ist. Obwohl ich auch die oben mit $\varepsilon'$ bezeichnete Korrektion in Rechnung zog, konnte ich doch diese Aufgabe bis heute nicht vollständig und endgültig lösen, da ich noch nicht Gelegenheit fand einen Faktor, nämlich den Einfluss der während der Schwingung vom Waagebalken in Bewegung gesetzter Luft mit der hier geforderten Genauigkeit aufzudecken. Versuche, die mit eben derselben Coulomb'schen Waage, jedoch nicht zwischen den Bleipfeilern, an einem andern Orte, unter einem besonders hierzu angefertigten, das ganze Instrument bedeckenden Recipienten in verdünnter Luft angestellt wurden, zeigten, dass die Bewegung der Luft in diesem flachen Kasten selbst bei sehr langsamen Schwingungen einen bedeutend grösseren Einfluss auf die Schwingungsdauer

ausübt, als es nach den auf das Pendel bezüglichen Untersuchungen BESSEL's zu erwarten war. Ein Stab, der z. B. in Luft von normalem Drucke eine Schwingungsdauer von 648,92 Sekunden besass, verkleinerte dieselbe in Luft von 20 mm Druck auf 648,00 Sekunden. Diese und ähnliche Versuche gewährleisten aber noch nicht die genügend genaue Bestimmung der nötigen Korrektion, da nach meinen Erfahrungen die Bewegung des Waagebalkens in der Luft sogar von der Höhe desselben im Waagekasten abhängt, und zu dem wäre jedenfalls zu überlegen, ob die Aenderung der anziehenden Kräfte im Innern des Kastens diese Wirkung der Luft nicht in irgend einer Weise beeinflusst.

Es wäre daher für die Lösung der Aufgabe sicherlich zweckdienlicher, diese heiklen Fragen ganz zu umgehen, und die Messungen schon zwischen den Pfeilern in luftleerem Raume anzustellen, was ich jedoch, bei den Dimensionen der mir zu Gebote stehenden Instrumente bisher nicht zu tun in der Lage war.

Teils aus dieser Ursache, teils weil die Homogenität der benützten Bleimassen doch immerhin fraglich bleibt, gehe ich auf Grund meiner bisherigen Beobachtungen nicht weiter mit derjenigen Genauigkeit auf die Bestimmung der Konstante der Gravitation ein, welche unter Anwendung meiner Methoden sicherlich zu erwarten ist. Daher nur die Bemerkung, dass meine bisherigen Beobachtungen den Wert dieser Konstante von

$$f = 0{,}000\,000\,066\,5$$

um kaum ein $\frac{1}{500}$-tel des Betrages abweichend festsetzen.

In dieser Abhandlung lege ich jedoch nicht auf diesen Zahlenwert, sondern vielmehr auf die Methode das Hauptgewicht, da mich dünkt, dass die schon jetzt erlangte Genauigkeit in der Beobachtung der Schwingungszeiten Gewähr leiste, dass diese überaus wichtige Konstante mit eben dieser Genauigkeit bestimmt werden könne, mit welcher die Schwerebeschleunigung aus Pendelschwingungen ableitbar ist. Dazu gehört aber ausser der richtigen Beobachtung der Schwingunszeiten noch luftleerer Raum und statt des unzuverlässigen Bleies wirklich homogenes Quecksilber.

## IV. Zwei Hülfsmittel zum Studium der Gravitation.

### *1. Gravitationscompensator.*

Bei allen Instrumenten, mit denen die bisher aufgezählten Untersuchungen angestellt wurden, setzte der Empfindlichkeit die Grösse des Torsionskoëfficienten des den Waagebalken tragenden Platindrates oder Quarzfadens eine Grenze. Indem ich noch grössere Empfindlichkeit anstrebte, wendete ich mich dem Hülfsmittel der Kompensation zu und benützte zu diesem Zwecke gerade die Massenanziehung selbst, die ihrer Beständigkeit zufolge zweifelsohne hiezu dienlicher war, als irgend eine andere Kraft.

Die durch ihre Anziehungskraft kompensirenden Massen wurden an beiden Seiten nahe dem Ende des Balkens so angebracht, dass in der Gleichgewichtslage desselben die Kraft selbst Null oder wenigstens sehr klein, ihre Aenderung dagegen bei einer Ablenkung des Stabes bedeutend werde. Das Drehungsmoment sämmtlicher auf den Balken wirkenden Kräfte wird dann bei der kleinen Elongation $\omega$ desselben $(\tau \pm \varphi)\omega$ sein, d. h. je nach der Anordnung der kompensirenden Massen grösser oder kleiner, als es der Drahtelasticität allein entspräche. Auf diese Weise gelang es mir in der Tat ein Instrument zu bauen, dessen Empfindlichkeit ganz nach Belieben bis zur Unendlichkeit, d. h. bis zum Eintreten des labilen Gleichgewichtes gesteigert werden kann.

Dieser Apparat ist durch die Figuren 12 und 13 dargestellt. Der an seinen Enden mit Kugeln belastete leichte Waagebalken wurde behufs zweckdienlicher Anordnung der kompensirenden Massen in eine 4 Centimeter äusseren Durchmesser haltende doppelwandige Metallröhre verschlossen, so dass der ganze Waagekasten ein $\perp$-förmiges Rohr bildet: In dem 1·5 Meter langen vertikalen Teile befindet sich der Aufhängedraht oder Quarzfaden; in dem 55 Centimeter langen horizontalen Teile schwingt der Waagebalken. Derselbe ist 50 Centimeter lang, die seinen Enden angesetzten Kugeln wiegen je 30 Gramm, das Drehungsmoment des ganzen Systems betrug ohne die kompensirenden Massen 0,1478 $\omega$ C. G. S. Dieses enthält (siehe I. Abteilung) natürlich ausser dem der Drillung des Drates entgegenwirkenden Momente auch noch

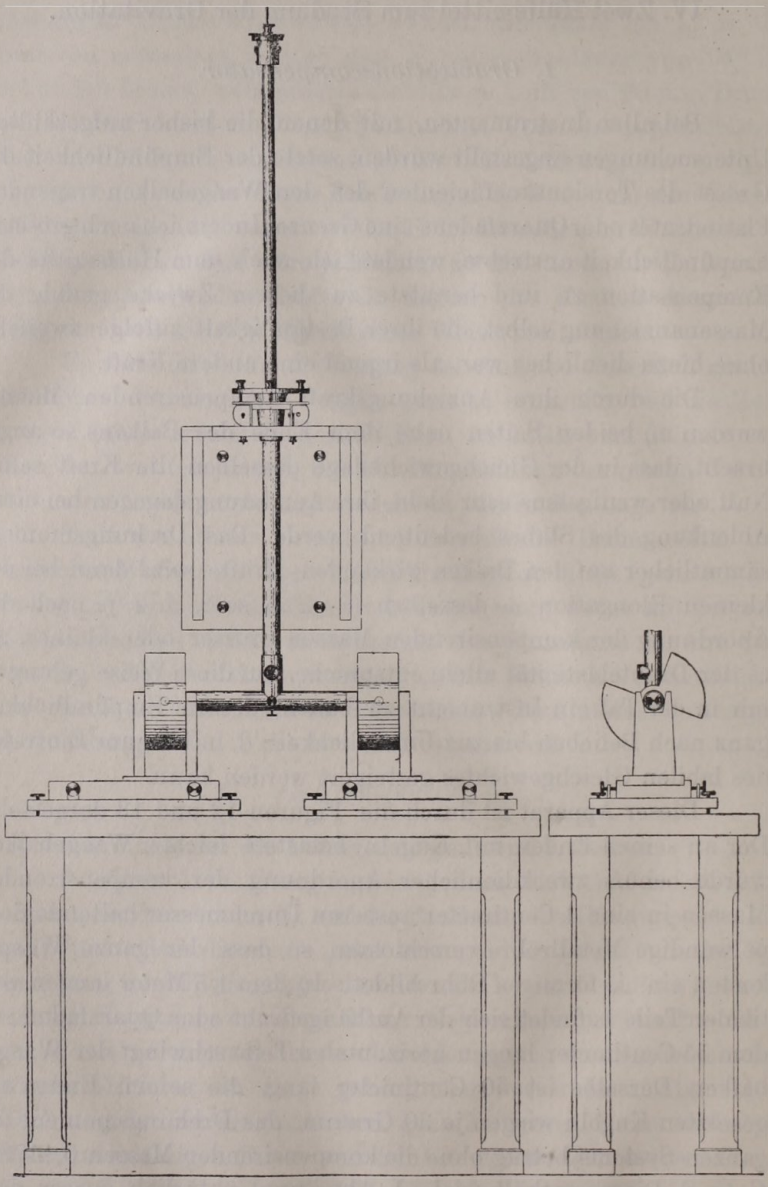


Fig. 12. und 13.

jenes Drehungsmoment, welches aus der Schwereänderung am Beobachtungsorte entspringt.

Die kompensirenden Bleigewichte sind an eine, das Schutzrohr des Waagebalkens umgebende Metallhülse von 5 Centimeter lichtem Durchmesser gelötet; diese Hülse ruht in einem horizontalen Axenlager, so dass die Gewichte um das horizontale Rohr der Waage gedreht werden können.

Die Kompensationsmassen erhielten die Form von Cylinder-Quadranten, deren mittlerer Teil durch die Metallhülse abgeschnitten ist, an welcher sie angelötet sind, Fig. 14. a. f. S. Zwei auf der erwähnten Hülse sich gegenüberstehende Quadranten bilden einen Kompensator. Die Dimensionen derselben sind: innerer Radius des Quadranten 2,5, äusserer Radius 12 Centimeter, Dicke, d. h. der Abstand der beiden ebenen Begrenzungsflächen 9,5 Centimeter.

An beiden Enden der Waage kann je ein solcher Kompensator angebracht werden, so dass sich die Kugeln des Waagebalkens um die Mitte der Cylinderquadranten bewegen.

Sowohl die Kugeln, als der Stab stehen unter Einfluss der Anziehung der beiderseits sich gegenüberstehenden Quadranten. In der Mittellage des Stabes halten sich diese von entgegengesetzten Seiten kommenden und im Falle gleicher Quadranten ebenfalls gleiche Kräfte zwar das Gleichgewicht, aber die Kräfteänderungen um die Gleichgewichtslage bringen, als mit gleichen Vorzeichen behaftet, auch gleichgerichtete Wirkungen hervor.

Bedenkt man, dass der Mittelpunkt der den Waagebalken einer Coulomb'schen Wage aufgesetzten Kugel bei unendlich kleinen Ausweichungen das horizontale Bogenelement

$$\delta s = l\delta\omega$$

beschreibt, so ist die nahe der Gleichgewichtslage in der Richtung der Bewegung ablenkende Kraft

$$fm\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\delta s = fm\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}l\delta\omega;$$

und deren Drehungsmoment:

$$fm\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}l^2\delta\omega.$$

Es ist leicht einzusehen, dass sich der Wert $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ mit der Neigung der Quadranten gegen die Horizontale verändert, und bezeichnet $\varphi$ den Neigungswinkel der Mittellinie $KK$ der Quadranten (Fig. 14), so lässt sich mittels Rechnung die Beziehung nachweisen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = a + b \cos 2\varphi.$$

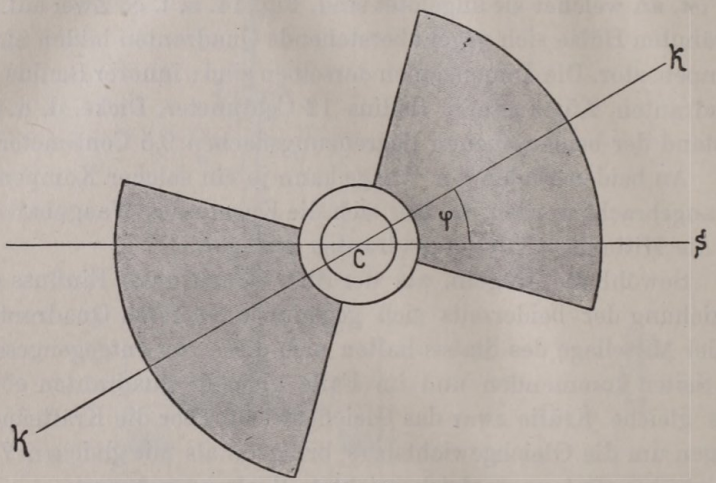



Fig. 14.

Hiebei sind $a$ und $b$ Konstanten, welche lediglich von den Abmessungen und der Dicke der Quadranten und dem Wert der Gravitationskonstanten abhängen; für mein Instrument ergaben sie sich zu:

$$a = 0{,}000\,001\,190,$$
$$b = 0{,}000\,003\,722.$$

Setzt man dann $m = 30$ g, $l = 25$ c, so wird das die Ausweichung der Stange vergrössernde Drehungsmoment der gesammten Kompensationsmassen:

$$F\omega = (0{,}044\,62 + 0{,}139\,57 \cos 2\varphi)\,\omega;$$

ohne die Kompensationsmassen war aber, wie schon früher p. 235 unten erwähnt:

$$\tau\omega = 0{,}147\,8\,\omega;$$

so dass das Drehungsmoment, welches den Waagebalken des mit Kompensatoren versehenen Instrumentes in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt

$$F\omega = (\tau - F)\,\omega = (0{,}103\overset{-}{15} - 0{,}139\,57\cos 2\varphi)\,\omega$$

wird. Um das Drehungsmoment und damit die Empfindlichkeit zu verändern, bedarf es nur einer Neigungsänderung der Quadranten. So ist z. B.

bei $\varphi = 90°$ $F = 0{,}242\,72$;
« $\varphi = 45°$ $F = 0{,}103\,15$;
« $\varphi = 25°$ $F = 0{,}013\,44$;

und bei $\varphi = 21°\ 10'\ 45''$ gar $F = 0$, d. h. der Waagebalken wird labil. Setzt man das Trägheitsmoment des Balkens in runder Zahl zu 38000, und zieht von dem Luftwiderstande ab, so ergiebt sich nach der Formel die Schwingungsdauer

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{F}}$$

für $\varphi = 90°$ $T = 1243^s$;
« $\varphi = 45°$ $T = 1907^s$;
« $\varphi = 35°$ $T = 5283^s$;

wegen des Widerstandes der Luft kommen aber diese über eine Stunde langen Schwingungen in der Tat nicht mehr zu Stande, sie gehen vielmehr in eine aperiodische Bewegung über.

Bei solch' empfindlicher Einstellung nimmt das Instrument nur an möglichst geschütztem Orte, z. B. in einem gut temperirten und verdunkelten Keller stabile Gleichgewichtslage ein, und die Beobachtung selbst kann nur mehr auf photographischem Wege mit der erforderlichen Genauigkeit bewerkstelligt werden. Unter diesen Vorbedingungen entspricht aber die Waage allen Erwartungen. So gelang es durch die im Keller aufgestellte Waage die Anziehung einer im benachbarten Hofe in fünf Meter Entfer-

nung angebrachten Masse von 300 Kilogramm nachzuweisen. Wurde die Masse in derselben Entfernung auf die Seite entgegengesetzter Wirkung übertragen, so erlitt der Wagebalken, wie es die vorhergehende Rechnung erheischte, eine Ablenkung von über 4 Bogenminuten. (Siehe Figur 15, *f*.)

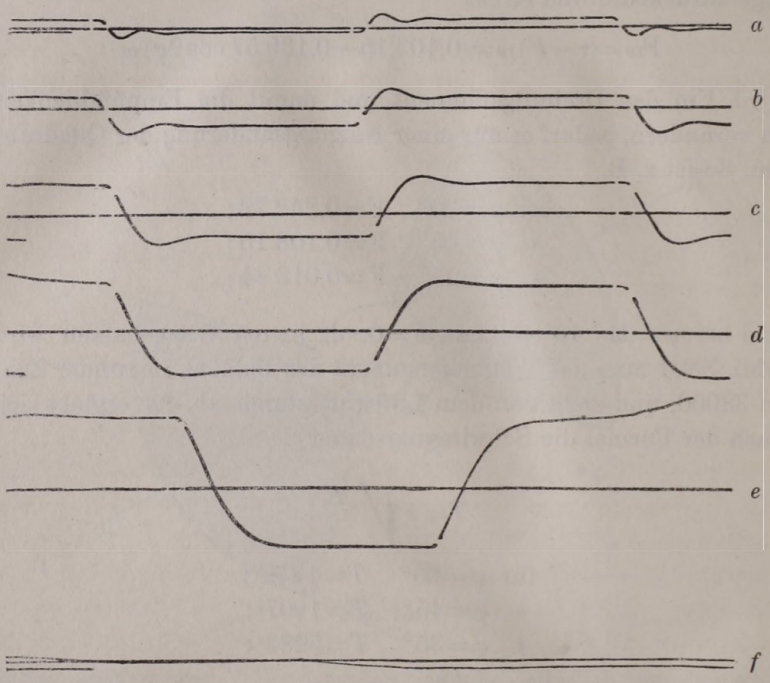



Fig. 15.

Die durch die Neigung der Quadranten gesteigerte Empfindlichkeit des Instrumentes wird durch die Figur 15 zum Ausdruck gebracht. Die Kurven *a*, *b*, *c*, *d*, *e* beschrieb der Balken stets unter Wirkung der Anziehungskraft einer Masse von 5 Kilogramm in einem Abstande von $\frac{1}{2}$ Meter, die in wechselnder Aufeinanderfolge von der einen Seite auf die Seite der entgegengesetzten Wirkung transponirt wurde, doch waren dabei die Neigungswinkel $\varphi$ der Quadranten verschieden, und zwar 50° bei *a*, 45° bei *b*, 35° bei *c*, 30° bei *d* und 27,5° bei *e*. Zugleich ersieht man, wie die bei

$a$ noch schwingende Bewegung sich bei $d$ und $e$ in eine aperiodische Bewegung verwandelt.

Zur Beurteilung der erreichbaren Empfindlichkeit meines Instrumentes möchte ich noch Eines erwähnen. Sollte sich einst Gelegenheit bieten, mein Instrument neben einem Flusse, See oder dem Meere so aufzustellen, dass es von den vertikalen Ufern um 1 Meter abstehe, während der Balken mit der Uferlinie einen Winkel von 45° einschliesst, so würde die Zunahme der Wasserhöhe um einen Centimeter bei einer Neigung der Kompensatoren von 45° einen Ausschlag von einer Bogenminute, bei einer Neigung von 25 Graden schon eine Ablenkung von 7 Bogenminuten hervorbringen. Daher könnte das Instrument ganz wohl zur photographischen Registrirung der Gezeiten verwendet werden, und dies mit umso grösserem Vorteile, da es auch bei bewegtem Wasser stets den mittleren Stand angeben würde.

### *2. Gravitations-Multiplikator.*

Es gelang mir auch, die unter Einfluss der Massenanziehung entstehenden kleinen Schwingungen durch Multiplikation in solche von grosser Amplitude zu verwandeln. Diese Multiplikation wurde in der folgenden Weise bewerkstelligt: unter dem Waagebalken befinden sich auf drehbarer Tischplatte die anziehenden Massen, die z. B. in ihrer Anfangsstellung den Balken in der Richtung des Ganges des Uhrzeigers ablenken. Im Moment der grössten Elongation werden die Massen durch Drehung des Tisches in eine Stellung gebracht in der die Anziehung eine entgegengesetzte Ablenkung verursacht; ist auch in dieser Richtung die grosse Elongation erreicht, so werden die Gewichte wieder in die erste Stellung umgelegt u. s. f. Bei dieser Art der Multiplikation, wo die Schwingungen des Balkens abwechselnd um zwei Gleichgewichtslagen vor sich gehen, wird der Grenzwert der durch mehrfache Wiederholunlungen vergrösserten Amplitude

$$A = a\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta};$$

wo $a$ die Entfernung der beiden Gleichgewichtslagen von einander, und $\vartheta$ das Dämpfungsverhältniss bedeutet, das bei Schwingungen

um eine feste Gleichgewichtslage bekanntlich durch den Quotienten zweier aufeinander folgenden Elongationen bestimmt wird.

Die photographischen Aufnahmen der so multiplicirten Schwingungen legen einen sprechenden Beweis dafür ab, in welchem Maasse es mir gelang, bei meinen Instrumenten alle jene störenden Faktoren fern zu halten, welche sonst die Zuverlässigkeit der Coulomb'schen Wage so oft beinträchtigen. Auf diese Weise wurden längere Schwingungen von 10 Minuten sowohl, als auch kürzere von nur eine Minute multiplicirt. Die End-Elongation konnte im ersten Falle auf das zwanzigfache, im zweiten Falle gar auf das 150-fache der einfachen Ablenkung mit immer gleicher Sicherheit und Konstanz vergrössert werden.

Diese Methode der Multiplikation wird zweifelsohne auch beim Studium der Gasreibung gute Dienste leisten können.

Mir schwebte vorderhand ein anderes Ziel vor, indem ich die Multiplikation als sehr empfindliche Methode zur Bestimmung der Schwingungsdauer und deren Aenderung benützte. Ist nämlich T das Zeitintervall der periodischen Umlagerung der Massen, also die Periode der Aenderung der Kraft nicht identisch mit der Schwingungsdauer $T$ des Waagebalkens, so kommen Schwingungen zu Stande, deren Endelongation $A$ nicht blos vom Abstande $A$ der Gleichgewichtslagen, und der Dämpfung $\vartheta$, sondern auch noch vom Werte der beiden Perioden $T$ und T abhängen. Der Balken wird in diesem Falle seinen Hin- und Hergang nicht mehr während einer Periode seiner eigenen Schwingung, sondern in der ihm durch die Kraftänderung auferzwungenen Zeit vollenden. Ich nenne daher diese Schwingungen, welche aus den Teilen zweier einfachen, um die jeweilige Gleichgewichtslage vor sich gehender Schwingungen zusammengesetzt sind, erzwungene Schwingungen.

Wird ein Waagebalken von der konstantbleibenden Schwingungsdauer $T$ durch Massenumlagerung verschiedener Periode in erzwungene Schwingung versetzt, so ist klar, dass die Werte der Endelongation Daten liefern werden, aus welchen die eigene Schwingungsdauer $T$ bestimmt werden kann. Und ebenso klar ist es, dass bei konstant bleibender Periode der Massenumlagerung Veränderungen in der eigenen Schwingungsdauer des Wagebal-

kens sich in der schliesslichen Grösse der End-Elongationen verraten werde. Wie empfindlich diese End-Elongation für Aenderungen der Perioden T oder $T$ ist, möge aus folgendem Beispiele ersehen werden:

mit $T = 611^s$ und $\mathrm{T} = 611^s$ wird $A = 252'$ Bogenminuten;
« $T = 611^s$ « $\mathrm{T} = 600^s$ « $A = 225'$ « ;
« $T = 611^s$ « $\mathrm{T} = 590^s$ « $A = 180'$ « ;

so dass eine Verkleinerung von 10 Sekunden in der Zeit T die Grenzelongation um 45 Bogenminuten verkleinert, was durchschnittlich 4,5′ auf eine Sekunde ergiebt.

Aus der Abmessung der Grenzelongationen dieser erzwungenen Schwingungen können daher in der Tat Schwingungszeiten bestimmt werden, und diese Methode wird besonders dort mit grossem Vorteile benützt werden können, wo bei grosser Dämpfung eine längere Reihe von Schwingungen nicht beobachtet werden könnte.

Zur Erleichterung der practischen Ausführung solcher Multiplicationen, insbesonders aber, um der langandauernden, geisttödtenden Arbeit der Massenumlegung enthoben zu sein, construirte ich den *Electromagnetischen Multiplicator*, einen Mechanismus, welcher diese Massenumlegung mit der Genauigkeit einer Uhr bewerkstelligt. Auch dieses Instrument wurde vom Director der staatlich subventionirten mechanischen Lehrwerkstätte, Herrn Ferdinand Suss mit gewohnter Geschicklichkeit ausgeführt.

12.

# ÜBER DIE MEHRFACHEN INVOLUTIONEN.

Von Dr. JULIUS VÁLYI,

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KOLOZSVÁR (KLAUSENBURG).

Erste Mitteilung.

Vorgelegt in der Sitzung der Akademie vom 22. Oktober 1894 vom o. M. *Julius König*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XII, pp. 394—407. 1894.

## I.

In der linearen Punktreihe suchen wir solche Punktsysteme

$$A_hB_h\,,\ (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1\,;\ r>2),$$

auf, welche durch die beiden Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_h \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+1} \end{pmatrix}$$

verbunden sind, wo die Indices mod. $r$ zu reduzieren sind.

Setzen wir voraus, dass das gemeinschaftliche Punktpaar $(MM')$ der beiden Involutionen keinen Doppelpunkt bilde. Nehmen wir diese Punkte zu Grundpunkten der Punktreihe und seien $\alpha_h$, $\beta_h$ die Coordinaten von $A_h$ resp. $B_h$.

Die beiden Involutionen werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_h\,\beta_h &= c \\ \alpha_h\,\beta_{h+1} &= c_1 \end{aligned} \qquad (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)$$

ausgedrückt, woraus folgen

$$\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} = \frac{\beta_h}{\beta_{h+1}} = \frac{c}{c_1} \qquad (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

und wenn man die $r$ Gleichungen zusammenmultipliziert, erhält man

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^r = 1,$$

also ist $\frac{c}{c_1}$ eine $r$-te Einheitswurzel.

Bezeichnen wir dieselbe mit $\varepsilon$.

Aus den obigen Gleichungen folgen weiter

$$a_h = a_0\varepsilon^h, \quad \beta_h = \beta_0\varepsilon^{-h} \qquad (h=0, 1, \ldots, r-1).$$

Wenn also die Zahlen $a_h\beta_h$ $(h=0, 1 \ldots r-1)$ verschieden sein sollen, muss $\varepsilon$ eine primitive $r$-te Einheitswurzel sein.

Man erhält weiter

$$a_h \cdot \beta_{h+k} = a_0\beta_0\varepsilon^{-k} = c\varepsilon^{-k} \qquad (h=0, 1, \ldots, r-1),$$

welche Gleichungen zeigen, dass die beiden Punktsysteme auch durch die Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+k} \end{pmatrix} \qquad (k=2, 3, \ldots, r-1)$$

verbunden sind. Die Involution ist also eine $r$-fache.

Das Punktpaar $MM'$ gehört zu jeder dieser Involutionen. Die Doppelpunkte dieser Involutionen bilden also wieder eine Involution mit $MM'$ als Doppelpunkten.

Von solchen Involutionen sagt man, dass sie einen *Büschel* bilden.

Wir nennen die Punktsysteme $A_hB_h$ $r$-aden (Triade, Tetrade etc.). Die Punkte $MM'$ sollen *Grundpunkte* der $r$-aden und des zugehörigen Involutionenbüschels heissen.

Ueber die $r$-aden gelten die Sätze:

*Lehrsatz 1.* Diejenigen Punkte, welche den Punkten einer $r$-ade in einer solchen Involution entsprechen, welche zum Involutionen-Büschel der Grundpunkte angehört, bilden selbst eine $r$-ade. Die beiden $r$-aden sind $r$-fach involutorisch.

*Lehrsatz 2.* Wenn man zwei beliebige Punkte der Punktreihe zu Grundpunkten wählt, so gehören dazu einfach unendlich viele $r$-aden *($r$-adensystem).* Jeder Punkt der Punktreihe (die Grundpunkte ausgenommen) gehört zu einer $r$-ade des Systems.

*Lehrsatz 3.* Je zwei $r$-aden desselben Systems sind $r$-fach involutorisch, ja sogar jede $r$-ade mit sich selbst. Die Symbole der $r$ Involutionen sind

$$\binom{A_h}{A_{-h+k}}, \quad (k=0, 1, \ldots, r-1).$$

*Lehrsatz 4.* Die Doppelpunkte der $r$ Involutionen, welche zwischen zwei $r$-aden desselben Systems bestehen, bilden eine $2r$-ade mit denselben Grundpunkten.

Denn die Doppelpunkte der Involutionen der beiden $r$-aden

$$\alpha_h=\alpha_0\varepsilon^h, \ \beta_h=\beta_0\varepsilon^{-h} \quad (h=0, 1, \ldots, r-1);$$

haben die Coordinaten

$$\pm\sqrt{\alpha_0\beta_0\varepsilon^{-k}} \quad (k=0, 1, \ldots, r-1),$$

woraus der Satz folgt.

## II.

Die Coordinaten der Punkte einer $r$-ade haben wir zwar nicht in reeller Form erhalten, doch gibt es auch reelle $r$-aden.

Wenn man die Grundpunkte der $r$-ade zu Grundpunkten der Punktreihe, einen Punkt $(A_0)$ derselben zum Einheitspunkt wählt, so sind die Coordinaten der Punkte

$$\varepsilon^h, \quad (h=0, 1, \ldots, r-1);$$

wo $\varepsilon$ eine primitive $r$-te Einheitswurzel bezeichnet.

Der absolute Betrag aller dieser Zahlen ist 1. Die Gesammtheit solcher Zahlen kann aber durch eine passend gewählte lineare Transformation (wodurch ja nur eine Coordinaten-Transformation ausgeführt wird) in reelle Zahlen übergeführt werden.

Die einfachste solche Transformation ist die folgende

$$t'=i\,.\,\frac{1-t}{1+t},$$

wo $t$ die alte, t' die neue Coordinate und $i$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Die Coordinaten derjenigen $r$-aden $(\beta_0\varepsilon^{-h})$, für welche

$$|\beta_0| = 1$$

ist, werden hierdurch reell gemacht.

Die Grundpunkte, welche die Coordinaten 0, $\infty$ hatten, erhalten als neue Coordinaten $i$ und $-i$. Sie sind also conjugirt complex. Die Doppelpunkte der $r$ Involutionen zwischen zwei reellen $r$-aden desselben Systems bilden also immer eine elliptische Involution. Die $r$ Involutionen der beiden $r$-aden sind aber sämmtlich hyperbolisch. Denn die alten Coordinaten der Doppelpunkte dieser Involutionen bei den $r$-aden

$$\varepsilon^h,\ \beta_0\varepsilon^{-h}\ (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

sind

$$\pm\sqrt{\beta_0\varepsilon^{-k}},\ (k=0, 1, \ldots, r-1).$$

Ihre absoluten Beträge sind also $=1$, wenn $|\beta_0| = 1$ ist. Die neuen Coordinaten werden also reell sein, wodurch die hyperbolische Involution bewiesen ist.

Es sei noch erwähnt, dass $r$ Punkte, welche durch die Wurzeln einer binären Form $r$-ten Grades bestimmt werden, bilden dann eine $r$-ade, wenn diese Form durch lineare Transformation in die Form

$$x_1^r + x_2^r$$

transformirt werden kann. Die Grundpunkte werden durch die Wurzeln der Hesse'schen Covariante bestimmt, welche bei solchen Formen die $(r-2)$-te Potenz einer quadratischen Form bildet.

Die einfachsten hierzu gehörigen Sätze sind die folgenden: Drei Punkte einer geraden Linie, wenn sie von einander verschieden sind, bilden immer eine Triade.

Vier Punkte einer geraden Linie bilden nur dann eine Tetrade, wenn die cubische Invariante der zugehörigen biquadratischen Form verschwindet, die quadratische Invariante aber nicht, d. h. wenn die vier Punkte harmonisch sind.

## III.

Zur Bestimmung einiger Eigenschaften der $r$-aden brauchen wir den folgenden algebraischen Hülfsatz:

bei der linearen Beziehung

$$axx'+bx+b'x'+c=0$$

wo $ac—bb'$ nicht verschwindet, können die $r$-ten Einheitswurzeln ($r>2$) nur dann einander entsprechen, wenn

$$\begin{array}{ll} \text{entweder} & b=b'=0, \quad a^r=(-c)^r, \\ \text{oder} & a=c=0, \quad b^r=(-b')^r. \end{array}$$

Denn aus der obigen Gleichung folgt

$$x'=-\frac{bx+c}{ax+b'},$$

folglich können die $r$-ten Einheitswurzeln einander nur dann entsprechen, wenn die beiden Functionen

$$(ax+b')^r-(-bx-c)^r \quad \text{und} \quad x^r-1$$

sich von einander nur in einem von $x$ unabhängigen Factor unterscheiden. Dann bestehen aber unter anderen die Gleichungen

$$a^{r-1}b' = (-1)^r b^{r-1}c;$$
$$a^{r-2}b'^2 = (-1)^r b^{r-2}c^2;$$

woraus folgt, dass die Grössen $abb'c$ nicht sämmtlich von 0 verschieden sein können, denn sonst wäre

$$\frac{a}{b'}=\frac{b}{c},$$

gegen der Voraussetzung.

Wenn aber eine der Grössen $abb'c$ verschwindet, so können nur die beiden erwähnten Fälle bestehen.

Mit Hülfe dieses Satzes können wir die folgenden Fragen beantworten:

1. Können mehr als $r$ Involutionen zwischen zwei $r$-aden desselben Systems bestehen?

Es seien die beiden $r$-aden

$$\alpha_h=\varepsilon^h, \quad \beta_h=\beta_0\varepsilon^{-h} \qquad (h=0, 1, \ldots, r-1).$$

Die Gleichung einer Involution ist

$$a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+c=0,$$

wo die obigen Grössen $\alpha\beta$ einander in irgend einer Reihenfolge entsprechen. Dies kann aber nach dem Hülfsatze nur so geschehen, wenn

entweder $\quad b=0, \quad (\alpha\beta_0)^r=(-c)^r,$

was zu den schon bekannten $r$ Involutionen führt,

oder $\quad a=c=0, \quad (-\beta_0)^r=1.$

Hieraus folgt, dass zwischen den beiden $r$-aden

$$\varepsilon^h, \quad -\varepsilon^h \quad (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

neben den vorigen $r$ Involutionen, noch eine $(r+1)$-te besteht, deren Doppelpunkte mit den Grundpunkten der $r$-aden zusammenfallen. Diese Involution gehört also nicht zum Büschel der anderen $r$ Involutionen.

Zu jeder $r$-ade gehört also eine mit ihr $(r+1)$-fach involutorische $r$-ade. Bei einem geraden $r$ sind die beiden $r$-aden identisch, bei einem ungeraden $r$ sind sie verschieden, und ergänzen sie sich zu einer $(2r)$-ade.

Z. B. zur Triade

$$1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2,$$

gehört die mit ihr vierfach involutorische Triade

$$-1, \quad -\varepsilon, \quad -\varepsilon^2.$$

Von den beiden zu ihnen gehörigen cubischen Formen bildet die eine die cubische Covariante der anderen.

2. Sind mehrfache Involutionen zwischen zwei $r$-aden aus verschiedenen Systemen möglich?

Es seien die beiden $r$-aden

$$a_h=\varepsilon^h, \quad \beta_h, \quad (h=0, \quad 1, \ldots, r-1),$$

und zwischen ihnen die beiden Involutionen

$$a\,\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+c=0,$$
$$a'\alpha'\beta+b'(\alpha'+\beta)+c'=0,$$

wo weder $b$, noch $b'$ verschwinden kann, denn sonst würden die beiden $r$-aden zu demselben Systeme angehören.

Weil die Zahlen $\alpha\beta$ verschieden sind, ist die parabolische Involution auszuschliessen. Deshalb können

$$ac-b^2, \quad a'c'-b'^2$$

nicht verschwinden.

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$(ab'-a'b)\,\alpha\alpha'+(ac'-bb')\,\alpha+(bb'-a'c)\,\alpha'+(bc'-b'c)\equiv 0,$$

wo $\alpha$ und $\alpha'$ in einer gewissen Reihenfolge die $r$-ten Einheitswurzeln durchlaufen. Dies kann aber nur dann geschehen, wenn entweder

$$ab'-a'b=0, \quad bc'-b'c=0,$$

woraus aber die Identität der beiden Involutionen folgen würde, oder

$$ac'=bb'=a'c;$$
$$(ab'-a'b)^r=(b'c-bc')^r.$$

Hieraus folgt

$$c^r=a^r,$$

d. h.

$$c=a\varepsilon^k,$$

wo $\varepsilon$ eine primitive Einheitswurzel, $k$ eine ganze Zahl bezeichnet.

Aus den obigen Gleichungen folgt weiter

$$a' : b' : c'=b\varepsilon^{-k} : a : b.$$

Die Involution $(a, b, a\varepsilon^k)$ führt also die Involution $(b\varepsilon^{-k}, a, b)$ nach sich. Eine zweifache Involution ist also möglich, aber eine mehr als zweifache nicht.

Den Grundpunkten $(MM')$ der ersten $r$-ade, deren Coordinaten $0, \infty$ sind, entsprechen in der ersten Involution

$$-\frac{a\varepsilon^k}{b}, \quad -\frac{b}{a},$$

und in der zweiten Involution

$$-\frac{b}{a}, \quad -\frac{a\varepsilon^k}{b},$$

d. h. dieselben Punkte, aber in verkehrter Ordnung. Die beiden Punkte werden dadurch charakterisirt, dass das Product ihrer Coordinaten $\varepsilon^k$ ist, woraus folgt, dass sie einer der zur ersten $r$-ade gehörigen Involution angehören.

Das Resultat können wir in den folgenden Satz zusammenfassen:

Wenn $MM'$ die Grundpunkte einer $r$-ade, $NN'$ ein Punktpaar einer dazu gehörigen Involution bezeichnen, so entsprechen in den beiden Involutionen, deren erste durch die Punktpaare

$$MN,\ M'N',$$

deren zweite durch die Punktpaare

$$MN',\ M'N$$

bestimmt werden, den Punkten der $r$-ade die Punkte desselben Systems. Die beiden Punktsysteme können aber durch keine weitere Involution verbunden werden.

## IV.

Bei der Bestimmung der $r$-aden sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, dass das gemeinschaftliche Punktpaar der beiden Involutionen

$$\binom{A_h}{B_h},\quad \binom{A_h}{B_{h+1}}$$

keinen Doppelpunkt bildet. Wir werden jetzt zeigen, dass diese Voraussetzung einzig möglich ist.

Setzen wir das Gegenteil voraus. Es seien die Doppelpunkte der ersten Involution $DD_1$, die der zweiten $DD_2$.

Wählen wir den Punkt $D$ zum ersten Grundpunkte der Punktreihe, denjenigen Punkt, welcher den Punkt $D$ von den Punkten $D_1 D_2$ harmonisch trennt, zum zweiten Grundpunkte. Wenn wir noch den Einheitspunkt passend wählen, werden die Gleichungen der beiden Involutionen sein

$$\begin{aligned} \alpha_h \beta_h \quad -\alpha_h - \beta_h \quad &= 0 \\ \alpha_h \beta_{h+1} + \alpha_h + \beta_{h+1} &= 0 \end{aligned} \qquad (h = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Hieraus folgt

$$2\beta_h\beta_{h+1}+\beta_h-\beta_{h+1}=0\,;\quad (h=0,\,1,\,\ldots,\,r-1),$$

also verschwinden die Zahlen $\beta$ sämmtlich, wenn eine einzige von ihnen verschwindet.

Diese Lösung ist aber eine uneigentliche, denn in diesem Falle würden die Punkte zusammenfallen.

Eine andere Lösung gibt es aber nicht, denn wenn die Zahlen $\beta$ sämmtlich von 0 verschieden sind, so folgen aus den obigen Gleichungen

$$2+\beta_{h+1}^{-1}-\beta_h^{-1}=0,\qquad (h=0,\,1,\,\ldots,\,r-1),$$

und hieraus durch Addition

$$2r=0,$$

was unmöglich ist.

Ausser den schon bestimmten $r$-aden gibt es also keine anderen.

## V.

Den bei den $r$-aden auftretenden Fall der mehrfachen Involution können wir *monocyclisch* nennen. Die mehrfache Involution ist *polycyclisch*, wenn die Punktsysteme

$$A_h^k\quad B_h^k\quad \begin{pmatrix} k=1,\,2,\,\ldots,\,s \\ h=0,\,1,\,\ldots,\,r_k-1 \end{pmatrix}$$

durch die beiden Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h^k \\ B_h^k \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} A_h^k \\ B_{h+1}^k \end{pmatrix}$$

gleichzeitig verbunden sind, wo die Indices von $A^k\,B^k$ *mod.* $r_k$ zu reduzieren sind.

Wenn wir wieder das gemeinschaftliche Punktpaar $(MM')$ der beiden Involutionen zu Grundpunkten der Puntreihe wählen, werden die beiden Involutionen durch die Gleichungen ausgedrückt

$$\begin{aligned} \alpha_h^{(k)}\cdot\beta_h^{(k)} &= c\,; \\ \alpha_h^{(k)}\cdot\beta_{h+1}^{(k)} &= c_1\,; \end{aligned}\qquad \begin{pmatrix} k=1,\,2,\,\ldots,\,s \\ h=0,\,1,\,\ldots,\,r_k-1 \end{pmatrix}$$

Hieraus

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^{r_k}=1, \quad (k=1, 2, \ldots, s).$$

Wenn $r$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen $r_k$, $(k=1, 2 \ldots s)$ bezeichnet, dann sind die obigen $s$ Gleichungen mit der folgenden æquivalent

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^{r}=1.$$

Die Punkte $A_h^k$ sind nur dann verschieden, wenn

$$r_1 = r_2 = \ldots r_s = r,$$

und $\frac{c}{c_1}$ eine primitive $r$-te Einheitswurzel $(\varepsilon)$ ist.

Dann sind

$$\alpha_h^{(k)}=\alpha_0^{(k)} \cdot \varepsilon^h, \quad \beta_h^{(k)}=\beta_0^{(k)} \cdot \varepsilon^{-h}, \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, s \\ h=0, 1, \ldots, r-1 \end{pmatrix},$$

wo

$$\alpha_0^{(k)} \cdot \beta_0^{(k)}=c, \quad (k=1, 2, \ldots, s),$$

sind.

Die Punktsysteme bestehen also aus je $s$ $r$-aden desselben Systems, welche mit einander $r$-fach involutorisch sind.

Hiernach giebt die polycyclische mehrfache Involution im Grunde genommen nichts Neues.

Die bisherigen Resultate können auf Punktsysteme, welche auf einem Kegelschnitte oder auf einer Raumcurve dritter Ordnung liegen, leicht übergeführt werden.

Hierüber sprechen die beiden folgenden Capiteln.

## VI.

Die parametrische Darstellung einer Punktreihe auf einem Kegelschnitte lautet bei einem passend gewählten Coordinatensysteme

$$x : y : z = 1 : \lambda : \lambda^2.$$

Die einzelnen Punkte bezeichnen wir mit den entsprechenden Werten des Parameters.

Die Grundpunkte der Punktreihe $(0,\infty)$ fallen mit dem ersten und dritten Grundpunkte des Coordinatensystems zusammen. Der Einheitspunkt der Punktreihe bildet zugleich den Einheitspunkt des Coordinatensystems.

Die Gleichung der Gerade $\lambda\mu$ ist

$$\lambda\mu\, x-(\lambda+\mu)\, y+z=0,$$

und die Gleichung der Tangente im Punkte $\lambda$

$$\lambda^2\, x-2\lambda\, y+z=0.$$

Die Geraden $z=0$, $x=0$ sind also Tangenten zu den Grundpunkten, während die Gerade $y=0$ die Grundpunkte verbindet.

Aus der Gleichung der Gerade $\lambda\mu$ folgt, dass $\lambda$ das Doppelverhältniss der vier Geraden

$$\mu 0,\ \mu\infty,\ \mu\lambda,\ \mu 1$$

bezeichnet. Wenn man also die Punkte des Kegelschnittes aus einem derselben auf eine Gerade ihrer Ebene projicirt, bezeichnet $\lambda$ die Coordinate des variablen Punktes auf dieser Punktreihe.

Die Geraden, welche die Punktpaare der Involution

$$a\lambda\mu+b\,(\lambda+\mu)+c=0$$

verbinden, gehen alle durch den Punkt $(a, -b, c)$ hindurch. Wir nennen diesen Punkt das *Centrum* der Involution.

Die Centra des Involutionsbüschels mit dem gemeinsamen Punktpaar $\lambda\mu$ liegen auf der Geraden $\lambda\mu$.

Wenn die Punkte $\lambda_h\mu_h$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$ durch die Involution

$$\begin{pmatrix}\lambda_h\\ \mu_h\end{pmatrix}$$

verbunden sind, so liegen sie perspectivisch. Das Centrum der Involution bildet das *Centrum*, seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt die *Axe* der Perspectivität.

Die Sätze über mehrfache Involutionen können also bei Kegelschnitten als Sätze über mehrfache Perspectivität ausgesprochen werden.

Ich will nur die beiden Hauptsätze vorführen.

*Lehrsatz 1.* Auf einem Kegelschnitte existiren Systeme von eingeschriebenen $r$-ecken ($r$-aden) mit der Eigenschaft, dass je zwei $r$-aden desselben Systems $r$-fach perspectivisch sind. Die Centra der Perspectivitäten liegen auf einer Geraden und bilden eine $r$-ade.

Der letzte Teil des Satzes folgt daraus, dass die Parameter der Punkte von zwei solchen $r$-aden, wenn man die Grundpunkte derselben zu Grundpunkten der Punktreihe wählt, sind

$$\alpha_0\varepsilon^h,\ \beta_0\varepsilon^{-h},\ (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Die Constanten ihrer Involutionen sind

$$1,\ 0,\ -\alpha_0\beta_0\varepsilon^{-k}\ \ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Dieselben sind auch die Coordinaten der Perspectiv-Centra, woraus der Satz folgt.

*Lehrsatz 2.* Jeder $r$-ade gehört eine mit ihr $(r+1)$-fach perspective $r$-ade desselben Systems an; $r$ Perspectiv-Centra bilden eine $r$-ade auf einer Gerade, das $(r+1)$-te Centrum fällt mit dem Pole dieser Geraden zusammen.

Ein sehr interessanter Fall ist der, wo der Kegelschnitt ein Kreis ist und die Grundpunkte des $r$-adensystems mit den conj. complexen Kreispunkten im Unendlichen zusammenfallen.

Die Gleichung des Kreises mit dem Radius 1 ist in homogenen rechtwinkligen Coordinaten

$$x^2+y^2=z^2,$$

oder in einer anderen Form

$$(x+yi)(x-yi)=z^2.$$

Wir gehen auf das gewünschte Coordinatensystem über, wenn wir setzen

$$x-yi=\xi,\quad z=\eta,\quad x+yi=\zeta.$$

Wenn der Richtungswinkel des Punktes $(xyz)$ mit $\vartheta$ bezeichnet wird, so sind

$$\xi:\eta:\zeta=e^{-\vartheta i}:1:e^{\vartheta i}=1:e^{\vartheta i}:e^{2\vartheta i},$$

also ist in diesem Falle $\lambda=e^{\vartheta i}$, und für reelle Punkte des Kreises $|\lambda|=1$.

Die Parameter einer reellen $r$-ade des Systems sind

$$\alpha\varepsilon^h = e^{\left(a+\frac{2h\pi}{r}\right)i}, \quad (h=0, 1, \ldots, r-1),$$

Die Richtungswinkel der Punkte sind also

$$a + \frac{2h\pi}{r}, \quad (h=0, 1, \ldots, r-1).$$

Folglich ist die $r$-ade ein eingeschriebenes reguläres $r$-eck.

Wenn man also die sämmtlichen regulären eingeschriebenen $r$-ecke aus einem Punkte des Kreises auf eine Gerade seiner Ebene projiciert, erhält man ein $r$-aden System in der Punktreihe.

Umgekehrt ein $r$-adensystem einer Gerade kann immer in das System der eingeschriebenen regulären $r$-ecke projicirt werden. Man soll nur dafür sorgen, dass die Involution der Doppelpunkte des zur $r$-ade gehörigen Involutionsbüschels durch einen cyclisch involutorischen Strahlenbüschel projicirt werde (was immer möglich ist, da diese Involution elliptisch ist). Wenn man den Strahlenbüschel durch einen Kreis schneidet, welcher durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht, werden die $r$-aden in reguläre $r$-ecke übergeführt.

Die geometrische Construction der $r$-aden ist also für solche Werte von $r$ möglich, wie für die der regulären $r$-ecke.

## VII.

Die parametrische Darstellung einer Punktreihe auf einer Raumcurve dritter Ordnung lautet bei einem passend gewählten Coordinatensystem

$$x : y : z : t = 1 : \lambda : \lambda^2 : \lambda^3.$$

Die Ebene $\lambda\mu\nu$ hat die Gleichung

$$\lambda\mu\nu\, x - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\, y + (\lambda + \mu + \nu)\, z - t = 0.$$

Die Sehne $\lambda\mu$ hat die Gleichungen

$$\lambda\mu\, x - (\lambda + \mu)\, y + z = 0,$$
$$\lambda\mu\, y - (\lambda + \mu)\, z + t = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $\lambda$ das Doppelverhältniss der vier Ebenen

$$\mu\nu 0, \quad \mu\nu\infty, \quad \mu\nu\lambda, \quad \mu\nu 1$$

bedeutet. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt, dass der geometrische Ort derjenigen Sehnen, welche die Punktpaare der Involution

$$a\lambda\mu+b(\lambda+\mu)+c=0$$

verbinden, bildet die Fläche zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & t \\ a & -b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Den parabolischen Involutionen $(ac-b^2=0)$ entsprechen die Kegel zweiter Ordnung, welche die Curve aus den Punkten derselben projizieren.

Dem Involutionsbüschel mit dem gemeinsamen Punktpaare $\lambda\mu$ entspricht derjenige Flächenbüschel zweiter Ordnung, dessen Grundcurve aus der gegebenen Raumcurve dritter Ordnung mit der Sehne $\lambda\mu$ besteht.

Wenn die Punktsysteme $\lambda_h \mu_h$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$ durch die Involution

$$\begin{pmatrix} \lambda_h \\ \mu_h \end{pmatrix}$$

verbunden sind, so kann ihre Beziehung nach einer schon einmal benützten Ausdrucksweise *hyperbolisch* genannt werden, weil die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte auf einem einschaligen Hyperboloide, oder auf einem hyperbolischen Paraboloide liegen.

Die Sätze über mehrfache Involutionen können also als Sätze über mehrfach hyperbolische Beziehungen ausgedrückt werden.

Der Hauptsatz ist der Folgende:

Auf einer Raumcurve dritter Ordnung existiren solche Systeme von $r$-aden, dass irgend zwei $r$-aden desselben Systems $r$-fach hyperbolisch sind. Die projizierenden Hyperboloide gehören einem Flächenbüschel an.

Ich will einen interessanten speciellen Fall vorführen.

Wenn man zu zwei Triaden desselben Systems ($A_2A_3A_4$, $B_2B_3B_4$) die dazu gehörigen Grundpunkte ($A_1B_1$) hinzunimmt, so erhält man zwei Tetraëder, welche durch die hyperbolischen Beziehungen

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_3B_4B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_4B_2B_3 \end{pmatrix}$$

verbunden sind.

Wenn man anstatt der conj. complexen Grundpunkte $A_1B_1$ zwei reelle Punkte ihrer reellen Verbindungsgerade nimmt, erhält man zwei reelle, dreifach hyperbolische Tetraëder. Dieser Fall wurde bei der Aufsuchung der mehrfach linearen Tetraëder als der letzte Fall bei einer anderen Gelegenheit vorgeführt.

Andere hier auftretende Fälle der mehrfach hyperbolischen Tetraëder kommen auch bei Raumcurven vierter Ordnung vom ersten Geschlechte vor, dieser jetzt erwähnte Fall aber nicht.

13.

# ÜBER DIE MEHRFACHEN INVOLUTIONEN.

Von Dr. JULIUS VÁLYI,

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KOLOZSVÁR (KLAUSENBURG).

Zweite Mitteilung.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 21. October 1895 vom o. M. und Classensecretär *Julius König*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIII, pp. 408—417, 1895.

Die erste Mitteilung beschäftigte sich mit den mehrfachen Involutionen der eindimensionalen Geometrie. Jetzt werden wir die mehrfach involutorischen endlichen Punktsysteme einer Ebene aufsuchen.

## I.

In der Ebene versteht man unter einer *Involution* denjenigen Fall von zwei collinearen Punktsystemen, wo jedem Punkte der Ebene, sei derselbe zum ersten oder zum zweiten Punktsysteme gerechnet, derselbe Punkt der Ebene entspricht.

Es seien $X(x_1x_2x_3)$ und $Y(y_1y_2y_3)$ einander solcherweise doppelt entsprechende Punkte. Dann bestehen gleichzeitig die Gleichungen

1.
$$\begin{aligned}\varrho y_i &= a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3;\\ \sigma x_i &= a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3;\end{aligned} \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

wo die Determinante der Involution

$$A = |a_{ik}| \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

nicht verschwindet.

Hieraus folgen für die Unterdeterminanten $(A_{ik})$ die Gleichungen

2. $$A_{ik}=\lambda a_{ki}\,; \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3),$$

wo

$$\lambda=\frac{A}{\varrho\sigma}$$

ist. Hieraus folgt weiter nach dem Satze über die adjungirte Determinante

3. $$A=\lambda^3.$$

Die Gleichungen 2. sagen über die Unterdeterminanten $(\Delta_{ik})$ der Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}$$

aus, dass

4. $$\Delta_{ik}=0\,; \qquad \text{(wenn } i\gtrless k \text{ ist)},$$
$$\Delta_{ii}=\lambda(\lambda+a_{11}+a_{22}+a_{33})\,; \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Hieraus folgen weiter nach den Relationen zwischen den Elementen und den Unterdeterminanten einer Determinante

5. $$\Delta_{ii}\,.\,a_{ik}\ =0; \qquad \text{(wenn } i\gtrless k \text{ ist)},$$
$$\Delta_{ii}(a_{ii}+\lambda)=\Delta; \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Es sei noch bemerkt, dass man die Determinante $\Delta$ nach den Gleichungen 2., 3. auch folgenderweise ausdrücken kann:

6. $$\Delta=2\lambda^2(\lambda+a_{11}+a_{22}+a_{33}).$$

Aus den Gleichungen 4., 5., 6. folgen zwei Arten der Involution, nämlich:

*a)* Wenn $\lambda+a_{11}+a_{22}+a_{33}$ nicht verschwindet, so folgen aus 4., 5., 6.

$$a_{ik}=0\,; \qquad \text{(wenn } i\gtrless k \text{ ist)},$$
$$a_{ii}=\lambda\,; \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Die Gleichungen der Involution sind also in diesem Falle

$$\varrho y_i=\lambda x_i\,, \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

d. h. jeder Punkt der Ebene entspricht sich selbst.

Diese Art der Involution lassen wir im Folgenden ausser Acht.

*b)* Wenn

$$7. \qquad \lambda+a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$$

ist, so verschwindet die Determinante $\Delta$ mit ihren sämmtlichen Unterdeterminanten. Es gibt also sechs Zahlen $c_i\, d_i$, $(i=1, 2, 3)$, mit Hülfe deren die Elemente von $\Delta$ folgenderweise ausgedrückt werden können:

$$a_{ik} = c_i d_k; \qquad (\text{wenn } i \gtrless k \text{ ist}),$$
$$a_{ii}+\lambda = c_i d_i; \qquad (i=1, 2, 3),$$

wo nach der Gleichung 7.

$$8. \qquad 2\lambda = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3$$

ist.

Die Gleichungen der Involution sind in diesem Falle

$$9. \qquad \varrho y_i = -\lambda x_i + c_i (d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3); \qquad (i=1, 2, 3),$$

und hieraus folgt nach 8.

$$10. \quad \varrho (d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3) = \lambda (d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3).$$

Man sieht aus den Gleichungen 9., 10., dass der Punkt mit den Coordinaten

$$\varrho y_i + \lambda x_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

mit dem Punkte $(c_1\, c_2\, c_3)$ zusammenfällt, und der Punkt mit den Coordinaten

$$\varrho y_i - \lambda x_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

auf der Geraden $(d_1\, d_2\, d_3)$ liegt.

Die involutorischen Punktpaare werden also durch den Punkt $(c_1\, c_2\, c_3)$ *(Centrum der Involution)* und durch die Gerade $(d_1\, d_2\, d_3)$ *(Axe der Involution)* harmonisch getrennt.

Das Centrum und jeder Punkt der Axe entspricht also sich selbst. Sie sind *Doppelpunkte* der Involution.

Diese Art der Involution gehört also zur perspectiv-collinearen Beziehung.

Diese Involution wird durch das Centrum und die Axe völlig bestimmt, sowie auch durch zwei involutorische Punktpaare, wenn sie ein vollständiges Viereck bilden.

Die Gleichungen der Involution sind die einfachsten, wenn man das Centrum zum Grundpunkte, die Axe zur gegenüberliegenden Grundgerade des Coordinatensystems wählt.

Es sei das Centrum der Punkt (0 0 1), die Axe die Gerade (0 0 1). Dann ist nach 8.

$$2\lambda = 1,$$

und die Gleichungen der Involution sind

$$\begin{aligned} 2\varrho y_1 &= -x_1; \\ 2\varrho y_2 &= -x_2; \\ 2\varrho y_3 &= +x_3. \end{aligned} \qquad 11.$$

Die Gleichungen der Involution sind auch dann einfach, wenn man ein involutorisches Punktpaar zu Grundpunkten (z. B. zum ersten und zweiten Grundpunkte) wählt und der dritte Grundpunkt auf der Axe der Involution liegt.

Wenn die Coordinaten des Centrums $c_1\ c_2\ 0$ sind, so sind die Coordinaten der Axe $c_2\ c_1\ 0$. Nach der Gleichung 8. ist also

$$\lambda = c_1 c_2$$

und die Gleichungen der Involution

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= +c_1^2\ x_2; \\ \varrho y_2 &= +c_2^2\ x_1; \\ \varrho y_3 &= -c_1 c_2 x_3. \end{aligned} \qquad 12.$$

Bei der Untersuchung der mehrfachen Involutionen brauchen wir gerade diese Gleichungen.

## II.

Suchen wir solche Punktsysteme

$$A_h B_h, \qquad (h=0, 1, \ldots r-1;\ r>2)$$

in der Ebene auf, welche gleichzeitig durch die beiden Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+1} \end{pmatrix}$$

verbunden werden, wo die Indices mod. $r$ zu reduzieren sind.

Setzen wir voraus, das die Centra $(CC')$ und die Axen $(aa')$ der beiden Involutionen verschieden seien und keines der Centra auf der Axe der anderen Involution liege. Setzen wir weiter voraus, dass die Gerade $CC'$ nicht durch den Punkt $aa'$ hindurchgehe.

Unter solchen Voraussetzungen bildet das gemeinschaftliche Punktpaar der beiden Involutionen auf der Gerade $CC'$ keinen Doppelpunkt. Wählen wir dieses Punktpaar zum ersten und zweiten Grundpunkte und den Punkt $aa'$ zum dritten Grundpunkte.

Die Gleichungen der beiden Involutionen haben dann die Form 12.

Es seien

$$\begin{array}{llllll} \text{die Coordinaten von} & A_h & a_{h_1} & a_{h_2} & a_{h_3}; \\ \text{«} \quad \text{«} \quad \text{«} & B_h & b_{h_1} & b_{h_2} & b_{h_3}; \\ \text{«} \quad \text{«} \quad \text{«} & C & c_1 & c_2 & 0; \\ \text{«} \quad \text{«} \quad \text{«} & C' & c_1' & c_2' & 0. \end{array}$$

Dann werden die beiden Involutionen durch die Gleichungen ausgedrückt.

$$\begin{array}{lll} \varrho_h b_{h_1} = c_1^2 a_{h_2}, & \varrho'_{h+1} b_{h+1,1} = c_1'^2 a_{h_2}; \\ \varrho_h b_{h_2} = c_2^2 a_{h_1}, & \varrho'_{h+1} b_{h+1,2} = c_2'^2 a_{h_1}; \\ \varrho_h b_{h_3} = -c_1 c_2 a_{h_3}, & \varrho'_{h+1} b_{h+1,3} = -c_1' c_2' a_{h_3}; \end{array} \qquad 13.$$

$$(h=0, 1, \ldots, r-1).$$

Drei Fälle sind zu unterscheiden.

1. Wenn eine der Zahlen $a_{h_3} b_{h_3}$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$ verschwindet, so verschwinden auch alle übrigen nach den Gleichungen 13.

Die Punkte $A_h B_h$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$ liegen in diesem Falle auf der Geraden $CC'$ und bilden nach den vorausgesetzten Involutionen zwei $r$-aden desselben Systems.*

2. Setzen wir voraus, dass keine der Zahlen $a_{h_3} b_{h_3}$ $(h=0, 1, \ldots, r-1)$ verschwindet, es verschwinde aber eine der Zahlen $a_{h_1}$; dann verschwinden nach den Gleichungen 13. alle die Zahlen $b_{h_2} a_{h_1}$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$.

Führen wir nicht homogene Coordinaten ein. Es seien

* Erste Mitteilung I.

die Coordinaten von $A_h$ $0\ \alpha_h\ 1$;
« « « $B_h$ $1\ 0\ \beta_h$;
« « « $C$ $\gamma\ 1\ 0$;
« « « $C'$ $\gamma'\ 1\ 0$.

Dividirt man in den beiden Colonnen der Gleichungen 13. die erste Gleichung durch die dritte so erhält man

$$\begin{aligned} &\alpha_h\ \beta_h\ \gamma + 1 = 0; \\ &\alpha_h\ \beta_{h+1}\ \gamma' + 1 = 0; \end{aligned} \qquad (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Hieraus folgt genau so, wie im ersten Kapitel der ersten Mitteilung, dass zwischen den Punktsystemen $A_hB_h$, $(h=0\,1,\ldots r-1)$ die $r$ Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+k} \end{pmatrix}; \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots\ r-1).$$

bestehen.

Es seien die Centra $C_k$, $(k=0,\ 1,\ \ldots\ r-1)$.

Die Formeln sind symmetrisch, wenn man den Einheitspunkt des Coordinatensystems so wählt, dass

$$\alpha_0 = \beta_0 = -1$$

seien. Wenn man die Punkte $B_h$ vom Punkte $B_0$ in umgekehrter Reihenfolge numerirt, sind die Coordinaten

von $A_h$ $0\ -\varepsilon^h\ 1$;
von $B_i$ $1\ 0\ -\varepsilon^i$;
von $C_k$ $-\varepsilon^k\ 1\ 0$.

wo $\varepsilon$ eine primitive $r$-te Einheitswurzel bezeichnet.

Die Punkte $A_hB_iC_k$ liegen in einer Geraden, wenn

$$h+i+k \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, r)$$

ist.

Hieraus folgt, dass die drei Punktsysteme drei $r$-aden bilden. Irgend zwei dieser $r$-aden sind $r$-fach involutorisch mit den Punkten der dritten $r$-ade als Centra.

Die Grundpunkte der $r$-aden sind die Schnittpunkte ihrer Geraden. Hieraus folgt, dass höchstens eine einzige der drei $r$-aden

reell sein kann, denn die Grundpunkte einer reellen $r$-ade sind conjugirt complex.*

Der einfachste Fall dreier solcher $r$-aden ($r = 3$) kommt bei den ebenen Curven dritter Ordnung vor. Die 9 Inflexionspunkte bilden ein solches System.

3. Setzen wir voraus, dass keine der Coordinaten von $A_h B_h$ verschwinde.

Dann folgen aus den Gleichungen 13.

$$\frac{a_{h_1} a_{h_2}}{a_{h_3}^2} = \frac{b_{h_1} b_{h_2}}{b_{h_3}^2} = \frac{b_{h+1,1} b_{h+1,2}}{b_{h+1,3}^2};$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1).$$

Der Wert dieser Brüche ist also unabhängig von $h$. Sei derselbe $c$.

Die Punkte $A\ B_h$ $(h=0, 1, \ldots r-1)$ liegen also auf einem Kegelschnitte, dessen Gleichung ist

$$x_1 x_2 - c x_3^2 = 0.$$

Aus den vorausgesetzten beiden Involutionen folgt, dass sie zwei $r$-aden desselben Systems bilden.**

## III.

Bei den Punktsystemen $A_h B_h$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$, welche durch die beiden Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+1} \end{pmatrix}$$

verbunden werden, können ausser dem schon besprochenen Falle auch die folgenden Fälle vorkommen:

1. die Centra fallen zusammen, die Axen aber nicht;

2. die Axen fallen zusammen, die Centra aber nicht;

3. die Centra und die Axen sind verschieden, aber die Verbindungslinie der Centra geht durch den Schnittpunkt der Axen hindurch;

---

* Erste Mitteilung II.

** Erste Mitteilung VI.

4. das eine Centrum liegt auf der Axe der anderen Involution;

5. beide Centra liegen auf den Axen der anderen Involution.

Irgend einen dieser Fälle vorausgesetzt, sei $P$ der gemeinsame Punkt der Axen. (Im Falle 2. kann $P$ irgend ein Punkt der gemeinsamen Axe sein, derselbe sei aber so gewählt, dass er nicht in einer Geraden mit den Centren falle.)

Der Punkt $P$ entspricht in beiden Involutionen sich selbst. Wenn einer der Punkte $A_h B_h$ mit ihm zusammenfiele, so würden auch alle übrigen, nach den beiden vorausgesetzten Involutionen mit ihm zusammenfallen. Deshalb setzen wir voraus, dass keiner der Punkte $A_h B_h$ mit $P$ zusammenfalle.

Wenn man die Punkte $A_h B_h$ aus dem Punkte $P$ projiziert, so erhält man Strahlen $a_h b_h$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$, welche durch die beiden Involutionen

$$\begin{pmatrix} a_h \\ b_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_h \\ b_{h+1} \end{pmatrix}$$

verbunden werden.

In den vier ersten Fällen haben die beiden Involutionen einen gemeinsamen Doppelstrahl, deshalb müssen alle Strahlen mit diesem Strahle zusammenfallen.*

Die Punkte $A_h B_h$ liegen also alle auf einer Geraden. Die beiden darauf liegenden Punktinvolutionen haben aber schon einen gemeinsamen Doppelpunkt $(P)$, folglich fallen alle Punkte entweder in einen oder die Punkte $A_h$ und die Punkte $B_h$ in je einen Punkt zusammen. Von Punktsystemen kann also in diesen Fällen keine Rede sein.

Im Falle 5. haben die beiden Strahleninvolutionen zwei gemeinsame Doppelstrahlen. Die beiden Involutionen verlangen also nur, dass die Strahlen $a_h$ einerseits, die Strahlen $b_h$ andererseits in je einen Strahl zusammenfallen sollen. Die Verteilung der Punkte $A_h B_h$ auf diesen Geraden müssen wir näher untersuchen.

Es seien die Centra $CC'$, die Axen $tt'$ und es liege $C$ auf der Axe $t'$, $C'$ auf der Axe $t$.

---

* Erste Mitteilung IV.

Wählen wir die Punkte $C$, $C'$, $tt'$ zu Grundpunkten des Coordinatensystems.

Den Fall können wir ausschliessen, wo einer der Punkte $A_h B_h$ auf der Geraden $CC'$ liegt, denn dann würden alle Punkte nach den vorausgesetzten Involutionen auf diese Gerade fallen und würden alle Punkte entweder in einen Punkt oder in zwei Punkten harmonisch zu $CC'$ zusammenfallen.

Es seien die Coordinaten

$$\begin{array}{llll} \text{von } A_h & a_{h_1} & a_{h_2} & 1\,; \\ \text{von } B_h & b_{h_1} & b_{h_2} & 1. \end{array}$$

Die beiden Involutionen werden durch die Gleichungen ausgedrückt, welche nach den Gleichungen 11. des ersten Kapitels gebildet werden, wenn man aus diesen den Proportionalitätsfaktor durch Division eliminirt.

$$\begin{array}{llll} b_{h_1} = -a_{h_1}, & b_{h+1,1} = & a_{h_1}\,; & \\ b_{h_2} = & a_{h_2}, & b_{h+1,2} = -a_{h_2}\,; & (h=0, 1, \ldots r-1). \end{array}$$

Hieraus folgt, dass die Coordinaten

$$\begin{array}{llllll} \text{des Punktes} & A_{2n} & a_{01} & a_{02} & 1\,; \\ \text{“} \quad \text{“} & A_{2n+1} & -a_{01} & -a_{02} & 1\,; \\ \text{“} \quad \text{“} & B_{2n} & -a_{01} & a_{02} & 1\,; \\ \text{“} \quad \text{“} & B_{2n+1} & a_{01} & -a_{02} & 1\,; \end{array}$$

sind. Die Punkte $A_h$ und $B_h$ fallen also in je zwei Punkten zusammen. Die vier Punkte bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpunkte $CC'$ und $tt'$ sind.

Lässt man also die Mehrfachheit der Punkte bei Seite, so können wir sagen, dass nur bei der zweifachen Involution von zwei Paar Punkten der Fall vorkommt, dass beide Centra auf den Axen der anderen Involution liegen.

Weil aber erst zwei Punktpaare eine Involution bestimmen, so sind die wahren Fälle der mehrfachen Involutionen nur diejenigen, wo $r>2$ ist.

Die wahren Fälle der monocyclischen mehrfachen Involutionen wurden also im vorigen Kapitel vollständig erschöpft.

## IV.

Eine polycyclische mehrfache Involution ist vorhanden, wenn die Punktsysteme

$$A_h^k\, B_h^k \qquad \begin{pmatrix} k=1,\ 2,\ \ldots\ s \\ h=0,\ 1,\ \ldots\ r_k-1 \end{pmatrix}$$

gleichzeitig durch die beiden Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h^k \\ B_h^k \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A_h^k \\ B_{h+1}^k \end{pmatrix}$$

verbunden werden, wo die Indices von $A^k\, B^k$ *mod.* $r_k$ zu reduzieren sind. Es seien die Centra $CC'$.

Wir wählen wieder das gemeinsame Punktpaar der beiden Involutionen auf $CC'$ und den Schnittpunkt der Axen zu Grundpunkten des Coordinatensystems.

Wir halten es für überflüssig, die Untersuchung hier näher zu verfolgen, da dieselbe sich vom Gange des Kapitels V. in der ersten Mitteilung und des Kapitels II. in dieser Mitteilung nicht wesentlich unterscheidet.

Ich will nur die Hauptsätze vorführen.

1. Wenn die Punkte $A_h^k B_h^k$ verschieden sein sollen, müssen

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_s$$

sein. Der gemeinsame Wert sei mit $r$ bezeichnet.

2. Wenn eine der Coordinaten $A_h^k B_h^k$, $(h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)$ verschwindet, so bilden $A_h^k\, B_h^k$ zwei $r$-aden in linearen Punktreihen.

3. Wenn keine der Coordinaten von $A_h^k\, B_h^k$, $(h=0, 1, \ldots r-1)$ verschwindet, so liegen diese Punkte auf einem Kegelschnitte, dessen Gleichung

$$x_1\, x_2 - c_k x_3^2 = 0,$$

und sie bilden auf diesem Kegelschnitte zwei $r$-aden desselben Systems.

Die Constanten $c_k$ können bei den verschiedenen Cyklen verschieden sein.

Die Kegelschnitte verschiedener Cyklen stehen also in einer doppelten Berührung. Die Berührungspunkte sind gemeinsame Grundpunkte aller $r$-aden.

Bei reellen $r$-aden ist also die doppelte Berührung der Kegelschnitte imaginär.

4. Die Centra der Involutionen bilden eine $r$-ade in einer linearen Punktreihe, die Axen bilden eine $r$-ade in einem linearen Strahlenbüschel.

Endlich können wir den folgenden Hauptsatz aussprechen:

*Die mehrfach involutorischen endlichen Punktsysteme einer Ebene können in r-aden auf linearen und quadratischen Punktreihen zerlegt werden.*

14.

# DAS PRINCIP DER KLEINSTEN ACTION UND DAS HAMILTON'sche PRINCIP.

Von Dr. MORITZ RÉTHY.

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AM K. JOSEFS-POLYTECHNIKUM ZU BUDAPEST.

Gelesen in der Sitzung der Akademie vom 20. April 1896.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIV, pp. 267—298. 1896.

Kritische Bemerkungen, die Herr A. MAYER bezüglich der in meiner früheren Mitteilung gegebenen Deutung der HELMHOLTZschen Beweise* mir brieflich mitzuteilen so gütig war, veranlassten mich in Verfolgung und Ausgestaltung der ihr zu Grunde liegenden Gedanken zu folgender Verallgemeinerung meiner Untersuchungen.

## §. 1. Zusammenfassung der Beziehungen.

I. Es bezeichne überall

$T$ die lebendige Kraft des Punktsystems,

$U$ das Potential des Punktsystems,

$q_i$ die unabhängigen Coordinaten desselben,

$a_i$, $b_i$ die Anfangs- resp. Endwerte der Coordinaten,

$a_i'$, $b_i'$ « « « « der Geschwindigkeiten,

$t$ die veränderliche Zeit,

$t_1$ ein Zeitintervall,

$n$ Anzahl der unabhängigen Coordinaten der inneren Punkte des Systems.

---

* Dieser Band dieser Berichte, pp. 1—21.

Es bezeichne ferner $F$ eine (etwa im Ausdruck von $U$ vorkommende) veränderliche Grösse, $E(t)$ eine für die Variation *feste* Funktion der Zeit, und es seien

$$q_i' \equiv \frac{dq_i}{dt}, \tag{1}$$

$$f \equiv T+U, \tag{2}$$

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F, \tag{3}$$

$$L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'}, \tag{4}$$

$$H \equiv \int_0^{t_1} (T+U)\, dt \equiv \int_0^{t_1} f dt, \tag{5}$$

$$I \equiv \int_0^{t_1} (f+F)\, dt, \tag{6}$$

$$A \equiv \int_0^{t_1} (f+F+G)\, dt \equiv \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' dt. \tag{7}$$

Demgemäss ist $f$ eine gegebene Funktion der unabhängig veränderlichen Grössen $q_i$, $q_i'$, $F$ und $t$, und enthält auch, nämlich in $U$, eine willkürliche additive Constante; diese Constante soll keiner Variation unterliegen. Da bei der Variation der Zeitintegrale $H$, $I$ und $A$ die Zeit $t$ der Variation unterliegen soll, führen wir als reihendes Element eine unvariirbare Veränderliche $\varphi$ ein, und bezeichnen die Differentialquotienten der Zeit und der Coordinaten nach ihr, wie folgt:

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\varphi},$$

$$\dot{q} = \frac{dq_i}{d\varphi}.$$

Es bestehen dann die Identitäten:

$$q' = \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}},$$

$$\frac{\partial q_i'}{\partial t} = -\frac{\dot{q}_i}{\dot{t}^2} = -\frac{q_i'}{\dot{t}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i'} = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i'} = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\dot{t} = \frac{\partial (f\dot{t})}{\partial \dot{q}_i}, \tag{8}$$

$$\dot{t}\frac{\partial f}{\partial \dot{t}} = \dot{t}\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}\frac{\partial q_i'}{\partial \dot{t}} = -\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i',$$

$$\frac{\partial (f\dot{t})}{\partial \dot{t}} = -\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' + f.$$

Man verificirt von (3) aus leicht

$$H_0 \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_j'}q_j' \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'}q_i' q_j'. \tag{9}$$

Es soll vorausgesetzt werden, dass diese Grösse $H_0$ in dem Zeitintervall von 0 bis $t_1$ nirgends verschwindet, und dasselbe soll auch von der folgenden Funktionaldeterminante vorausgesetzt werden

$$D_1 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_2'} \cdots \frac{\partial^4 f}{\partial q_1 \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_2'} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_2'} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}. \tag{9'}$$

## §. 2. Die Bewegungsgleichungen des Punktsystems.

II. Für die Bewegung des Punktsystems bestehe das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} = 0, \tag{10'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{dG}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' - f - F\right) = 0. \tag{10''}$$

Bei Ausführung der angezeigten partiellen Differentiationen nach $q_i$ und $q_i'$ sind die in $f$ explicite vorkommenden $t$ und $F$ als constant anzusehen. Kommt $F$ in $f$ explicite nicht vor, so sind die Gleichungen bekanntlich die von LIPSCHITZ und SCHERING verallgemeinerten sogenannten LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen. In diesem Specialfall ist $F$ die Energie des Systems.* Kommt $F$ in $f$ auch explicite vor, so sollen die $f$ der Beschränkung unterliegen, dass die $n+1$ Gleichungen zur Bestimmung der in ihnen enthaltenen $n+1$ Grössen

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, F,$$

als Functionen von $t$ genügen, und falls die Anfangswerte der Coordinaten, der Geschwindigkeiten und des $F$ gegeben sind, diese Functionen eindeutig bestimmen. Ich werde im Folgenden die Gleichungen (10′) und (10″) auch in diesem allgemeinsten Falle die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen, und die Grösse $F$ *die Energie des Systems* nennen.

III. *Satz von der lebendigen Kraft. Das Integral $G=const.$ als Definition der Energie.*

Die identische Gleichung (3) giebt die folgende:

$$\frac{dG}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) q_i' - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial F} \frac{dF}{dt} - \frac{dF}{dt}, \qquad (10)$$

aus ihr folgt daher bei Hinzuziehung der Gleichungen (10′), (10″)

$$-\frac{dG}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(1 + \frac{\partial f}{\partial F}\right) \frac{dF}{dt} = 0. \qquad (11)$$

Die Gleichung spricht den Satz von der lebendigen Kraft aus für die betrachtete Bewegung, und bestimmt im Allgemeinen den Differentialquotienten der Energie nach der Zeit als einwertige Function der gleichzeitigen $q_i$, $q_i'$, $t$ und $F$. In einem Specialfall jedoch, der für die Folge von Wichtigkeit sein wird, fällt $\frac{dF}{dt}$ aus der Gleichung heraus. Es ist dies der Fall, wo $f$ von $t$ ex-

* LIPSCHITZ: Untersuchungen etc. Crelle's Journal Bd. 74. E. SCHERING: Hamilton-Jac. Theorie etc. Göttinger Abhandlungen 1873.

plicit nicht abhängt, und $\frac{dF}{dt}$ von Null verschieden sein soll. Die Gleichung (11) zeigt, dass in diesem Fall zu jeder Zeit

$$1+\frac{\partial f}{\partial F}=0 \qquad (11')$$

sein muss. In diesem Specialfall bestimmt aber eben diese Gleichung die Energie $F$ unmittelbar als Function der $q_i$ und $q_i'$; es wäre denn, dass die Gleichung eine Identität wäre, welchen Fall wir aber aus der Beobachtung ausschliessen wollen.

Ist umgekehrt $f$ von $t$ explicit unabhängig, und finden in der Bewegung ausser den Gleichungen (10′) auch die Gleichung (11′) zu jeder Zeit statt, so zeigt ein Blick auf die identische Gleichung (10), dass dann auch die Gleichung

$$\frac{dG}{dt}=0$$

zu jeder Zeit stattfindet.

Ich werde im Folgenden diese durch die Gleichungen (10′) und (11′) definirte Bewegung, die LAGRANGE'sche Bewegung *zweiter Classe* nennen; hingegen soll jene Bewegung, die schon durch die Gleichungen (10′) definirt ist, falls $f$ von $F$ explicit unabhängig ist, die LAGRANGE'sche *erster Classe* genannt werden.

Es ist bemerkenswert, dass die LAGRANGE'sche Bewegung zweiter Classe ein *allgemeines* Integral besitzt, in welchem *F fehlt*. Da nämlich aus (10″)

$$G=\text{const.}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i'-f-F$$

ein Integral der Differentialgleichungen ist, und ausserdem noch die Gleichung (11′) bestehen soll, diese aber keine Beschleunigungen enthält, so giebt die Elimination von $F$ aus den genannten beiden Gleichungen ein allgemeines Integral des Systems, in welchem $F$ fehlt.

*Bemerkung.* Die Auflösung der Gleichung (11′) nach $F$ sei

$$F=\bar{F}(q_1, a \ldots, q_n;\ q'_1, \ldots, q'_n),$$

und man bezeichne mit $\bar{f}$ diejenige Function, die sich aus $f$ ergiebt, wenn an Stelle von $F$ die Function $\bar{F}$ substituirt wird.

Wir haben dann

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial F}\frac{\partial \bar{F}}{\partial q'_i},$$

daher vermöge der Gleichung (11′)

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}(\bar{f}+\bar{F});$$

und ebenso

$$\frac{\partial f}{\partial q'_i}=\frac{\partial}{\partial q'_i}(\bar{f}+\bar{F}).$$

Ist daher die Bewegung von der zweiten Classe, so ergeben ihre $n+1$ Bewegungsgleichungen die von $F$ vollständig freien $n$ Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q'_i}(\bar{f}+\bar{F})-\frac{\partial}{\partial q_i}(\bar{f}+\bar{F})=0, \qquad (10^*)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Die zum Potential $U$ gehörige Bewegung zweiter Classe ist demnach, *kinematisch* betrachtet, identisch mit derjenigen Bewegung erster Classe (10*), die zum Potential $\overline{U}+\overline{F}$ gehört. Aber die *Energiemengen* sind in beiden Fällen verschieden. Bei der Bewegung zweiter Classe ist nämlich *die gesammte Energie* des Systems $= F$, also variabel; bei der durch das System (10*) definirten Bewegung erster Classe hingegen ist diese Grösse

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\bar{f}+\bar{F})}{\partial q'_i}q'_i-(\bar{f}+\bar{F}),$$

und daher constant. Die beiden Bewegungen sind demnach physikalisch genommen verschieden. Auch ihr Verhalten dem Actionsprincip gegenüber ist ein verschiedenes; und hierauf wird es uns zunächst ankommen.

## §. 3. Das Hamilton'sche Princip für die betrachteten Bewegungen.

IV. Man supponire bei der Berechnung der Variation des Zeitintegrals $H$, dass sämmtliche Punkte des Systems die für die Variation *festen* Anfangslagen $a_i$ gleichzeitig, und zwar zur *festen* Zeit $t=0$, verlassen, und in die Endlagen $b_i$ gleichzeitig ankommen, dass jedoch die Zeitdauer der Ueberführung der Variation unterliegt; die Variation dieser Zeitdauer $t_1$ sei mit $\delta t_1$ bezeichnet. Es ergiebt sich dann auf bekannter Weise

$$\delta\int_0^{t_1} f dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial q_i} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i d\varphi$$
$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial t} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{t}}\right)\delta t d\varphi$$
$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial F}\delta F d\varphi + \left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{t}}\delta t\right)_{t_1}.$$

Daraus folgt mit Herbeiziehung der Bezeichnungen und Resultate (3), (4), (5), (8) und (9) die Gleichung

$$\delta\int_0^{t_1} f dt = \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\delta q_i + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' - f\right)\right)\delta t + \frac{\partial f}{\partial F}\delta F\right)dt -$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' - f\right)_{t_1}\delta t_1, \qquad (12^*)$$

das ist

$$\delta H = \int_0^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n} L_i\delta q_i + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dF}{dt} + \frac{dG}{dt}\right)\delta t + \frac{\partial f}{\partial F}\delta F\right\}dt - (F+G)_{t_1}\delta t_1. \qquad (12)$$

Nimmt man noch Rücksicht auf die Identitäten

$$\delta\int_0^{t_1} F dt = \int_0^{t_1}\left(\delta F - \frac{dF}{dt}\delta t\right)dt + F_{t_1}\delta t_1,$$
$$\delta\int_0^{t_1} G dt = \int_0^{t_1}\left(\delta G - \frac{dG}{dt}\delta t\right)dt + G_{t_1}\delta t_1,$$

so findet man mittels Addition zu $\delta H$ mit Einbeziehung von (6) und (7)

$$\delta I = \int_0^{t_1} \left( L_i \delta q_i + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dG}{dt} \right) \delta t + \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial F} \right) \delta F \right) dt - G_{t_1} \delta t_1, \quad (13)$$

$$\delta A = \int_0^{t_1} \left( L_i \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial F} \right) \delta F + \delta G \right) dt. \quad (14)$$

Eine *notwendige* Bedingung zum Verschwinden sowohl des $\delta H$ als des $\delta I$ und des $\delta A$ bei *ganz* willkürlichen $\delta q_i$ ist daher das Bestehen des Gleichungssystems

$$L_i = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn aber diese Gleichungen bestehen, so vereinfachen sich die Ausdrücke auch in Folge der Identität (10); wir haben nämlich

$$\delta H = \int_0^{t_1} \frac{\partial f}{\partial F} \left( \delta F - \frac{dF}{dt} \delta t \right) dt - (F + G)_{t_1} \delta t_1, \quad (12')$$

$$\delta I = \int_0^{t_1} \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial F} \right) \left( \delta F - \frac{dF}{dt} \delta t \right) dt - G_{t_1} \delta t_1, \quad (13')$$

$$\delta A = \int_0^{t_1} \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial F} \right) \left( \delta F - \frac{dF}{dt} \delta t \right) dt + \int_0^{t_1} \left( \delta G - \frac{dG}{dt} \delta t \right) dt. \quad (14')$$

Daraus folgt, dass das Bestehen des Gleichungssystems $L_i = 0$ zum Verschwinden von $\delta H$ und $\delta I$ *im Allgemeinen* selbst dann nicht genügt, wenn $\delta t_1 = 0$ ist.

V. *Das Hamilton'sche Princip für die Lagrange'sche Bewegung erster Classe.* Ist $f$ explicit unabhängig von $F$, und soll $\delta H$ bei nicht variirender Zeitdauer $t_1$ und bei *ganz* willkürlichen $\delta q_i$ verschwinden, so ist hiezu das Bestehen des Gleichungssystem's

$$L_i = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung. Die Bewegung ist daher jedenfalls die LAGRANGE'sche erster Classe.

*Das Hamilton'sche Princip für die allgemeine Lagrange'sche Bewegung.* Stellt man bezüglich der Variation die Forderung auf, dass $\delta H=0$ sei bei unvariirter Zeitdauer und bei ganz willkürlichen $\delta q_i$, während zwischen $\delta F$ und $\delta t$ die Beziehung stattfindet

$$\delta F = \frac{dF}{dt}\delta t, \tag{15}$$

stellt man ferner zur Definition von $F$ die Gleichung $G=0$ auf, so ist die Bewegung gewiss die LAGRANGE'sche.

Da nämlich $\delta t_1=0$ und die Gleichung (15) bestehen sollen, so verschwindet die rechte Seite der Gleichung (12′); diese besteht aber, sobald die unvariirte Bewegung den Gleichungen $L_i=0$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ gemäss vor sich geht. Diese Gleichungen mitsammt der von vornherein geforderten Gleichung $G=0$ definiren aber allgemein die LAGRANGE'sche Bewegung (10′, 10″).

*Bemerkung.* Da $f$ auch eine willkürliche, nicht zu variirende Constante enthält (§ 1, I.), so sind die Gleichungen $G=$const. und $G=0$ æquivalent. Man bemerkt, dass diese Gleichung sich nicht *aus* dem (soeben ausgesprochenen) Variationsprincip selbst ergab; das folgende Variationsprincip ist in dieser Beziehung vollkommener.

VI. *Das Variations-Princip für die Lagrange'sche Bewegung zweiter Classe.* Soll $\delta I$ bei ganz willkürlichen $\delta q_i$, $\delta F$ und $\delta t_1$ selbst dann verschwinden, wenn man die unvariirte Bewegung mit einer *beliebigen* solchen vergleicht, deren Anfangslage dieselbe ist, wie die der unvariirten, deren Endlage aber diejenige ist, welche die unvariirte zu einer *beliebigen* Zeit zwischen 0 und $t_1$ einnimmt, so ist hiezu das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$
$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0,$$
$$G = 0$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung. Die Bewegung ist daher jedenfalls eine LAGRANGE'sche zweiter Classe.

*Bemerkung.* Die Bedingung (15) läuft auf die Forderung hinaus, dass die Energie in den variirten und in den unvariirten Bewegungen eine und dieselbe *feste* Zeitfunction sein soll, mit numerisch bestimmten Coefficienten. Die Gleichung (15) ist daher der folgenden æquivalent:

$$F = E(t) \tag{16}$$

*Das entsprechende Variationsprincip für die allgemeine Lagrange'sche Bewegung.* Soll aber $\delta F$ nicht mehr willkürlich sein, sondern der Beschränkung (16), die der Gleichung (15) æquivalent ist, unterliegen, während die $\delta q_i$ und $\delta t_1$ willkürlich sind, und soll $\delta I$ selbst dann verschwinden, wenn $t_1$ (wie soeben) eine beliebige Zwischenzeit bedeutet, so ist zum Verschwinden von $\delta I$ das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$G = 0,$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung. Die Bewegung ist daher jedenfalls eine LAGRANGE'sche.

## §. 4. Das Actionsprincip, wenn die Energie für variirbar erklärt wird.

VII. Das mit $A$ bezeichnete Zeitintegral wird bekanntlich im Specialfall, wenn $T$ eine homogene quadratische Function der $q_i'$ ist und $U$ nur von der Lage abhängt, die *Action* des Systems genannt; ich habe es daher auch *im allgemeinsten Fall* mit demselben Namen belegt. Da der Ausdruck (14') eine Folge von (14) ist, sobald sämmtliche $\delta q_i$ *ganz* willkürlich sind, (14') aber verschwindet, wenn der Variation die Beschränkung auferlegt wird, dass sowohl $F$ als auch $G$ dieselben numerischen Zeitfunctionen seien in der variirten Bewegung als in der unvariirten [(15), (16)], so können wir die folgenden Sätze aussprechen:

1. Wird gefordert, dass die Variation der Action verschwinde

bei Überführung aus einer festen Anfangslage in eine feste Endlage, und wird gefordert, dass $F$ und $G$ in den variirten und den unvariirten Bewegungen *dieselben* Zeitfunctionen bleiben sollen, so ist hiezu das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung.

Da demnach $G$ beliebig veränderlich sein darf, so entspricht diesen Forderungen *nicht nur* die LAGRANGE'sche Bewegung.

2. Halten wir die Forderung bezüglich $F$ aufrecht, während wir die Variation von $G$ für unabhängig von der Variation der Zeit erklären, so ist zum Verschwinden der Action das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dG}{dt} = 0,$$

$$\int_0^{t_1} \delta G dt = 0, \qquad (17')$$

eine hinreichende Bedingung.

Den Forderungen entspricht daher die LAGRANGE'sche Bewegung nur in dem auch von der Gleichung (17') umschriebenen beschränkten Variationsbereich. Dieser Beschränkung zufolge sind aber die $\delta q_i$ und das $\delta t$ von einander nicht mehr *ganz* unabhängig, daher sind diese hinreichenden Bedingungen nicht zugleich notwendige.

3. Lassen wir auch die Forderung bezüglich $F$ fallen, indem wir sowohl $F$ als auch $G$ für Grössen erklären, deren Variation unabhängig ist von der Variation der Zeit, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $f$ explicit *abhängig* ist von $F$ oder *nicht*.

*a)* Bestehen im ersten Fall die Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0,$$

$$\frac{dG}{dt} = 0,$$

Gleichungen, welche die Lagrange'sche Bewegung zweiter Classe definiren, so ist zum Verschwinden von $\delta A$ die Beschränkung (17′) erforderlich und hinreichend.

*b)* Im zweiten Fall lautet die Gleichung (14′) wie folgt:

$$\delta A = \int_0^{t_1} \left( \delta F + \delta G - \left( \frac{dF}{dt} + \frac{dG}{dt} \right) \delta t \right) dt.$$

Demzufolge genügt es zum Verschwinden von $\delta A$, dass die Gleichungen

$$L_i = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$F + G \equiv \sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f = \text{const.},$$

$$\int_0^{t_1} \delta (F + G)\, dt \equiv \int_0^{t_1} \delta \left( \sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f \right) dt = 0 \qquad (17'')$$

Bestand haben. Die Bewegung ist eine Lagrange'sche erster Classe, in der die Erhaltung der lebendigen Kraft giltig ist; und das Verschwinden der Variation der Action bei festen Grenzlagen trifft nur in dem durch die einzige Gleichung (17″) festgesetzten Bereich zu.

VIII. *Formulirung des allgemeinen Actionsprincips.* Der soeben betrachtete Specialfall *b)* wurde in der angeführten Arbeit des Herrn A. Mayer vollständig erledigt. Der Specialfall *a)* wird uns im §. 5 beschäftigen. Hier wird es sich um jene Ergänzungen des allgemeinen Satzes 2. handeln, die bezüglich der Forderungen des Variationsproblems aufzustellen sind, damit allen Forderungen die Lagrange'sche Bewegung *allein* genüge. Es soll bewiesen werden, dass diese Ergänzung auf mehr als einer Weise geschehen kann.

*Man verlange nämlich, dass die Variation der Action verschwinde für den Übergang aus einer festen Anfangslage in eine feste Endlage auch bei beliebig variirender Zeitdauer. Die Gleichung $G=0$ bestehe nicht nur in der unvariirten Bewegung, sondern auch in der variirten, und man beschränke das Bereich der Variation auch durch die Festsetzung (15), dergemäss, mit $E(t)$ eine feste Zeitfunction bezeichnet,*

$$\delta F = E'(t)\,\delta t$$

*sein soll.*

*Man stelle endlich Eine der folgenden Forderungen auf:*

A) *Die Variation der Action verschwinde selbst dann, wenn eine «beliebige» Zwischenlage in der gesuchten Bewegung als feste Endlage aller variirten betrachtet wird.*

B) *Die Bewegung komme in die «gegebene» Endlage $b_i$ mit den «gegebenen» Geschwindigkeiten $b_i'$ an; und die feste Function $E(t)$ sei eben die «Lagrange»-sche zu denselben Werten $b_i$, $b_i'$ gehörige Zeitfunction der Energie.*

C) *Es habe für die gesuchte Bewegung der Satz von der lebendigen Kraft Giltigkeit.*

D) *Es habe an dessen Stelle allgemeiner irgend ein anderer Satz Giltigkeit, dessen Gleichung aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen linear zusammengesetzt ist.*

*In einer jeden dieser vier Alternativen genügt sämmtlichen Forderungen die Lagrange'sche Bewegung und nur sie.*

Ich bemerke, dass die Alternativen A), C) und D) dieselben sind, welche ich unter speciellere Voraussetzungen (bezüglich $f$) in meiner vorigen Arbeit in diesen Berichten bewiesen habe; die Alternative B) habe ich hingegen in meiner diesbezüglichen ersten Publication * in einigermaassen modificirter Form aufgestellt, aber nicht bewiesen.

IX. Der Beweis des aufgestellten Theorems soll nach der Lagrange'schen Methode geführt werden. Ich setze dieser Methode gemäss

---

* Math. és Term. Értesítő. Bd. XIV. (Anzeiger der Akademie), 1896.

$$\Omega \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + (\lambda - 1)\, G, \tag{18}$$

wo $(\lambda - 1)$ den Lagrange'schen Multiplicator bezeichnet, und

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F = 0, \tag{17}$$

die Bedingungsgleichung der Variation ist; und berechne die Variation des Zeitintegrals $\Omega$, nämlich

$$\partial \int_0^{t_1} \Omega dt.$$

Sie ist durch die Gleichung (12*) gegeben, wenn überall $\Omega$ statt $f$ gesetzt wird. Die Unbekannten des Problems, die $q_i$ und $F$, denen sich auch $\lambda$ zugesellt, sind so zu bestimmen, dass sämmtliche Factoren der $\partial q_i$, $\partial t$, $\partial t_1$ verschwinden, — wobei natürlich auf die durch die Gleichung (15) ausgedrückte Forderung Rücksicht zu nehmen ist. Wir haben also ausser der Gleichung (17), wenn wir *einstweilen* von den Ergänzungen A), B), C) und D) absehen, Alles zusammen noch die folgenden Gleichungen zu erfüllen:

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \right)_{t_1} = 0, \tag{a}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{b}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F} \frac{dF}{dt} = 0. \tag{c}$$

Da die Gleichung $(c)$ eine Folge des Systems $(b)$ ist, so bleiben zur Bestimmung der $(n+2)$ Unbekannten

$$\lambda,\ F,\ q_1, q_2, \ldots, q_n$$

nur die Gleichungen (17), $(b)$ und $(a)$ von denen die Letzte bloss zur Zeit $t_1$ zu befriedigen ist. Wir wollen diese Grenzgleichung untersuchen.

Schreibt man (18) in der Form

$$\Omega \equiv f+F+\lambda G, \tag{18'}$$

$$\Omega \equiv (1-\lambda)(f+F)+\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i', \tag{18''}$$

so ergiebt sich mittels (9)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' \equiv (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + \lambda \left[ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} q_i' q_j' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q' \right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + \lambda H_0,$$

daher ergiebt sich mit Rücksicht auf (18)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \equiv \lambda H_0 + (1-\lambda)\, G.$$

In Folge der Bedingungsgleichung (17) ist daher zu jeder Zeit

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega = \lambda H_0 . \tag{19'}$$

Das zur Rechten stehende Product soll der Gleichung (*a*) gemäss verschwinden, wenn $t=t_1$ ist. Da aber der zweite Factor den bezüglich $f$ gemachten Voraussetzungen gemäss nie verschwindet (I), so erfordert dieses das Verschwinden des ersten Factors. Wir haben also *zur Zeit* $t_1$, — und wie aus (*c*) ersichtlich, im Allgemeinen auch nur zu dieser Zeit — die Grenzgleichung

$$\lambda = 0, \tag{19}$$

einzuhalten.

Die Anzahl der Unbekannten des Problems ist aber, wie wir gesehen haben, $n+2$, während die Anzahl der zur Verfügung stehenden Differentialgleichungen auf diese Weise nur $n+1$ ist. Solange also keine *neue* Forderung hinzukömmt, bleibt das Problem gewiss unbestimmt.

X. Die neu hinzutretende Forderung sei erstens die in (VIII), p. 281. mit A) bezeichnete, nämlich die folgende: Man verlange, dass

die gesuchte Bewegung den gestellten Variationsbedingungen selbst dann genüge, wenn man sie mit variirten Bahnen vergleicht, die zur Zeit 0 von denselben Lagen $a_i$ ausgehen, wie die gesuchte Bewegung, und zur Zeit $\tau+\delta\tau$ in jene Endlagen ankommen, welche in der gesuchten Bewegung zur Zeit $\tau$ passirt werden; und dies soll unabhängig von der Zeit $\tau$ zutreffen, wenn nur

$$0 < \tau \leqq t_1 .$$

Aus den Ergebnissen des Artikels IX folgt dann unmittelbar, dass die Gleichung (19) auch für das beliebige $\tau$, d. i. für alle Werte von $t$ gelten müsse.

Wir haben demnach

$$\lambda \equiv 0,$$

daher

$$\Omega = f + F;$$

mithin gehen die Gleichungen ($b$) in die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen über und bestimmen daher mitsammt der Bedingungsgleichung (17) die Lagrange'sche Bewegung.

XI. Die neu hinzutretende Forderung sei zweitens die mit B) bezeichnete, nämlich: Die Lagen und Geschwindigkeiten $b_i$, $b_i'$ seien zur Zeit $t_1$ gegeben und auch die Energie $F$ sei nicht nur von vornherein gegeben, sondern sie sei geradezu die zu den Daten gehörige Lagrange'sche Zeitfunction $E(t)$ der Energie.

Ich behaupte, dass dann die gesuchte Bewegung gewiss den Lagrange'schen Differentialgleichungen (10′, 10″) gemäss vor sich geht.

Es sind nämlich die Werte von

$$\lambda; \quad q_1, q_2, \ldots, q_n; \quad q_1', q_2', \ldots, q_n',$$

zur Zeit $t_1$ der Reihe nach

$$0; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n; \quad b_1', b_2', \ldots, b_n'; \tag{20}$$

also gegebene Zahlen. Ferner sind die $(n+1)$ Differentialgleichungen ($b$) und ($c$) des Variationsproblems linear in den $(n+1)$ Differentialquotienten

$$\frac{d\lambda}{dt}; \quad \frac{dq_1'}{dt}, \frac{dq_2'}{dt}, \ldots, \frac{dq_n'}{dt}.$$

Endlich ist der zu den gegebenen Werten (20) gehörige Wert der Determinante dieser Gleichungen von Null verschieden. Der Coëfficient von $\frac{d\lambda}{dt}$ ist nämlich in der $i$-ten Gleichung $(b)$

$$A_i = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial\lambda\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} q_j'; \quad (t=t_1)$$

während die übrigen Coefficienten, da für $t=t_1$, $\lambda=0$ ist, übergehen in

$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_1'}\right)_{t_1}, -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_2'}\right)_{t_1}, \ldots, -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_n'}\right)_{t_1}.$$

Da ferner die Gleichung $(c)$, mit Hinsicht auf (19′), zu schreiben ist

$$\frac{d}{dt}(\lambda H_0) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F} E'(t) = 0,$$

so sind die Coëfficienten der genannten Differentialquotienten der Reihe nach allgemein

$$H_0; \quad \lambda\frac{\partial H_0}{\partial q_1'}, \lambda\frac{\partial H_0}{\partial q_2'}, \ldots, \lambda\frac{\partial H_0}{\partial q_n'},$$

also zur Zeit $t_1$, wo $\lambda=0$ ist

$$(H_0)_{t_1}; \; 0, \; 0, \ldots, 0.$$

Die Determinante ist daher

$$\begin{vmatrix} A_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ A_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & & & & \\ A_n & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_n'} \\ H_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{t=t_1} = \pm (H_0 D_1)_{t_1}.$$

Da demnach die Determinante in das Product zweier Grössen zerfällt, die den Voraussetzungen gemäss nicht verschwinden, so lassen sich die Unbekannten des Problems aus den linearen Differentialgleichungen in Reihen entwickeln, die nach positiven ganzen Potenzen von $(t-t_1)$ fortlaufen, und zwar *eindeutig wie immer auch* $E(t)$ *gegeben* ist. Daraus folgt, dass wenn $E(t)$ eben die der Lagrange'schen Lösung entsprechende sein soll, jene eindeutigen Reihen eben die Lagrange'schen Lösungen darstellen müssen.

Ist nämlich $\lambda \equiv 0$, so gehen die Differentialgleichungen des Variationsproblems eben in die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen über.

XII. Die neu hinzutretende Ergänzung des Problems bestehe drittens in der mit C) bezeichneten Forderung: dass nämlich der Satz von der lebendigen Kraft in der gesuchten Bewegung Giltigkeit habe. Demnach ist die Function $F$ zwar nicht gegeben, an Stelle dessen aber der Gleichung (11) unterworfen:

$$K \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \left(1 + \frac{\partial f}{\partial F}\right)\frac{dF}{dt} = 0. \tag{21}$$

Man schreibe die Gleichung (*c*) in der aus (19′) sich ergebenden Form

$$\frac{d(\lambda H_0)}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F}\frac{dF}{dt} = 0, \tag{c′}$$

und substituire hier statt $\Omega$ den Ausdruck (18″). Man findet mit Rücksicht auf $G=0$,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F}\frac{dF}{dt} = (1-\lambda)K + \lambda H_1,$$

wo gesetzt ist

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial F}\frac{dF}{dt}\right)q_i'. \tag{22}$$

Da aber nach (21) $K=0$ sein soll, so haben wir demnach an Stelle der Gleichung (*c*′) die folgende:

$$\frac{d(\lambda H_0)}{dt} + \lambda H_1 = 0. \tag{c″}$$

Wenn aber $H_1$ im Intervall von 0 bis $t_1$ nirgends unendlich werden soll, — was doch bei Einengung des Zeitintervalls immer vorausgesetzt werden kann, — so folgt aus dieser Gleichung und aus der Grenzgleichung (19), dass $\lambda \equiv 0$ ist. (Math. u. Nat. Berichte Bd. XIII, p. 11, Abschnitt VI.)

Die Differentialgleichungen des Problems sind daher wiederum die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.

XIII. Die Ergänzung des Variationsproblems bestehe allgemeiner in der pag. 282 mit D) bezeichneten Forderung, dass die gesuchte Bewegung dem aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen linear zusammengesetzten Satze unterliege:

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} \right) = 0, \tag{23}$$

wo die Factoren $\nu_i$ bloss der Beschränkung unterworfen sind, dass in der Zeitdauer von 0 bis $t$

$$K_0 \equiv \sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

nirgends verschwinde, und dass

$$K_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} \left( \nu_i \frac{\partial G}{\partial q_i} + \nu_i' \frac{\partial G}{\partial q_i'} \right)$$

endlich bleibe.

In der Tat folgt aus den Gleichungen (*b*) nach Abzug der linken Seite von (23) unmittelbar die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \left( \frac{\partial (\lambda G)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \lambda \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \right) = 0,$$

die bei Einführung der Bezeichnungen $K_0$ und $K_1$ die Form annimmt

$$\frac{d(\lambda K_0)}{dt} - \lambda K_1 = 0. \tag{24}$$

Aus dieser folgt aber, da zur Zeit $t = t_1$ die Gleichung (19) stattfindet, die Gleichung $\lambda \equiv 0$ ebenso, wie früher.

*Hiemit ist das im Artikel VIII ausgesprochene Theorem,*

*welches das Princip der kleinsten Action in drei wesentlich verschiedenen Formen enthält,* — die Form C) ist nämlich nur ein Specialfall der Form D) — *in allen Teilen bewiesen.*

Ich werde diese verschiedenen Formen des Actionsprincips im späteren mit den Buchstaben A), B), C), D) bezeichnen.

## §. 5. Das Actionsprincip, wenn die Energie für unvariirbar erklärt wird.

XIV. Im Sinne des Satzes 3 des Artikels VII verschwindet die Variation der Action *für die Lagrange'sche Bewegung zweiter Classe* bei der Beschränkung $\delta G=0$ selbst dann, wenn $\delta F$ unabhängig ist von $\delta t$; sie verschwindet daher für diese Bewegung auch dann, wenn $\delta F=0$ und $\delta t$ beliebig sind.

Diese Bemerkung führt zur Aufstellung des folgenden Problems:

*Es sei $f$ eine Function der Coordinaten $q_i$, der Geschwindigkeiten $q_i'$ und der Energie $F$. Man verlange, dass die Variation der Action verschwinde bei Überführung aus der festen Anfangslage $a_i$ in die feste Endlage $b_i$ auf die Weise, dass die Zeitdauer beliebig variire, dabei aber die Bedingungsgleichung*

$$G\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i'-f-F=0 \tag{17}$$

*sowohl in der variirten, als auch in der unvariirten Bewegung Bestand habe; die Energie sei variabel, aber unvariirbar. Welches sind die Differentialgleichungen der unvariirten Bewegung?*

Setzt man wieder, wie im Artikel IX

$$\Omega\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i'+(\lambda-1)\,G, \tag{18}$$

und berechnet $\delta\int_0^{t_1}\Omega dt$ aus (12*), indem man $\Omega$ statt $f$ setzt und bedenkt, das $F$ keiner Variation unterliegt, so hat man nach dem Lagrange'schen Verfahren notwendigerweise und nur die Gleichungen zu erfüllen,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} = 0, \qquad (b')$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0, \qquad (c')$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega\right)_{t_1} = 0. \qquad (a')$$

Nun ist

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + \frac{d\lambda}{dt} G + (\lambda - 1)\frac{dG}{dt};$$

also, da $G=0$ eine für *alle* Zeiten giltige Bedingungsgleichung ist, während $f$ explicit *unabhängig* sein soll von $t$,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0.$$

Daher folgt aus der Gleichung $(c')$ die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega\right) = 0. \qquad (c'')$$

Aus $(a')$ und $(c'')$ folgt aber bei Anwendung der auch hier giltigen Gleichung (19′) des Artikels IX, dass $\lambda H_0$ constant ist und zur Zeit $t_1$ verschwindet. Da demnach das Product $\lambda H_0$ *immer* verschwinden muss, $H_0$ aber den Voraussetzungen gemäss *nie* verschwinden kann, so kommen wir auch hier zum Schluss, dass $\lambda \equiv 0$ sein muss.

*Die Lagrange'sche Bewegung zweiter Classe ist daher die einzige Lösung des aufgestellten Variationsproblems.*

XV. Wir sind nun in der Lage, das Princip der kleinsten Action bei unvariirter Energie derart formuliren zu können, dass es auch im *allgemeinsten* Fall notwendigerweise die *allgemeinen* Lagrange'schen Bewegungsgleichungen vorschreibt.* Zu

* Die Formulirung ist also auch in dieser Beziehung allgemeiner als die von mir auf p. 14 dieses Bandes Abschnitt VIII gegebene, die dies nur in dem Fall leistet, wenn in $f$ nur äussere Coordinaten, nicht aber auch äussere Geschwindigkeiten vorkommen.

diesem Behufe ist die Function $f$, die ursprünglich als numerische Function der unabhängig veränderlichen Grössen $q_i$, $q_i'$, $E$ und $t$ gegeben ist, auf die folgende Weise transformirt zu denken:

Wir denken uns die Anfangsenergie $F_0$, die Anfangslagen $a_i$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $a_i'$ gegeben, und die von diesen ausgehenden Lösungen der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (10′, 10″) bestimmt; diese Lösungen

$$q_i = K_i(t); \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$
$$F = E(t); \tag{25}$$

sind numerisch feste Functionen der Zeit. Durch Umkehrung der Gleichung $F=E(t)$ finden wir die ebenfalls numerisch feste Umkehrungsfunction

$$t = \zeta(F). \tag{25*}$$

Indem wir dann die in der Function $f$ vorkommenden $q_i$, $q_i'$ und $F$ unverändert lassen, hingegen an Stelle von $t$ die Function $\zeta(F)$ substituiren, erscheint

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ q_1', q_2', \ldots, q_n';\ F;\ t)$$

transformirt in

$$\bar{f} \equiv f(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ q_1', q_2', \ldots, q_n';\ F;\ \zeta(F)).$$

*Diese transformirte Funktion* $\bar{f}$ wollen wir nun bei der Berechnung der Variation der Action, wie auch in der Bedingungsgleichung des Variationsproblems zu Grunde legen, und erhalten dann das Actionsprincip in der folgenden, mit E) zu bezeichnenden Form:

1) *Man verlange, dass*

$$\delta \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' dt = 0$$

*sei bei Überführung aus der festen Anfangslage* $a_i$, *in die feste Endlage* $b_i$, *wobei* $\delta t_1$ *beliebig ist.*

2. *Man verlange, dass die Gleichung*

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' - \bar{f} - F = 0$$

*sowohl in der variirten als auch in der unvariirten Bewegung giltig sei.*

3. *Man verlange, dass bei Ausführung der Variation zu jeder Zeit $\delta F=0$ sei, wiewohl $F$ keinesfalls constant ist.*

4. *Man verlange, dass die Anfangsenergie $F_0$, die Anfangslagen $a_i$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $a_i'$ dieselben seien, welche bei der Berechnung des Ausdrucks für $\bar{f}$ benützt waren.*

*Diesen Forderungen genügt die Lagrange'sche Bewegung und, falls das Wertsystem $F_0$, $a_i$, $a_i'$ nicht von der später zu definirenden speciellen Art ist, ausser ihr keine andere.*

Da nämlich die Function $\bar{f}$ explicit unabhängig ist von $t$, da doch $\zeta(F)$ ebenfalls eine *feste* numerische Function von $F$ ist, so können wir auf Grund des vorigen Artikels aussprechen, dass die Gleichungen

$$\bar{L}_i \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} = 0\,; \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

$$\bar{G} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' - \bar{f} - F = 0$$

die Differentialgleichungen der Bewegung sind. Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Lagrange'schen (10′, 10″) dadurch, dass $\bar{f}$ an Stelle von $f$ steht; ihre *allgemeinen* Lösungen sind demzufolge von denen dieser ganz verschieden. Der Forderung 4) gemäss kann aber nur von jenen *particulären* Lösungen die Rede sein, die von den gegebenen *Anfangswerten* $F_0$, $a_i$, $a_i'$ ausgehen; diese *particulären* Lösungen sind aber *gemeinsam*. Setzt man nämlich in (26) nach Ausführung der partiellen Differentiationen

$$t = \zeta(F),$$

so gehen sie *vollständig* in die Lagrange'sche Form (10′, 10″) über; daher sind die particulären Lösungen (25) auch Lösungen der Differentialgleichungen (26). Es kommt daher alles darauf an, zu beweisen, dass es ausser diesen im Allgemeinen keine anderen Lösungen giebt; zugleich sind die singulären Stellen, wo dies nicht zutrifft, zu bestimmen.

XV. Da die Gleichungen (26) jenen speciellen Fall der Gleichungen (10′, 10″) darbieten, wo $f$ nur von den $q_i$, $q_i'$ und $F$ abhängt, von $t$ aber nicht, da ferner $\frac{dF}{dt}$ nicht verschwinden soll, so kann man die Gleichung (11′) des Artikels III anwenden.

Nimmt man dann an Stelle der Gleichung

$$1+\frac{\partial \bar{f}}{\partial F}=0,$$

die jedenfalls zu erfüllende Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(1+\frac{\partial \bar{f}}{\partial F}\right)=0,$$

und entwickelt sowohl in dieser Gleichung als auch in $\bar{L}_i$ die Differentiationen nach $dt$, so hat man zur Bestimmung der $n+1$ Grössen

$$\frac{dF}{dt}, \frac{dq_1'}{dt}, \frac{dq_2'}{dt}, \ldots, \frac{dq_n'}{dt}$$

die $n+1$ linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F}\frac{dF}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_j'}\frac{dq_j'}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_j}q_j'=0;\\
&\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial F}\frac{dF}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial q_j'}\frac{dq_j'}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial q_j}q_j'-\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i}=0.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n)
\end{aligned} \tag{27}$$

Die Determinante, gebildet aus den Coëfficienten der genannten Grössen in diesen Gleichungen, ist die Functionaldeterminante von $\bar{f}$ nach $F$, $q_1'$, $q_2'$, $q_n'$, nämlich

$$D\equiv\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F} & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_n'}\\
\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_1' \partial F} & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_1' \partial q_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_1' \partial q_n'}\\
\vdots & & & \vdots\\
\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_n' \partial F} & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_n' \partial q_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_n' \partial q_n'}
\end{vmatrix}. \tag{28}$$

Die Determinante verschwindet nicht *identisch*. Bei dem Beweis dieser Behauptung genügt es uns auf den Fall zu beschränken, wo $f$ selbst explicit unabhängig ist von $F$, und daher $\bar{f}$ *nur* insofern von $F$ abhängt, als in $f$ an Stelle von $t$ die Umkehrungsfunction $\mathfrak{z}(F)$ eingesetzt wurde; dieser Fall ist übrigens der in der Dynamik bisher ausschliesslich betrachtete. Wir haben in diesem Fall

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial F} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathfrak{z}} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial F} = \frac{1}{E'(\mathfrak{z})} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathfrak{z}},$$

daher

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F^2} = \frac{1}{E'(\mathfrak{z})} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \left( \frac{1}{E'(\mathfrak{z})} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathfrak{z}} \right) = \frac{1}{E'(\mathfrak{z})^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \mathfrak{z}^2} - \frac{E''(\mathfrak{z})}{E'(\mathfrak{z})} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathfrak{z}} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_i'} = \frac{1}{E'(\mathfrak{z})} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \mathfrak{z} \partial q_i'}.$$

Zur Zeit $t=0$ ist aber auch $\mathfrak{z}=0$, und [p. 273, Abschnitt III, (11)]

$$E'(0) = -\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t=0};$$

es folgt daher mittels der Identitäten

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathfrak{z}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t=\mathfrak{z}(F)}; \quad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \mathfrak{z}^2} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_{t=\mathfrak{z}(F)}; \quad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \mathfrak{z} \partial q_i'} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'} \right)_{t=\mathfrak{z}(F)},$$

dass zur Zeit $t=0$ die Werte der partiellen Differentialquotienten die folgenden sind:

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F} = \frac{1}{E'(0)^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{E''(0)}{E'(0)} \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t=0} = \frac{1}{E'(0)^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + E''(0) \right)_{t=0},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial F} = \frac{1}{E'(0)} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} \right)_{t=0},$$

wo auf der rechten Seite nach Ausführung der Differentiationen alle Coordinaten und Geschwindigkeiten durch die $a_i$, $a_i'$ zu ersetzen sind. Bezeichnet man diese Operation, wie üblich, durch das Anheften des Symbols 0 an $f$, so können wir den Wert von $D$ zur Zeit $t=0$, nämlich $D_0$, wie folgt ausdrücken:

$$E'(0)^2 D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + E''(0) & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}$$

Wir haben dabei den Ausdruck von $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F^2}$ mittels der Überlegung vereinfacht, dass der Definition von $E(t)$ zufolge die Lagrange'sche Gleichung

$$E'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

für die Lagrange'sche Bewegung zu *jeder* Zeit, daher *zur Zeit* $t=0$ auch für die gesuchte Bewegung stattfindet. Auf derselben Überlegung ruht auch die folgende Elimination von $E''_{(0)}$ aus dem Ausdruck für $D_0$. Wir haben aus der obigen Gleichung

$$E''(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} q_j' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j' \partial t} \frac{dq_j'}{dt} = 0,$$

die gewiss giltig ist, wenn die $q_i$, $q_i'$, und $\frac{dq_i'}{dt}$ den *Lagrange-schen* Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} - \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j'} q_j' + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} \frac{dq_j'}{dt} = 0,$$

genügen. Durch Elimination der $\frac{dq_j'}{dt}$ aus diesen $n+1$ Gleichungen folgt daher die *zur Zeit* $t=0$ gewiss giltige Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} E''(0) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_j} q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_2'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_j'} q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_j'} q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial q_n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n \partial q_j'} q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix},$$

und nach Subtraction der obigen Determinante aus dieser ergiebt sich

$$-E'(0)^2 D_0 = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_j} q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_n'} \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_j'} q_j' - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_j'} q_j' - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_j'} q_j' - \frac{\partial f_0}{\partial q_n} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix} \quad (28')$$

Diese Determinante verschwindet aber *nur* für *ganz* specielle Wertsysteme der Anfangslagen $a_i$ und Coordinaten $a_i'$. Ist nämlich das Potential der Kräfte *nur* von Coordinaten und von der Zeit abhängig, und sind die Verbindungen der Punkte unabhängig von der Zeit, so haben wir allgemein

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial q_i'} = 0,$$

und im Allgemeinen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial q_i},$$

ferner

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_i' \partial q_j'}.$$

Daher geht die Gleichung (28′) in diesem Fall über in

$$-E'(0)^2 D_0 = D_{10} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U_0}{\partial a_j \partial t} a'_j, \qquad (28'')$$

wo

$$D_{10} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_1 \partial q'_1} & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_1 \partial q'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_1 \partial q'_n} \\ \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_2 \partial q'_1} & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_2 \partial q'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_2 \partial q'_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_n \partial q'_1} & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_n \partial q'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q'_n \partial q'_n} \end{vmatrix}.$$

Da aber diese Determinante $D_{10}$ nicht verschwindet, und auch $E'(0)$ endlich ist, so verschwindet *selbst* in diesem *Specialfall* nach (28″) die Determinante $D_0$ nur dann, wenn

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U_0}{\partial a_j \partial t} a'_j = 0.$$

Daraus folgt aber, dass die Determinante (28) auch im Allgemeinen nicht *identisch* verschwinden kann.

XVI. Wir wollen nur solche singuläre Wertsysteme $F_0$, $a_i$, $a'_i$ von der Betrachtung ausschliessen, für welche $D_0$ verschwindet, und für welche irgend ein Coëfficient der Gleichungen (27) unendlich gross wird. Die Gleichungen (27) erlauben dann die von den gegebenen Anfangswerten ausgehenden Werte der Zeitfunctionen $F$ und $q_i$ *eindeutig* zu bestimmen. Da also, wie im Artikel XIV gezeigt wurde, die Lagrange'schen Lösungen auch Lösungen der Gleichungen (27) sind, so müssen die eindeutig bestimmten Zeitfunctionen eben die Lagrange'schen sein.

Daraus folgt aber, dass das Variationsproblem des Artikels XIV, auf *sämmtliche beliebige* nicht ausgeschlossene Wertsysteme $F_0$, $a_i$, $a'_i$ ausgedehnt, notwendigerweise auf die allgemeinen Lagrange'schen Bewegungsgleichungen führt. Hiemit ist auch die mit E) bezeichnete Formulirung des Actionsprincips bewiesen.

## §. 6. Das Verhältniss meiner Arbeit zur Helmholtz'schen Formulirung des Actionsprincips, und Zusammenfassung der Resultate.

XVII. Nachdem ich hiemit meine Untersuchungen bezüglich des Princips der kleinsten Action zum Abschluss gebracht habe, glaube ich das Verhältniss meiner Arbeit zur HELMHOLTZ'schen in allen Teilen auseinandersetzen zu müssen; sie ist nämlich tatsächlich aus dieser entstanden, durch Analyse der Arbeit mittels der von Herrn A. MAYER auf dieses Problem in speciellerem Gebiet durchgeführten strengen Methoden. Denn so geistvoll die Betrachtungen von v. HELMHOLTZ sind, seine Beweise des Princips sind, so viel ich sehe, lückenhaft und nicht überzeugend.

Das *Differential* der Zeit wird nämlich variirt, die Zeit *selbst* aber nicht *; die Bedeutung und Berechtigung dieses Verfahrens ist aber nirgends auseinandergesetzt. Und selbst wenn man dieses Verfahren zugiebt, sieht man zum Schluss des Beweises nur soviel ein, dass *auch* die natürliche Bewegung dem Variationsproblem entspricht, nicht aber, dass *nur* sie dies leistet.

Das Verfahren, die Zeit selbst *nicht*, das Differential derselben hingegen *ja* zu variiren, ist aber bei der Helmholtz'schen Formulirung des Actionsprincips notwendig, da man sonst zu gar keiner Verallgemeinerung gelangt. HELMHOLTZ sagt nämlich:**

«In allen Fällen verlangt man, das der Gesammtbetrag der Action ein Grenzwert sei für den Übergang aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage. Die Variation wird bewirkt dadurch, dass man die Coordinaten *** $p_i$ der einzelnen, während des Übergangs eintretenden Lagen des Körpersystems variirt, gleichzeitig aber auch die Zeit, und zwar letztere so, dass der vorhandene Betrag der Energie des Systems nicht geändert wird. Da nämlich die Energie ausser der potentiellen Energie $F$,† welche nur von der Lage abhängig ist, auch noch die lebendige Kraft ent-

* Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin 1887. pag. 232, 234.

** L. c. pag. 231, Alinea 3, Zeile 3—7.

*** Hier mit $q_i$ bezeichnet.

† Hier mit $-U$ bezeichnet.

hält, die von den Geschwindigkeiten abhängig ist, und die letzteren durch Variirung der Wegstrecken, die im Zeitelement $dt$ zurückgelegt werden, variirt werden, so kann man sämmtliche Geschwindigkeiten durch Variation des Wertes von $dt$, der zur betrachteten Wegstrecke gehört, verändern, und dabei die Aenderung von $dt$ so einrichten, dass der Betrag der Energie bei der Variation nicht geändert wird.»

Fasst man das Princip der kleinsten Action im Sinne LAGRANGE's als ein Maximum-Minimum-Problem mit fester Bedingungsgleichung auf, so sprechen die beiden ersten Sätze aus, dass

$$\delta \int_0^{t_1} 2T dt = 0$$

sei bei Einhaltung der Bedingungsgleichung

$$T - U = F,$$

wo die Energie $F$ dieselbe Wertreihe durchzulaufen hat in der variirten Bewegung wie in der unvariirten, und wo das Potential $U$ von der Zeit explicite abhängen soll. Dieses Problem enthält aber, wenn *auch* die in $U$ vorkommende *Zeit* variirt wird, nur dann keinen innern Widerspruch, wenn $\frac{\partial U}{\partial t}$ von vornherein verschwindet, d. i. wenn für das System das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft Bestand hat.

Will man also zu einer Verallgemeinerung des Princips gelangen, und dabei seinen Charakter eines Maximum-Minimum-Problems mit fester Bedingungsgleichung bewahren, so kann man dies nur erreichen, wenn man entweder die Forderung der Unvariirbarkeit der Energie fallen lässt, oder anstatt dessen bezüglich der Variation der Bedingungsgleichung letztere einer solchen Transformation unterzieht, durch welche aus ihr die Zeit *selbst* eliminirt wird.

XVIII. Die erste Alternative habe ich im §. 4, Abschnitt VIII—XIII dieser Arbeit unter allgemeineren Voraussetzungen betrachtet, und gezeigt, dass wenn man die Energie des Systems als feste Function der Zeit auffasst, man ausser den bei HELMHOLTZ vor-

geschriebenen Forderungen *Eine* derjenigen zu stellen hat, die in Artikel VIII mit A), B), C), D) bezeichnet sind. Man kommt so zu *drei* wesentlich verschiedenen Formulirungen des Actionsprincips: die Forderung *C*) ist nämlich in der Forderung *D*) als Specialfall enthalten. Von diesen Formulirungen steht die mit *C*) bezeichnete in sehr naher Beziehung zur v. HELMHOLTZ'schen Formulirung. Da nämlich in dem von v. HELMHOLTZ betrachteteten Specialfall

$$\delta F = \delta T - \delta U,$$

d. i.

$$E'(t)\,\delta t = \delta T - \sum_1^n{}^i \frac{\partial U}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial U}{\partial t}\,\delta t,$$

die einzuhaltende Bedingung ist; da ferner die Forderung *C*) in diesem Specialfall ihren Ausdruck in der Gleichung

$$\frac{dF}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (*),$$

d. i.

$$E'(t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

findet, so nimmt diese Bedingungsgleichung der Variation die Gestalt an

$$0 = \delta T - \sum_1^n{}^i \frac{\partial U}{\partial q_i}\,\delta q_i.$$

Man kommt aber zu derselben Form, wenn man der v. HELMHOLTZ'schen Vorschrift gemäss die Energie unvariirt lässt, und die Zeit $t$, insofern sie in $U$ vorkömmt, als nicht zu variirende Function einer nicht zu variirenden Variabeln betrachtet.

Es ist aber nicht wahrscheinlich, dass v. HELMHOLTZ *diese* Alternative vor Augen gehabt hätte. Denn er hebt an mehreren Stellen hervor, dass die Energie nicht zu variiren sei; *auch erwähnt er nirgends, dass die mit* (*) *bezeichnete Gleichung eine fundamentale Voraussetzung des Princips sei.*

XIX. Die zweite Alternative habe ich im § 5 dieser Arbeit behandelt, und in Artikel XV gezeigt, dass man bei dieser Betrachtung *direct* zu Gleichungen kommt, die nur der *äussern Form*

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

nach die LAGRANGE'schen sind; und es wurde in den darauffolgenden Artikeln gezeigt, dass diese Gleichungen mit den wahren Lagrange'schen Bewegungsgleichungen die von den gegebenen Anfangswerten der Energie, der Lagen und der Geschwindigkeiten des Systems ausgehenden, eindeutig bestimmten, particulären Lösungen gemeinsam haben. Das in diesem §. formulirte Variationsprincip führt daher *indirect*, doch notwendigerweise zu den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen, sobald man die *Gesammtheit* der möglichen Anfangswerte der genannten Grössen in Betracht zieht.

Bei dieser mit E) bezeichneten Formulirung des Actionsprincips ist die Energie, ebenso wie bei v. HELMHOLTZ, unvariirbar; seine Vorschrift $dt$ zu variiren, $t$ selbst aber unvariirt zu lassen, erhält Sinn und Bedeutung; und die durch das Variationsprincip gelieferten Differentialgleichungen enthalten, ebenso wie es v. HELMHOLTZ l. c., pag. 233, letzte Alinea hervorhebt, auch die nicht zu variirende Veränderliche. Die Formulirung ist auch in Übereinstimmung damit, dass sie ebenso, wie die HELMHOLTZ'sche den Satz von der lebendigen Kraft nicht *voraussetzt*, sondern zur Folge hat; während bei der Formulirung C) dieser Satz vorausgesetzt werden muss.

Nur ist der Beweis von v. HELMHOLTZ, wenn man seine Formulirung auf diese Weise deutet, in den Schlussworten, soviel ich sehe, nicht fest begründet. Denn er bemerkt nicht, dass ausser seinen Differentialgleichungen 1 g (resp. 2 g) noch die Bedingungsgleichung des Variationsproblems zu erfüllen ist; dass also demzufolge wenn eben die Energie als unabhängig veränderlich erklärt wird, ebensoviel Gleichungen zu erfüllen sind, als das Problem Unbekannte darbietet. Auch davon ist daselbst keine Rede, dass das Gleichungssystem, mit dem Lagrange'schen, direct betrachtet, nur particuläre Lösungen gemein hat.

XX. *Zusammenfassung.* Ich fasse das hauptsächliche Ergebniss meiner Untersuchungen in den folgenden Sätzen zusammen:

1. Es werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen verallgemeinert, und mehrere Variationsprincipien formulirt, die sämmtlich auf diese Bewegungsgleichungen führen.

2. Das Princip der kleinsten Action ist in jeder der hier aufgestellten Formen, bezüglich der über die Verbindungen und über die Kräfte gemachten Voraussetzungen, vollständig in Übereinstimmung mit dem Hamilton'schen Princip.

3. Die mit A) und E) bezeichneten Formulirungen sind auch darin in Übereinstimmung mit dem Hamilton'schen Princip, dass sie den Satz von der lebendigen Kraft (resp. einen diesem äquivalenten Satz) nicht voraussetzen, sondern zur Folge haben.

4. Im *allgemeinsten* Fall, wenn das Potential auch von der Energie des Systems in gegebener Weise abhängt, sind die genannten Principien mit dem Hamilton'schen auch darin in Übereinstimmung, dass sie die Definitionsgleichung der Energie C) sämmtlich zur Voraussetzung haben.

5. In dem in der Dynamik bisher ausschliesslich betrachteten Fall, wenn das Potential bloss von Coordinaten, von Geschwindigkeiten und von der Zeit abhängt, hat das Princip der kleinsten Action die Definitionsgleichung der Energie zur Voraussetzung, während dies beim Hamilton'schen Princip nicht der Fall ist.

6. Das Variationsprincip des Artikels VI hingegen hat diese Definitionsgleichung auch im allgemeinsten Fall nicht zur Voraussetzung, sondern zur Folge.

15.

# ÜBER DEN BAU DES EIDECHSENHODENS.*

Von Dr. KOLOMAN TELLYESNICZKY,

ERSTER ASSISTENT AM I. ANATOMISCH-EMBRYOLOGISCHEN INSTITUTE DER UNIVERSITÄT ZU BUDAPEST.

(Ueber die Wandschichte und über die Ebner'schen Spermatoblasten.)

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 19 November 1894 vom o. M. Géza v. *Mihálkovics*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesitő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie) Band XIII, pp 86—123. 1895.

Die Schilderung der auf den Hoden bezüglichen Litteratur würde selbst einen dicken Band füllen; mit dem im Jahre 1836 im MÜLLER'schen Archive erschienenen Aufsatze WAGNER's anfangend könnte man eine lange Reihe der Forscher und ihrer Werke aufzählen; der uns nur im beschränkten Umfange zur Verfügung stehende Raum gestattet jedoch die Litteratur nur im Allgemeinen und ihren Hauptzügen zu berücksichtigen.

Die Entwickelung der Samenfäden bietet eine Reihe sehr interessanter, aber sehr complicierter Vorgänge. Im Wesentlichen bestehen dieselben aus zwei Processen. Erstens in Erzeugung der Zellen; da kein Zweifel darüber herrschen kann, dass jedes Samenfädchen eine verwandelte Zelle repräsentirt, so bildet die Erzeugung der Riesenzahl der Spermatozoen entsprechende Zellen, die vornehmste Aufgabe des Hodens. Zu diesem Zwecke teilen sich mehrfach die Spermatogonien des sexuell reifen Individuums. Die ohnehin schwierige Verfolgung der Zellteilungen, wird hier nicht nur durch die relative Kleinheit der Zellen, sondern auch durch den eigentümlichen Vorgang des Processes erschwert. Die Zellteilungen erfolgen nämlich auf zweierlei Weise,

* Aus dem I. anatomisch-embryologischen Institute der Universität zu Budapest.

bei der einen sogar ganz eigentümlich zweimal nacheinander, ohne einer Zwischenpause. Diese Fragen haben HENKING und RATH[1] bei den Käfern, FLEMMING[2] bei dem Salamander eingehender untersucht.

Wenn auch bei den höheren Wirbeltieren die mitotische Zellteilung ausführlich nicht beschrieben worden ist und nicht untersucht wurde, so hat man doch das Vorhandensein einer solchen von vielen Seiten bestätigt, und dennoch fand sich ein Autor, BARDELEBEN,[3] der das Vorkommen solcher Processe leugnete, und die Vermehrung der Zellen einfach durch eine direkte Zellteilung erklären wollte.

Der zweite Hauptmoment der Samenfädenentwickelung ist eine unmittelbare Verwandlung, der durch die Zellteilung entstandenen kleinen Zellen (der Spermatiden) zu Samenfäden; eine interessante, aber durch ihre Feinheit die Aufmerksamkeit des Forschers auf die Probe stellende Frage.

Schliesslich — dass die Aufgabe sich noch complicierter gestalte, und die Orientirung schwieriger sei, — tritt noch zu alledem ein bis jetzt wahrlich rätselhaftes Element hinzu, (Élement énigmatique, wie es PRENANT[4] nannte), die sogenannte SERTOLI'sche Zelle, die als Warnung der Nachfolger gelten wird, welch unberechenbare Missverständnisse und Irrtümer aus einer für sich ganz unbedeutender, aber unrichtig aufgefasster Sache entstehen können.

Durch dreissig Jahren, seitdem HENLE und SERTOLI als die Ersten berichteten, dass in den Samenkanälchen sich noch eine Zellenart, jetzt als die SERTOLI'sche bekannte Zelle befindet, ent-

---

[1] HENKING: Spermatogenese. Zeitschrift f. wiss. Zoologie LI. 1891.
RATH: Zur Kenntniss der Spermatogenese von Gryllotalpa vulgaris, mit besonderer Berücksichtigung der Frage der Reductionsteilung. Arch. f. mikr. Anat. XL. I. Heft. 1892.

[2] FLEMMING: Neue Beiträge zur Kenntniss der Zelle. Arch. f. mikr. Anat. XXIX. 1887.

[3] BARDELEBEN: Ueber Spermatogenese bei Säugethieren, besonders beim Menschen. Anat. Anzeiger 1892.

[4] PRENANT: Sur la signification de la cellule accessoire du testicule etc. Journal de l'Anatomie et de la Physiologie, 28. 1892.

standen daraus die verschiedensten Meinungen, langdauernde Discussionen.

Nach der Ansicht SERTOLIS repräsentiren diese Zellen (cellule ramificate) die ständigen Epithelzellen der Samenkanälchen, im Gegensatze zu der anderen Art, welche zur Bildung der Samenfäden verbraucht werden. MERKEL ist derselben Meinung und benannte diese, mit ihren Ausläufern um die Uebrigen ein Netz bildenden Zellen, Stützzellen.

Im Jahre 1871 trat v. EBNER [1] mit seiner Ansicht auf, die zu langen lebhaften Discussionen Gelegenheit gab. Gegenüber seiner Vorgänger entstehen nach ihm die Samenfäden gerade aus den SERTOLI'schen Zellen (Spermatoblast). Durch Beweise überzeugt, liess er seine Ansicht in einem späteren Werke [2] fallen.

Dann fanden sich wieder Autoren, wie BIONDI und WIEDERSPERG,[3] die das Vorhandensein der SERTOLI'schen Zellen einfach leugneten; zweifelsohne ist dies eine Folge ihrer mangelhaften Untersuchungen. Scharfe Differenzen entstanden nicht nur um die Existenz der SERTOLI'schen Zellen, um ihre Bedeutung und Rolle, ja sogar über deren Form. Im Jahre 1888 sieht NIESSING [4] in den Kernen dieser Zellen nichts anderes, als eine entleerte und runzelig gewordene Zellenmembran. In demselben Jahre noch berichtet SANFELICE [5] nicht nur von den gesunden Kernen, sondern will gar eine neue Teilungsart an denselben entdeckt haben. Im nächsten Jahre betont HERMANN [6] die regelmässige Form, das gesunde

[1] v. EBNER. Untersuch. ü. d. Bau der Samenkanälchen in ROLLET's Unters. aus dem Inst. f. Hist. u. Phys. in Graz. II .Heft u. Separat. Leipzig 1871.

[2] v. EBNER: «Spermatogenese bei den Säugethieren.» Arch. f. mikr. Anat. 31.

[3] BIONDI: Die Entwickelung der Spermatozoiden. Arch. f. mikr. Anatomie. XXV. 1885.

WIEDERSPERG: Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Samenkörper. Arch. f. mikr. Anat. XXV. 1885.

[4] NIESSING: Untersuchungen über die Entwickelung und den feinsten Bau der Samenfäden einiger Säugethiere. Verhandl. der phys. med. Ges. Würzburg 1888.

[5] SANFELICE: Spermatogenèse des vertébrés. Archives italiennes de biologie. 1888. X.

[6] HERMANN: Beiträge zur Histologie des Hodens. Arch. f. mikr. Anat. XXXIV. 1889.

Aussehen dieser Kerne und behauptet, dass die SERTOLI'schen Kerne als beständigen und typischen Charakter, aus zweierlei Substanz bestehende Kernkörperchen führen, deren eine mit Safranin färbbar, die andere unfärbbar ist.

Dies sind nur die Hauptvertreter der verschiedenen Ansichten; denen giebt es beinahe so viele, als beachtenswerte Autoren. Ich hoffe durch meine, an dem Eidechsenhoden vorgenommenen Untersuchungen gerade diese Frage in's Reine zu bringen können.

Dies zu erlangen ist aber noch die Intercellularsubstanz und die eigenartige Anordnung der Elemente der Samenkanälchen in's Auge zu fassen.

Schon HENLE und KÖLLIKER berichten von einer homogenen Grundsubstanz zwischen den Hodenzellen, und, wie es auch PRENANT[1] bemerkt, war v. MIHALKOVICS[2] der erste, der das Stütz-System MERKEL's durch die Interzellularsubstanz zu erklären versuchte. In dem gründlichen Werke PRENANT's ist die Intercellularsubstanz vorzüglich dargestellt; er trennt aber dieselbe scharf von den SERTOLI'schen Zellen, und bemühte sich zwischen beiden eine Grenze zu finden. Die überwiegende Mehrzahl der Autoren kümmert sich kaum um die Interzellularsubstanz. Gewiss ist es diesem Umstande zuzuschreiben, dass das nahe Verhältniss dieser Substanz zu den SERTOLI'schen Zellen bis jetzt imDunkeln blieb. Während meiner Untersuchungen am Eidechsenhoden, habe ich betreffs dieser Verhältnisse sehr belehrende Bilder gewonnen, welche das Zusammengehören des Plasmas der Sertoli'schen Zellen mit der Intercellursubstanz unbedingt beweisen.

Schliesslich hoffe ich auch betreffs der Anordnung der Elemente der Samenkanälchen Neues bieten zu können. Es ist eine altbekannte Tatsache, dass man die Samenfäden zu Bündeln, d. h. an gewissen Stellen in Gruppen geordnet findet. Das erklären natürlicherweise schon ältere Autoren durch den Druck der sich neu entwickelnden Elemente, jedoch ohne, dass sie diese

[1] PRENANT: Récherches sur la signification des éléments du tube séminifere adulte des mammifères. Internat. Monatschrift f. Anat. u. Physiologie. 1887.

[2] v. MIHÁLKOVICS: Beiträge zur Anatomie und Histologie des Hodens. Verhandl. d. kön. Sächs. Ges. 1873.

Druckverhältnisse näher untersucht hätten. Seltsamer ist es aber dass die Samenfädengruppen beinahe immer an ihrer Spitze mit einer SERTOLI'schen Zelle zusammenhängen (EBNER'scher Spermatoblast) und bilden eine so eigentümliche Erscheinung deren Entstehung bis jetz ganz unverständlich war.

EBNER, dieser gründliche Forscher des Rattenhodens, um die Frage der auffallenden und regelmässigen Gruppirung der Samenfäden gegenüber den SERTOLI'schen Zellen zu lösen, stellte im Jahre 1871 die Theorie der seitdem berühmt gewordenen Spermatoblasten auf; nachdem aber nachgewiesen wurde, dass die Samenfäden unmöglich aus den Spermatoblasten abstammen können, nahm er, um nur die Tatsachen nicht ohne Erklärung zu lassen, die durch BENDA[1] aufgestellte Copulationstheorie an; dass er aber diese Ansicht nur aus Mangel einer besseren anerkennt, leuchtet aus den Schlussworten seiner citirten Arbeit hervor, indem er sagt: «Ich habe die Gründe für meine Ansichten niedergelegt und ich werde an denselben so lange festhalten, bis gezeigt sein wird, dass entweder ein wesentlicher Feher in der hier angewendeten Methode vorhanden ist, oder dass neue und bessere Beobachtungen zu einer anderen Auffassung zwingen». Ich hoffe bestimmt, dass durch meine, am Eidechsenhoden vorgenommenen Untersuchungen, die Urquelle des Fehlers auch nach dieser Richtung hin entdeckt wurde, was zur exacten Lösung der EBNER'schen Spermatoblasten-Frage führte.

*

Das Hauptobjekt meiner Untersuchungen war der Eidechsenhoden [besonders Lacerta agilis und L. viridis.], aber dass ich nicht der Einseitigkeit verfalle, habe ich mich speciell noch mit dem Meerschweine beschäftigt, [abgesehen davon, dass ich von sämmtlichen mir zugänglichen Thieren Præparate verfertigte] deren Beschreibung aber ich einerseits wegen Mangel an Raum, anderseits weil sie von mehreren Autoren schon beschrieben wurde, wegliess.

Die Untersuchungen wurden an den Hoden im Frühjahr

[1] BENDA: Untersuchungen über den Bau der functionierenden Samenkanälchen einiger Säugethiere etc. Arch. f. mikr. Anat. XXX. 1887.

frisch gefangener Eidechsen vorgenommen, und zwar kurz nach ihrem Einfange. Der Zeit des Einfanges und der raschen Bearbeitung ist es zu danken, dass fast in jedem Präparate eine Unzahl mitotischer Zellteilungen vorhanden waren.

Die Hoden wurden in erster Reihe frisch in Kochsalzlösung, dann mit Zugabe von Essigsäure untersucht. Für frische Untersuchungen als Zupfpräparate erwies sich der Eidechsenhoden wegen dem raschen und leichten Zerfallen unter den Nadeln als vorzüglich geeignet. Diese gute Eigenschaft habe ich hauptsächlich für die wertvollen Zupfpräparate mit Fixirung geeignet ausgenützt. In einer flachen Schale Fixations-Flüssigkeit vorbereitet, habe ich das Deckglas, auf welchem ein Stückchen Hoden rasch zerzupft wurde, mit der betreffenden Seite auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen: das Material klebt rasch an. Es ist leicht einzusehen, wie schnell und vollkommen die einzelnen Elemente mit der Fixations-Flüssigkeit bei dieser Methode in Berührung kommen. Die Anwendung der Flemming'schen oder Hermann'schen Flüssigkeit ergab alle übrigen Methoden weit überragende Resultate.

Zur Fixirung der Schnittpräparate habe ich mich der Flemming, Hermann und Perényi'schen Flüssigkeit bedient. Die ersten zwei, weil sie ohne nennenswerten Unterschied die besten Resultate gaben, die letztere wegen der leichteren Färbung und um mehrerlei Farbstoffe anwenden zu können.*

Die Paraffin-Serienschnitte habe ich am schönsten nach Flemming's Vorschrift mit Safranin und mit Gentiana Violett gefärbt. Ausser den Kernfärbungen habe ich fortwährend die in den Hodenzellen so oft vorkommenden Plasma-Gebilde (die Nebenkerne) und die, einen wichtigen Teil meiner Abhandlung bildende Interzellularsubstanz vor Augen gehalten; die Färbung der Nebenkerne, wie auch die der Interzellularsubstanz habe ich auf sehr befriedigende Weise mit einer geringen Modification der Weigert'schen Methode erreicht. Das, durch 24 Stun-

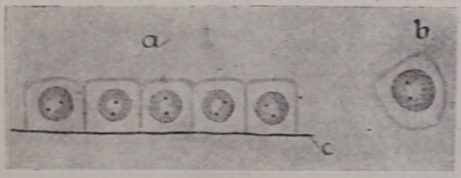
* Neuerdings, da ich die meisten Fixirungflüssigkeiten auf den Hoden des Salamanders und anderen Thieren sorgfältig geprüft habe, fand ich in der Zenker'schen Flüssigkeit ein so hervorragendes Mittel, welches die Übrigen in manchen weit übertrifft.

den mit einer concentrirten Cupr. sulf. Lösung behandelte Präparat habe ich am andern Tage in die 1% alkoholische Hæmatoxylin-Lösung, am dritten Tage nach nochmaliger kurzer Behandlung mit Cupr. sulf. in zweifach diluirter Weigert'scher Differenzir-Flüssigkeit entfärbt. Dadurch sondern sich scharf die Nebenkerne, und Intercellularsubstanz dunkelschwarz oder schwarzbräunlich gefärbt von der Umgebung. Diesem Verfahren kann ich meine beste Resultaten zu schreiben.

Das Hauptgewicht habe ich auf die genaueste und gründlichste Durchsicht meiner Präparate gelegt; das einfache Betrachten konnte kaum ausreichen, ich zeichnete fortwährend nach, wodurch einerseits die geringsten Details die Aufmerksamkeit in Anspruch nahmen, andererseits weil die Bilder — welche in dem Gedächtniss für weitere Combination kaum brauchbar confluiren — durch die Zeichnungen fixirt, ununterbrochen im Augenscheine sind. Eine Menge solch illustrirter Notizen bildeten die Grundlage meiner Schlussfolgerungen, über deren Resultate im Folgenden Rechenschaft gegeben wird.

## Ueber die wandständigen Elemente des Eidechsenhoden-kanälchens.

1) (Regelmässige Wandzellen. Spermatogonien d. Autoren) am äussersten Rande des Eidechsenhodenkanälchens, d. h.




1. Figur. *a* 5 regelmässige Wandzellen aus einem Schnittpräparate, *c* die Wand des Samenkanälchens, *b* eine regelmässige Wandzelle aus einem Zupfpräparate. (Reich. hom. Imm.)

unmittelbar an der Wand des Samenkanälchens finden wir eine 1—2—3-fache Schichte bildende charakteristische Zellen.

Runde, manchmal schwach ovale Kerne, darin sehr beständig zwei Kernkörperchen und in der gekörnten Grundsubstanz des Chromatins mit einem hellen chromatinfreien Fleckchen bilden die häufigste und auffallendsten Elemente der Wandschichte. Ihre Grösse schwankt zwischen kleinen, aber gut bemerkbaren Grenzen; die Mittelgrossen haben einen Durchmesser von 7 $\mu$, und besitzen einen verhältnissmässig schmalen Plasmaring. Diese Zellen kommen an den Wänden auffallend in Gruppen vor; in dem Schnittpräparate bilden gewöhnlich 4—8 eine Gruppe, deren Grösse so wie ihr Färbungsvermögen ziemlich gleich sind. In den durch die kleineren Zellen gebildeten Gruppen ist das Chromatin im Allgemeinen spärlicher, nur die zwei Kernkörperchen färben sich gut; die Grössern enthalten mehr Chromatin.

Bei den Zellencontouren nehmen unsere Aufmerksamkeit, die zwischen den Zellen befindlichen, ein zusammenhängendes Netz bildenden Streifen in Anspruch. Diese, zwischen den Zellen ein Netz bildende Substanz erscheint auffallend in den, mit dem früher beschriebenen Weigert'schen Verfahren behandelten Präparaten, woselbst sie dunkelschwarz gefärbt scharf hervortritt. Ihr Vorhandensein ist ziemlich inconstant. An einzelnen Stellen befindet sie sich in grösseren Mengen, an anderen kann sie gänzlich fehlen; im ersteren Falle sind die Grenzen der Zellen gut gesondert und bemerkbar, im letzteren sind sie weniger auffallend.

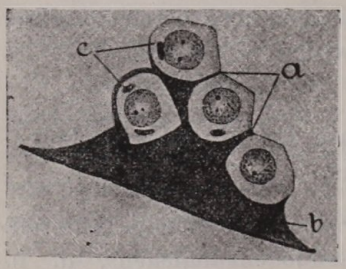



Fig. 2. Partie des Samenkanälchens aus einem mit Cupr. Sulf. und Alkoh. Hæmatoxylin gefärbten Präparate. *a* Die dunkelgefärbte Intercellular-Substanz, welche sich bei *b* neben der Wand liegenden grösseren Masse fortsetzt. *c* Regelmässige Wandzellen mit Nebenkern. (Reich. hom. Imm.)

Häufig ist dieses Intercellularnetz in die unmittelbar neben den Wänden liegenden grösseren Mengen zu verfolgen wie es aus Fig. 2 ersichtlich ist. Daselbst sind in dem Plasma der wandständigen Zellen schwarze, ovale Gebilde bemerkbar, welche mit den übrigen Verfahren in diesen Zellen gar nicht zum Vorschein kamen: in den mit der

WEIGERT'schen Methode behandelten Präparaten aber beständig gut hervortreten.

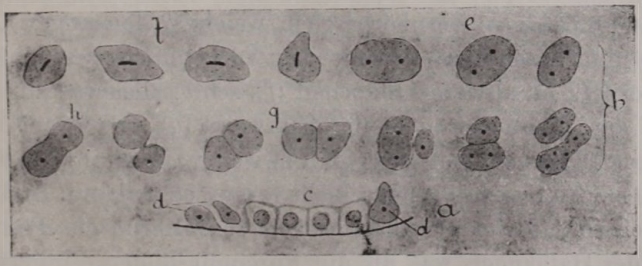
Die soeben beschriebenen und in den zwei Abbildungen dargestellten, vorläufig als regelmässige Wandzellen zu nennenden Elemente sind ausschliesslich *nur neben den Wänden aufzufinden;* auffallend ist, dass sie verhältnissmässig genug häufig an einzelnen Stellen der Kanälchen gänzlich fehlen können.

Entsprechend den aus einerlei Art Zellen, bestehenden Gruppen, findet man in *Zupfpräparaten* manchmal mehrkörnige Cysten, in welchen die einzelnen Zellen gar keine Kontouren haben, so dass sämmtliche Kerne in eine gemeinsame Substanz eingebettet erscheinen.

2) (Unregelmässige Wandzellen; Sertolische Zellen d. Autoren).

Ueber die Kerne. In Gesellschaft der eben besprochenen Zellen, in der Wandschichte findet man in wechselnden Distanzen Kerne, welche meistens grösser als die vorigen, von *unbestimmter Form* sind, bald hell, bald eigentümlich diffus gefärbt erscheinen; die Kernkörperchen sind recht gross, von unbestimmter Zahl, gewöhnlich aber kommen ein-zwei vor.

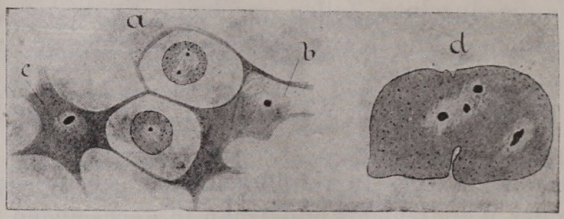
Sehr überraschend ist, dass in anderen Fällen die Contouren dieser Kerne ganz verschwommen sind. Diese verschwommenen Kerne färben sich manchmal intensiver, aber auf eine so eigen diffuse und trübe Art, die keineswegs an die gewohnte scharfe Färbung des Chromatins erinnert.




Figur 3. *a* Partie neben der Wand des Samenkanälchens. *c* Regelmässige Wandzellen. *d* Unregelmässige Wandkerne. *b* Direkte Teilungen der unregelmässigen Wandkerne.

In Fig. 4 bei *b* ist die Grenze des Kernes noch zu vermuten, bei *c* aber sehen wir gar keine Contour mehr, die Substanz des Kernes übergeht direkt in das Netz zwischen den Zellen; da deutet nichts mehr darauf hin, dass man es mit Zellen, richtiger Kerne zu tun hat, nur das noch vorhandene Kernkörperchen lässt uns Solches vermuten.

Wenn man noch in Fig. 4 *d* betrachtet, so hat man einen Begriff davon, wie verschieden diese Kerne aussehen. In dem




Figur 4. Bei *a* sieht man zwei nur regelmässige Wandkerne mit verschwommenen Contouren, welche sich in der zwischen den Wandzellen befindlichen Intercellular-Substanz fortsetzen. *d* Grosser unregelmässiger Wandkern, mit 4 Kernkörperchen, welche einen trüben Fleck begrenzen.

letzten Falle sind zwar die Zellencontouren noch scharf, da aber ist wieder zwischen den vier groben Kernkörperchen eine beträchtliche Trübung aufgetreten.

Damit sind aber bei weitem noch nicht die, an den unregelmässigen Wandkernen vorkommende Erscheinungen erschöpft. In Fig, 3 bei *b*. bemerken wir eine neue Erscheinung. Erstens sind es die paarigen Kernkörperchen, welche in den langen Kernen ganz symmetrisch liegen dann das Vorkommen der einfachen Kernkörperchen als lange Stäbchen (*f*), schliesslich was mir sofort auffiel dass diese Kerne häufig paarweise (*g*), und zwar so nahe zu einander vorkommen, dass man zwischen ihnen nicht die geringste sie trennende Plasmaschicht voraussetzen kann. In diesem Falle entspricht der Berührungsfläche der Kerne die Planoberfläche der Halbkugel, was an die Furchungsbilder erinnert. Dementsprechend kann man auch die verschiedensten Einschnürungen nachahmenden Formen auffinden.

Diese Kerne sind im Laufe der Kanälchenwände verstreut,

und zwar so, dass auf 4—5 oder 10 regelmässige Wandzellen ein einziger oder ein paariger Kern fällt (s. Fig. 3 *a*). Sie können aber auch dichter oder noch verstreuter stehen, so dass man diesbezüglich keine Regel geben kann. Man sieht sie aber auch in der Höhe der Wandschichte, d. h. im Verhältniss zu dem Lumen des Kanälchens in radiärer Richtung vorkommen, einmal unmittelbar ober den regelmässigen Wandzellen, meistens aber zwischen diese eingepresst, ein andersmal wieder unter diesen der Wand anliegend.

Auf jede der oben besprochenen regelmässigen Wandzellengruppen kommen ein oder zwei solche unregelmässige Kerne.

Nicht selten sind aber in diesen Gruppen die unregelmässigen Kerne, sowohl ihrer Grösse als dem Bau ihrer Substanz, sogar betreffs ihres Färbungsvermögens den Regelmässigen ganz ähnlich sowohl in Schnitt- wie in Zupfpräparaten. In Fig. 5 ist eine, den sieben regelmässigen Wandzellen sehr ähnliche unregelmässige Zelle sichtbar; dieselbe gleicht den übrigen Wandzellen so gut ihrer Färbung als Substanz, und dennoch sticht sie mit ihrem grösseren Kernkörperchen und eigener Gestalt von jenen ab. Hauptsächlich sind in den kleineren Wandzellengruppen unbestimmte Formen zu finden, deren regelmässiger oder unregelmässiger Charakter kaum zu erwägen ist.*

Die natürliche Reihenfolge würde jetzt die Beschreibung der Plasma-Verhältnisse der unregelmässigen Wandzellen fordern, das Eigentümliche derselben aber benötigt solche Abschweifungen,

---

* Die unregelmässige Form dieser Kerne (bei anderen Thieren) erwähnt unter sämmtlichen Autoren nur EBNER. «Die Grösse der Kerne lässt sich schwer angeben, weil sie von sehr mannigfachiger, häufig eckiger Form sind und im Vergleich zu anderen Präparaten nicht *selten wie gedrückt und künstlich deformirt erscheinen.*» Erklärung gibt er aber dafür nicht. [s. «Spermatogenese beiden Säugethieren» Arch. f. mik. Anst. 31.) Dagegen beschreibt HERMANN die Kerne beim Meerschweinchen [Beiträge zur Histologie des Hodens. Arch. f. mikr. Anat. 34.] mit typischer Form und mit beständigen Karakter, was unbedingt auf einer einseitigen Beobachtung basirt. Eine grosse Zahl der Kerne ist zwar entschieden tadellos, dabei aber findet man überall — wenn man nur nicht immer darauf achtet was durch seine Schönheit und Regelmässigkeit einem gefällt — eine bedeutende Menge unregelmässiger verunstalteter Kerne von den verschiedensten Formen.

welche mit den übrigen Verhältnissen der Samenkanälchen gemeinsam zu besprechen sind, diesbezüglich verweise ich auf die betreffende Stelle.

3) In Gesellschaft der regelmässigen und unregelmässigen Wandzellen befinden sich verstreut helle, einen unfärbbaren Kern besitzende Zellen, welche ich zwar beim Beginne meiner Untersuchungen bemerkte, ihnen aber keine besondere Bedeutung beilegte; solange wenigstens, bis mir nur ein-zwei vor die Augen kamen, habe ich sie einfach als dünnere Segmente der regelmässigen Wandzellen aufgefasst. Ich wurde aber sofort in vollem Maasse auf dieselben aufmerksam, als mein Chef, Herr Prof. v. MIHÁLKOVICS, der in dem Froschhoden in grosser Menge

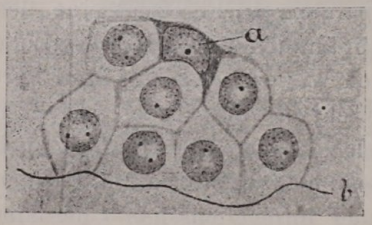



Fig. 5. Inmitten 7 regelmässige Wandzellen, eine, diesen noch sehr ähnliche, unregelmässige Wandzeile (*a*); *b* die Wand des Samenkanälchens. (Reich. hom. Imm.)

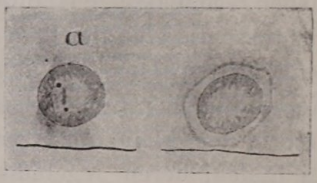



Fig. 6. Zwei, mit einer Vacuole versehene, achromatische Kerne. *b*) Bei *a* sind noch die beiden Kernkörperchen sichtbar.

zu Grunde gehende Zellen fand, meine Eidechsenhodenpräparate besichtigend, seine Meinung, dass die in Rede stehenden Zellen ebenfalls zu Grunde gehende Zellen wären, äusserte.

In Fig. 6 sind die betreffenden Kerne ersichtlich. Sie sind etwas grösser als die Kerne der regelmässigen Wandzellen und ihre besondere Eigenschaft ist, dass sie sich kaum oder gar nicht färben, deshalb entweichen sie leicht der Aufmersamkeit des Forschers, abgesehen von ihrer Seltenheit. Im Kerninnerem findet man gewöhnlich geringe Mengen eines unfärbbaren Gerüstes, das meistens die übrigens scharf abgegrenzte Oberfläche einnimmt, so dass der grösste Teil des Kernes leer zu sein scheint. Auf Grund dieser zwei charakteristischen Eigenschaften dachte ich sie

als achromatische, mit einer Vacuole versehene Kerne zu nennen. Im Inneren des Kernes sind manchmal auch Kernkörperchen zu finden, [s. Fig. 6 bei *a*], in welchen Falle sie ganz an die regelmässigen Wandzellenkerne erinnern und den übrigen gegenüber wie ausgeschwämmt erscheinen.

4) Unmittelbar an der Wand, in Gesellschaft der beschriebenen Zellen stellenweise eingeschaltet, findet man in Gruppen gewöhnlich nur wenige, 2—3—4, manchmal aber 8—10, karyomitotischen Zellenteilungen.

Bei der Anwendung gewöhnlicher Trockenobjektiven werden wir auf bald die Kante, bald die Oberfläche zeigenden Kernplatten aufmerksam, und zwar umsomehr, da dieselben von dem reinen bläschenförmigen Kernkörper scharf abstechen.

Bei der Benützung von Oel-Immersion erscheinen die Kernplatten, [Fig. 7 *a* und *b*] als abgerundete Vierecke, an jeder Seite mit je vier, ausserdem an jedem Eck mit je einer Chromosome [welche man der Form nach am treffendsten zu Bacillen mit abgerundeten Enden vergleichen kann]; so kommen auf die Peripherie des abgerundeten Viereckes gerade 20 Chromosomen, ausserdem auf das Innere der Platte 6—8, die aber weniger regelmässig gestaltet, und auch nicht absolut sicher abzählbar sind; im Ganzen 26 bis 28.

Von der Seite gesehen, macht die Kernplatte den Eindruck, als wären diese Chromosomen in die Peripherie der Kernplatte hineingesteckt wobei man nur ein Theil der Platte gut zur Anschauung bekommt. Das genaue Abzählen der Chromosomen ist nur von der Oberfläche aus möglich. Die Abzählung an Schnittpräparaten wird durch die an Zupfpräparaten vorgenommene bestätigt, in welchem Falle es ausgeschlossen ist dass durch den Schnitt ein Teil der Chromosomen verloren ging. Das Abzählen gab hier ganz dieselben Resultate, nämlich, dass man 20 an der Peripherie stehende gut abzählbare, und 6 bis 8 centralwärts liegende, weniger regelmässige findet.

Und wenn man jetzt noch die centralwärts gelegenen kleineren Chromosomen nur als Fragmente deren auffasst, wie sie auch wahrscheinlich nicht gleichwerthig mit jenen sind, dann ist die Zahl der Chromosomen nur zwischen zwei Extremen zu suchen: über 20 und unter 26—28. Es liegt daher kein Grund vor, warum

die bei anderen Tieren als typisch nachgewiesene Zahl 24 zurückzuweisen. Wollen wir aber in diesem Falle sehr gewissenhaft vorgehen, dann können wir es als Tatsache aussprechen, dass die Zahl der Chromosomen bei den Teilungen der wandständigen Zellen des Eidechsenhodens gewiss über 20, keinesfalls aber über 28 steht.

Der Diaster ist seltener zu finden, in solchem Falle erscheinen die Chromosomen als zwei einander gegenüber stehende, regenschirmähnliche Gebilde. In den Tochterkernen ist die Abzählung der Chromosomen schwieriger; beiläufig sind 13—15 wohl abzählbar, aber die an der Oberfläche des Regenschirmes liegenden scheinen mehr Fragmente als vollständige Chromosomen zu sein. Von den Töchterkernen kann man behaupten, dass die Zahl ihrer

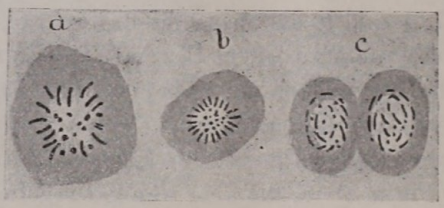



Fig. 7. Teilungsbilder der regelmässigen Wandzellen *a*, *c* aus Schnittpräparaten, *b* aus einem Zupfpräparate. (Reich. hom. Imm.)

Chromosomen gewiss über 10 steigt, sich aber nicht höher als 14—15 stellt. Und wenn man hier wie früher, die, den Fragmenten entsprechende Zahl abrechnet, dann kann man ihre Zahl auf 12, also auf die Hälfte der in den Mutterkernen gefundenen feststellen.

Noch seltener ist das vor dem Mutterstern stehende Stadium aufzufinden bei welchem sämmtliche Chromosomen auf der Oberfläche des Kernes verstreut sind. [Fig. 7 *c*]. In diesem Stadium erscheinen schon sämmtliche Chromosomen deutlich gesondert, so dass sie hier schon beiläufig abzählbar sind, die Anordnung aber und die Krümmungen der Chromosomen erinert noch an das Knäuel-Stadium. Die Zahl der Chromosomen ist auch hier über 20 zu stellen.

Bei den soeben beschriebenen, und in ihren drei Hauptstadien geschilderten karyomitotischen Zellenteilungen ist besonders

hervorzuheben, dass dieselben nicht weniger typische Gestalten der Wandschichte bilden, wie die übrigen in dieser Schicht befindlichen und bereits besprochenen Elemente; dieselben sind auch nur ausschliesslich in der Wandschichte aufzufinden, nach dem Lumen zu kommen sie nie vor, was desswegen zu betonen ist, dass man diese Theilungsarten mit den in den Samenkanälchen vorkommenden häufigeren anderer Arten nicht verwechsle.

5) *Ausser den bisher geschilderten Elementen, können unmittelbar an der Wand alle beliebigen, in den Samenkanälchen anwesenden Elemente vorkommen;* Knäuelkernzellen, kleine Hodenzellen, Samenfäden, verschiedene Theilungsarten, mit einem Wort: sämmtliche Entwickelungstadien der Samenfäden. Dennoch ist es klar, dass wenn man überhaupt von einer Wandschichte spricht man darunter allein die bisher beschriebenen Elemente versteht, und zwar darum, weil 1. diese Elemente immer und ausschliesslich nur neben den Wänden zum Vorscheine kommen, sie vermischen sich nie mit anderen nach dem Lumen zu stehenden Schichten; 2. weil vice versa der gewöhnliche Erscheinungsort der übrigen Elemente — wenn sie auch manchmal neben der Wand erscheinen — nicht hier, sondern ober der Wandschichte, in den, nach dem Lumen zu liegenden, inneren Schichten ist.

Endlich müssen wir während der Beschreibung unserer Untersuchungsbefunde, noch eines, für den ersten Anblick ganz abgesondert stehenden Gebildes gedenken. In dem Eidechsenhoden-Kanälchen findet man verstreut manchmal erstaunlich grosse, häufig schon mit der Loupe als kleine Punkte bemerkbare Elemente. Die, manchmal 0·1 mm. Grösse erreichende Gebilde, welche man in Serien-Schnitten in 10 bis 20 Stücke geschnitten trifft, bieten ein sehr verschiedenes Bild dar. Meistens besitzen sie mehr Kerne, welche, entsprechend dem ganzen Gebilde, gross sind, ihr Durchmesser beträgt 15—20 $\mu$, und darüber. Die auffallendste Eigenschaft der Kerne ist ihre Unregelmässigkeit, sie besitzen bald scharfe Contouren, bald erscheinen sie ganz verschwommen. Sie färben sich meistens diffus und trübe; ihre Kernkörperchen zeigen gar keine Regel.

Das sie umhüllende Plasma ist ebenfalls sehr seltsam und verschieden, so z. B. hat sich in Fig. 8 der grösste Teil des Plasma

in ein bläschenförmiges Gebilde verwandelt, das die Kerne an eine Seite verschob. Das Innere des Bläschens erscheint an Schnittpräparaten mit wenig, ein Netz bildende farblose Substanz gefüllt, an der Peripherie einige scharf gefärbte Körnchen enthaltend.

Diese Riesenelemente finden wir einzeln verstreut, von den übrigen Elementen regellos umrungen, oder ganz freistehend im Lumen; folglich könnte man sie auf Grund ihrer Eigenart und ihres Erscheinungsortes in keine der Samenkanälchen-Schichten einreihen. Dennoch sprechen wichtige Gründe dafür, dass man sie mit der Wandschichte gemeinsam abhandelt, denn wenn wir uns an die übrigen Schichten erinnern, an die der Knäuelkernzellen, kleine Samenzellen, Samenfäden, werden wir es bald einsehen, dass diese Riesenzellen von all diesen ganz verschieden sind, mit diesen nicht den geringsten gemeinsamen Charakterzug besitzen, zum Gegenteil aber fanden wir unter den Elementen der Wandschichte eine Zellenart, nämlich die unregelmässigen Wandzellen, mit welchen sie doch in Zusammenhang gebracht werden können.

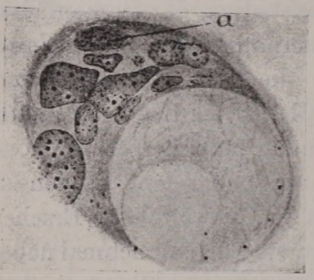



Fig. 8. Riesenzelle (im Verhältniss zu den übrigen Figuren bedeutend verkleinert) in der einen Hälfte mit mehr Kernen, in der anderen ein Plasenartiges Gebilde, die Kontouren des bei *a* sichtbaren Kernes sind verschwommen.

Soviel nur als Begründung dafür, dass wir diese Riesengebilde hier beschreiben; das Vergleichen der Elemente wollen wir später vornehmen.

## Zusammenfassung.

1. Unmittelbar an der Wand des Eidechsenhodenkanälchens sind sämmtliche darin vorkommende Elemente aufzufinden.

2. Die regelmässigen und unregelmässigen Wandzellen kommen ausschliesslich nur neben der Wand vor, die übrigen Elemente findet man hier nur ausnahmsweise, ihr gewöhnlicher

Fundort ist oben den regelmässigen und unregelmässigen Wandzellen nach dem Lumen zu.

3. Der Kern der *regelmässigen* Wandzellen ist kugelrund oder schwach oval, enthält gewöhnlich zwei Kernkörperchen; der mit Farbstoffen behandelte Kern zeigt eine gekörnte Grundsubstanz, in welcher zwischen den zwei Kernkörperchen, ein chromatinfreies Fleckchen sich befindet. Den Kern umringt das in mässiger Menge vorhandene Plasma in vier- oder fünfeckiger Form, worin mit der beschriebenen Kupfer- und Hæmatoxylin-Färbung ein sich schwarz färbender Nebenkern zum Vorschein kommt.

4. Der Kern der *unregelmässigen* Wandzellen ist gewöhnlich grösser als der der vorigen, seine Form ist äusserst verschieden und schmiegt sich den nachbarlichen Elementen auffallend an. Sie färben sich meistens schwach; wo sie aber intensiver gefärbt sind, sticht diese Färbung durch ihren eigentümlich diffusen Charakter von der gewohnten Chromatinfärbung ganz ab. Die Zahl der Kernkörperchen ist ein oder zwei, kann aber auch mehr sein. Auffallend oft findet man bald langgestreckte, bald doppelte Kernkörperchen enthaltende, dann wieder Einschnürungen aufweisende oder dicht nebeneinander stehende paarige, unregelmässige Wandzellenkerne.

Die Contouren der unregelmässigen Wandzellenkerne sind oft ganz verschwommen. (Ueber ihr Plasma später.)

5. In Gesellschaft der regelmässigen und unregelmässigen Wandzellen findet man verstreut eine den regelmässigen nahestehende Zelle, deren Kern sich schwach oder gar nicht färbt, und deren Inneres leer zu sein scheint, weshalb ich sie als achromatische Zellen charakterisire.

6. In dieses Kapitel nahmen wir die in den Eidechsenhodenkanälchen befindlichen 50—60 $\mu$ langen Durchmesser besitzenden Riesengebilde auf, da ihr Charakter mit den unregelmässigen Wandzellen viel Gemeinsames hat.

7. Schliesslich begegneten wir neben der Wand gruppenweise gewöhnlich nur wenige, 3—4 verschiedene Stadien einer gewissen Art der mitotischen Zellenteilung, in welcher die Zahl der bacillenähnlichen Chromosomen mit grösster Wahrscheinlichkeit in dem Mutterkern 24, in den Töchterkernen 12 beträgt;

diese Teilungsart findet man nur neben der Wand welche von den übrigen Teilungsarten in den Samenkanälchen zu sondern sind, deren Abhandlung wegen ihren verschiedenen Fundort nicht hierher gehört.

## Folgerungen.

Wollen wir nun zur Analyse der soeben beschriebenen Tatsachen in mitten der mannigfaltigen Elemente der Wandschichte schreiten, so müssen wir erstens die bei der Wand vorkommende Knäuelkernzellen, die kleinen Samenzellen und die Samenfäden von dieser Schichte sondern, und zwar deshalb, weil 1) diese Elemente neben der Wand nur spärlich und ausnahmsweise zu treffen sind; 2) weil ihr gewöhnlicher Ort ober der Wandschichte sich befindet. Vielmehr interessirt es uns, wie diese Elemente dennoch ausnahmsweise in die Wandschichte geraten, was man zweierlei beantworten kann: entweder entstanden sie an Ort und Stelle, in welchem Falle sie ihren Platz nicht verliessen, oder sie wurden von ihrem gewöhnlichen Fundort auf irgendwelcher Weise nach der Wand zu verschoben. Die Beantwortung dieser Frage steht aber in engem Zusammenhang mit den Spermatoblasten einerseits, und mit dem, während der Entwickelung der Elemente geschehenen Ortwechsel anderseits; demnach müssen wir auf jenes Capitel verweisen, in welchem der Ortwechsel sämmtlicher Elementen gemeinsam beschrieben wird.

Es bleiben noch die regelmässigen und unregelmässigen Wandzellen, die mit einer Vacuole versehenen achromatischen Zellen, und die beschriebenen mitotischen Teilungen übrig, welche im Gegenteil zu sämmtlichen übrigen Elementen ausschliesslich nur neben der Wand vorkommen; demnach sind nur diese die eigentlichen Elemente dieser Schichte und den Ausgangspunkt der Samenfädenentwickelung müssen wir nur unter dieser suchen.

Für die Samenfädenentwickelung als einem Processe, haben wir zwei Beweise: 1. die Anordnungsverhältnisse der Elemente zu einander, 2. die Uebergangsstadien. Darauf beruhen unsere Folgerungen.

Die Anordnungsverhältnisse der Elemente zu einander waren genügend gewürdigt, und daraus, dass dieselben so be-

ständig und gesetzmässig die gemeinsamen Bestandteile der Zellengruppen ein und derselben Schichte bilden, kann man schon vermuthen, dass diese Elemente *alle streng zusammengehören.*

1) Das häufigst vorkommende und wegen ihrer Regelmässigkeit typischeste Element dieser Gruppen ist die *regelmässige Wandzelle,* deshalb müssen wir von dieser ausgehen.

Wir fanden Wandzellengruppen, die aus kleineren an Chromatin ärmeren, andere welche aus grösseren chromatinreicheren Kern enthaltenden regelmässigen Wandzellen bestanden; diese kleineren und grösseren sehen übrigens gleich aus, es liegt kein Grund vor, warum wir daran zweifeln, dass man in diesen Unterschieden das Wachstum der Zellen, und die Vermehrung des Kernchromatins sehen sollen und dass die mitotischen Teilungen der Wandschichte sich in diesen Zellen abspielen. Zur Herleitung der mitotischen Teilungen kann man an die achromatischen Zellen nicht einmal denken, nicht nur dass sie chromatinarm oder ganz chromatinfrei sind, auch weil das innere des Kernes meistens einen Substanzverlust aufweist. Die unregelmässigen Wandzellen sind schon gar nicht mit den Teilungen in Zusammenhang zu bringen, erstens weil in ihnen das Chromatin ebenfalls vermindert ist, zweitens weil sie ihrer Grösse, folglich ihrem Wachstum entsprechend noch viel unregelmässiger aussehen, was mit den Vorbereitungen zu den mitotischen Teilungen nicht im Einklang steht; drittens, weil wie es nachgewiesen wird, ihre Kerne teilen sich auf amitotischem Wege.

Nachdem in diesen zwei Zellenarten die mitotischen Teilungen nicht vorkommen können, kommt man auch durch Ausschliessung auf jenes Resultat, dass diese in den regelmässigen Wandzellen vorgehen.

Die Antwort darauf: woher die mitotischen Teilungen abstammen ist bereits gegeben; die nächstliegende Frage, was wieder aus diesen Teilungen entsteht wird durch die einzelnen Autoren sehr oberflächlich behandelt, sie behaupten ganz einfach, dass die Wandzellen Wandzellen erzeugen, oder aber noch allgemeiner, dass durch diese Teilungen, die nächstfolgende zweite Schichte erzeugt wird, ohne den Übergang näher zu precisiren. So wahrscheinlich und natürlich auch diese Meinungen sein mögen, ist das

eingehendere Begründen derselben dennoch ziemlich schwer, denn in den die Teilungen unmittelbar folgenden Stadien kommen die Uebergangsbilder — wahrscheinlich wegen des raschen Verlaufes derselben — kaum zur Beobachtung.

Zur rascheren Orientirung stellen wir die Frage, was könnte überhaupt aus diesen Teilungen entstehen? Es sind nur zwei in Möglichkeiten denkbar: 1) dass die der Teilung unterworfene Wandzellen sich unmittelbar in Elemente der zweiten Schichte: in Knäuelkernzellen umwandeln, ohne Einschaltung eines Ruhestandes, 2) dass sie sich früher — wie gewöhnlich nach den Teilungen — der Ruhe begeben, und diese erst werden zu Elemente der zweiten Schichte.

Betrachten wir nun was für die eine, und was für die andere Möglichkeit spricht?

Dem, der Samenkanälchen je gesehen hat, sind gewiss jene sich scharf färbende und äusserst unregelmässig aussehende Kerne aufgefallen, in *welchen das Chromatin meistens an einer Seite versammelt erscheint*, aus welcher oft einzelne Chromatinfäden stachelähnlich herausstehen. Bezüglich ihres Fundortes bilden diese Kerne die zwischen den Wand- und Knäuelkernzellen liegende Schichte: repräsentiren folglich unbedingt irgendwelches Uebergangsstadium von diesen zu jenen. Wenn ich jetzt noch daran erinnere, dass die jungen Töchterkerne der sich soeben geteilten Wandzellen ihr Chromatin gleich diesen ebenfalls an einer Seite enthalten, so kommt man auf den Gedanken, dass die den Teilungsprocess soeben durchgemachten Wandzellen, vermittelst jener stachelkernigen Zellen ohne Einschaltung eines Ruhestandes, sich direct in Knäuelkernzellen verwandeln.*

---

* Von diesen Zellen, in deren Kernen das Chromatin auf die Seite geschoben ist, steht es nun fest, dass sie in dieser Gestalt Kunstprodukte sind. Interessant ist es aber, dass diese Erscheinung für ein gewisses Stadium sehr charakteristisch ist; wenn auch die übrigen Zellen alle vortrefflich fixirt sind, erscheinen diese Kerne so auffallend verunstaltet, dass sie gleich in's Auge stechen. Wahrscheinlich ist in diesem Stadium das Chromatin in einem weniger widerstandsfähigem Zustande gegen die Härtungsflüssigkeiten. Übrigens repræsentiren sie ein Übergangstadium von den regelmästigen Wannzellen zu den Knäuelkernzellen.

Zum Glück sind meiner Aufmerksamkeit jene regelmässigen Wandzellen nicht entgangen, deren Chromatin in so feinen Körnchen verteilt ist, dass sie auch bei Anwendung von homogener Immersion nur den Eindruck machen, als ob sie mit feinsten Staubkörnchen bestreut wären; wenn ich jetzt noch zusetze, dass diese Zellen unmittelbar ober den gewöhnlichen Wandzellen zu finden sind, kann man sie für die Abkömmlinge der Theilungen der reg. Wandzellen halten. Nach diesem stammen aus den reg. Zellen wieder nur reg. Zellen, die nur durch die feine Vertheilung des Chromatins von ihre Mutterzellen verschieden sind.

Gedenken wir noch daran, dass man auch Uebergangsbilder von diesen mit feinverteiltem Chromatin versehenen Kernen bis zu den Knäuelkernzellen gewinnt, muss man die zweite Möglichkeit annehmen, nach welcher die Knäuelkernzellen aus diesen, feinverteiltes Chromatin enthaltenden Zellen entstehen.

2) Ueber das Herkommen und die Bedeutung der Zellen mit einem achromatischen Kerne kann man, gestützt auf die Untersuchungs-Befunde ziemlich rasch in's Klare kommen. Da ihre Form, ihr Aussehen fast ganz der Form und dem Aussehen der r. Wandzellen gleicht, ist kein Grund daran zu zweifeln, dass sie selbst nichts anderes, als regelmässige Wandzellen sind. Anderseits wieder ist 1) die unvollkommene oder gänzlich fehlende Färbung, 2) das Verschwinden des Kerngerüstes, später der Kernkörperchen nicht anders zu erklären, als dass dieselben degenerirende Zellen sind. Daraus folgt, dass die regelmässigen Wandzellen hie und da in Gestalt dieser achromatischen Zellen zu Grunde gehen.

3) Für die Beobachtungen und Folgerungen schliessen ein viel weitverbreitetes Gebiet die *unregelmässigen Wandzellen* auf. Auch hier sind es hauptsächlich zwei Fragen, die uns interessiren: woher sie stammen und was aus ihnen wird. In diesem Kapitel wird ebenfalls nur von den Kernen die Rede sein, von denen wir zur Erreichung unseres Zieles die wichtigsten Tatsachen in Folgendem zusammenfassen.

I. Häufig sind die Kerne von einer sehr unregelmässigen Form.

II. Im Allgemeinen sind sie chromatinarm, eigentlich färben sie sich schwach, wodurch die intensiv gefärbte Kernkörperchen scharf hervortreten. Wohl sieht man gelegentlich einzelne sich intensiver gefärbte unregelmässige Kerne, aber diese dunkle Färbung ist von der gewohnten Chromatinfärbung ganz verschieden, sie werden durch Safranin mehr-weniger diffuse, trüb gefärbt.

III. Die *directe Teilungsart* der unregelmässigen Wandkerne muss ich auf Grund sämmtliche Uebergangsstadien aufweisender Befunde unbedingt behaupten. Die langgestreckten, stäbchenähnliche Kernkörperchen, die paarigen regelmässig angeordneten, die Einschnürungen aufweisenden Kerne, schliesslich jener für sich allein schon auffallender Umstand, dass sie häufig paarig vorkommen, zwingen uns zur Annahme der directen Teilungsart.

IV. Die Grenze der unregelmässigen Wandzellenkerne verliert sich in einzelnen Fällen derart zwischen den nachbarlichen Zellen, dass wir in denselben ohne den intensiv gefärbten Kernkörperchen den Zellenkern gar nicht erkennen würden; in diesem Stadium kommt auch die erwähnte diffuse trübe Färbung zur Beobachtung.

V. Diese Kerne enthalten manchmal viele Kernkörperchen ein andersmal findet man in ihrem Innern gerinnselartige Gebilde.

Man kann sich nicht wundern, wenn diese für den ersten Anblick so mannigfaltige und jeglichen Zusammenhang vermissende Bilder zu solch' verschiedenen Annahmen und Erklärungsversuchen anregten. Wir wollen dahin streben, alldiese Erscheinungen auf eine gemeinsame Grundlage zurückzuführen.

An den unregelmässigen Wandkernen fesselte meine Aufmerksamkeit schon von vornherein ihre directe Teilungsart. In den Eidechsenhoden kommen diese Teilungen in solcher Menge vor, dass ich im Anfang geneigt war, ihnen eine reproductive Bedeutung zumuten. Heute aber, mit dem Gedanken eines degenerativen Processes schon befreundet, kam ich zur Ueberzeugung, dass wir es eigentlich auch hier mit einem degenerativen Processe zu tun haben. Die Aerme an Chromatin, die directe Teilung für sich selbst schon, besonders aber das Verschwinden der Zellencontouren sprechen alle und unbedingt für den degenerativen Process.

Ausser diesem sind auch die übrigen Ergebnisse, alle mit der degenerativen Erklärung des Processes im Einklang; das ausserordentlich unregelmässige Aussehen der Kerne ist nur eine Folge jenes Einflusses, welchen die nachbarlichen wachsenden und sich vermehrenden Zellen ausüben, welche in die durch die Degeneration ihre Widerstandsfähigkeit verlorene Zellen von allen Seiten eindringen, und dieselben vielfach comprimiren; die im Inneren des Kernes wahrnehmbare, sich nicht färbende Flecke sind ebenfalls Symptome der im Inneren des Kernes aufgetretener Degeneration; endlich sind noch die unter dem Einflusse der nachbarlichen Zellen sehr unregelmässig gewordene Kernkontouren, und deren stufenweise fortschreitendes Verschwinden vorhanden, was schon an und für sich darauf deutet, dass die unregelmässigen Wandkernen in Degeneration begriffene Gebilde sind.

Nachdem man die Sertolischen Zellen trotz ihres fortwährenden Zugrundegehens in den Samenkanälchen zu jeder Zeit auffindet, müssen sie irgendwelche beständige Herkunftsquelle haben.

Die zweite Hauptfrage ist also: woher sie stammen? Diesbezüglich mache ich auf Fig. 5 aufmerksam, woselbst acht junge Wandzellen sichtbar sind; eine derselben ist aber für den ersten Anblick als unregelmässig erkennbar. Ihre weiteren Eigenschaften sind von denen der übrigen Zellen kaum verschieden, ihr Chromatininhalt, ihre Grösse stimmt mit denen der anderen Zellen überein, die unregelmässigen Contouren ihres Kernes aber, ihr grösseres ungeteiltes Kernkörperchen macht sie von jenen verschieden, so dass wir in dieser Zelle ein Element fanden, welches teilweise die Eigenschaften der regelmässigen, teilweise die der unregelmässigen in sich vereinigt. Solche mehr-weniger den regelmässigen Wandzellen ähnliche unregelmässige Zellen findet man hauptsächlich in den jüngere Zellen enthaltenden Wandgruppen. Diese Bilder veranlassten uns zur Annahme, dass die *unregelmässigen Wandzellen von den regelmässigen abstammen.*

4) Endlich wenn man die an den unregelmässigen Wandzellen beobachteten Erscheinungen mit jenem *Riesengebilde* vergleicht, [s. Fig. 8], kommt man zu dem Resultate, dass dieselben zu einander in gewissen Beziehungen stehen.

Man hat es auch hier mit groben unregelmässigen Kernen zu tun, welche mit zahlreichen Kernkörperchen versehen sind, wie man solche auch in den unregelmässigen Wandzellen fand; auch hier hat ein Teil der Kerne eine ziemlich scharfe Kontour, bei anderen aber sind dieselben auch ganz verschwommen. Ueberraschend wirkt nur die grosse Zahl der Kerne, anderseits wieder ihre beträchtliche Grösse, was aber im Wesentlichen an der Sache nichts ändert; diese Elemente müssen wir als grossgewachsene und sich vielfach fragmentirte unregelmässige Wandzellen auffassen. Wenn man aber bedenkt, welch' mannigfachige Form die unregelmässigen Wandzellen besitzen, und von welchem unbestimmbaren Aussehen sie sind, dann steht dieser Auffassung, nichts im Wege, umsomehr, denn wenn man diese nicht annimmt, könnten die Riesenzellen mit keinem anderen in den Samenkanälchen vorhandenen Element in Zusammenhang gebracht werden.

Demnach muss man die Riesenzellen von dem Wachstum, und von der Kernfragmertirung, der unregelmässigen Wandzellen abkommen lassen. Diesen kolossalen Elementen kann man schon ihrem Aussehen nach keine besondere Bedeutung beilegen, wir können von ihnen nichts anderes denken, als dass sie schliesslich doch zu Grunde gehen; dafür stehen uns ganz dieselben Beweise zu Diensten, wie bei den unregelmässigen Wandzellen; die Kernfragmentirungen, das Verschwommensein der Kerngrenzen, dessen gänzliche Confluiren mit der Umgebung: zwingen auch hier zur Annahme des degenerativen Processes.

Die Folgerungen fasse ich in Folgendem zusammen:

I. Ein und dieselben Entwickelungsstadien der regelmässigen Wandzellen bilden Gruppen, in welchen eine oder zwei unregelmässige Wandzellen sich befinden, gelegentlich auch eine achromatische Zelle.

II. Die achromatischen, sowie die unregelmässigen Wandzellen stammen von den regelmässigen Wandzellen ab.

III. Die Kerne der unregelmässigen Wandzellen teilen sich direct.

IV. Die Riesenzellen entstehen aus den Unregelmässigen.

V. Die achromatischen Zellen, ferner die Riesenzellen und die unregelmässigen Wandzellen gehen alle zu Grunde.

VI. Die regelmässigen Wandzellen teilen sich durch Karyomitose, wodurch sie ihnen ähnliche Zellen erzeugen.

Wenn man sämmtliche in diesem Kapitel beschriebenen Ereignisse zusammenfasst, kann man sie in zwei Hauptgruppen einreihen: erstens fanden wir regenerative, dann degenerative Processe.

Die regenerativen standen mit den regelmässigen Wandzellen, die degenerativen mit den übrigen Zellenarten in Zusammenhang.

*Nach alldem besteht in der äussersten Schichte des Samenkanälchen-Epithels ein mit der fortwährenden Zellenbildung parallel stehender degenerativer Process.*

Nachdem die Karyomitose der regelmässigen Wandzellen, allein den regenerativen Process an der Wand des Samenkanälchens repräsentirt, muss der Ausgangspunkt der Samenfädenentwickelung in diesen wurzeln; nun wurde aber gezeigt, dass dieser regenerative Process nicht nur das Entstehen einer neuen Zellenschichte veranlasst, sondern dass auch sämmtliche später zu Grunde gehende Elemente des Samenkanälchens von diesem entspringen.

Auf Grund der bisherigen Beobachtungen kann man den Process kurz folgendermaassen charakterisiren: In unmittelbarer Nähe der Wand begeben sich einige regelmässige Wandzellen der Teilung, wodurch die Wandzellengruppen entstehen, welche den regelmässigen Wandzellen ähnliche junge Zellen enthalten. In diesen Wandzellengruppen gehen einzelne Elemente in Form von unregelmässiger, oder achromatischen Zellen zu Grunde; die Mehrzahl verwandelt sich aber zur Bildung einer neuen Schichte (zur Schichte der Knäuelkernzellen).

Dieser von mir festgestellter Process könnte nach den verschiedenen Nomenclaturen folgend lauten: die Spermatogonien (regelmässige Wandzellen, Samenkeimzellen, Samenstammzellen etc.) teilen sich durch Karyomitose, wodurch die Zellengruppen (Spermatocysta) entstehen. Dieselben bildende junge Spermatocyten sind im Anfang den Spermatogonien, durch welche sie

entstanden, ganz ähnlich. Diese Zellen erleiden nach drei Richtungen Veränderungen, 1) ein Teil derselben geht zu Grunde in Form von unregelmässigen Wandzellen (cellule ramificate SERTOLI, Stützzellen, Fussplatten der Spermatoblasten, sternförmige Zellen, Tragzellen, Randzellen etc.) oder 2) in Form von achromatischen Zellen, der grösste Teil aber 3) dient zur Bildung der Knäuelkernzellen (Mutterzellen, Samenmutterzellen, Samenknäuelzellen Stermatocyten).

Im Sinne der gewohnten Beschreibungen sämmtlicher Autoren hätten die aus den Teilungen entstandenen jungen Zellen noch eine Aufgabe zu erledigen: nämlich einige blieben zurück, um dann den Ausgangspunkt neuerer Generationen zu bilden. Diese Behauptung ist aber nur eine hypothetische, objektiv nicht nachgewiesene Annahme, welche zur Erklärung der langdauernden und ununterbrochenen Samenfädenentwickelung erdacht wurde; wer könnte es denn je nachweisen, dass wenn er z. B. an der Wand zwei Spermatogonien findet, ob dieselben aus dem Urepitel des Hodens, oder aus deren Teilungen entstandenen jungen Spermatocyten zurückblieben?

Es könnte ja am Ende möglich sein, aber diese Annahme finde ich nicht nur überflüssig sondern auch mit den Tatsachen unvereinigbar. Genügend auffallend ist ja schon jener Umstand, dass man häufig an weiter Strecke kein einziges Spermatogon trifft; wenn aber solche immer von jeder Generation zurückbleiben, wie wäre ihr Fehlen zu erklären? Die Spermatogonien halte ich vielmehr für einen solchen Vorrat, der endlich einmal ausgeht und damit erlischt die Samenfädenentwickelung; im Sinne der vorigen Annahme könnte ein Samenkanälchen wahrhaft ewig funktioniren, es wäre kein Grund vorhanden zur Verminderung der Samenfädenentwickelung, was einmal endlich doch geschieht. Anderseits aber, wenn die Spermatogonien sich in einem Kanälchen fortwährend erneuern würden, wozu hätte die Natur einer solchen Unmasse der Samenkanälchen gesorgt, wenn nicht darum, dass genügender Vorrat in den sonst nicht ersetzbaren Elementen vorhanden sei.

Nach dem ist die Sache so aufzufassen, dass die in den Samenkanälchen ursprünglich in grosser Menge vorhandenen und dicht

stehenden Spermatogonien in gewissen Distanzen abwechselnd zum Zwecke der Samenfädenbildung, sich zur Teilung begeben [was mit den Thatsachen genau stimmt]; zwischen den in Teilung begriffenen Zellen verweilen die übrigen solange in Ruhe, bis bei Bildung der nächsten Generation wieder einzelne sich in gewissen Distanzen zur Teilung ausscheiden; so nimmt ihre Zahl im Querschnitte eines Kanälchens langsam zwar, aber beständig ab.

## Die Ebner'schen Spermatoblasten.

Dieses Kapitel verdankt seine Entstehung allein der Ebner-schen Spermatoblastenfrage; wären diese Gebilde nicht von beachtenswerten Autoren untersucht, gründlich und objektiv beschrieben und die verschiedensten Ansichten darüber geäussert so hätten die in diesem Kapitel befindlichen Dinge, nur in den übrigen verstreut ihren Platz gefunden; aber eben der Umstand, dass man in den Ebner'schen Spermatoblasten, trotzdem sie gründlich studiert wurden, noch immer sehr unbestimmten Gebilden gegenüber steht, hat mich umsomehr angeregt ihnen meine volle Aufmerksamkeit zu schenken.

In den Eidechsenhodenkanälchen *sind sehr selten ohne jegliche Ordnung und Regel verstreut* die in Fig. 9, 10, widergegebene oder ähnliche Gebilde zu finden, bei welchen in erster Reihe die ausserordentlich unregelmässigen und unbestimmten Contouren auffalen; ihre Basis verbreitet sich an der Wand, woselbst sie unter den Wandzellen sich verschmälernd ohne Grenze verschwindet. Ihr Leib dringt mit seinen Ausläufern zwischen den sie umringenden Elemente — zwischen die Knäuelkernzellen, kleine Samenzellen — *deren Ende oder Grenze nirgends nachweisbar ist*, weil sie zwischen den Zellen ein Intercellulär-Netz bildend, verschwinden. Das sind jene Gebilde, mit deren nach dem Lumen zu gerichteten Spitze in Zusammenhang man auch Samenfädenbüschel findet und zwar derweise, dass dieselben mit jenen gänzlich confluiren; in der wandanliegenden Basis derselben findet man für gewöhnlich ein oder zwei unregelmässige (Sertoli'sche) Kerne.

Diese kurz geschilderten Gebilden sind mit den Ebner'schen Spermatoblasten homolog; wenn man diese in dem Eidechsenhoden ohnehin nur verstreut vorkommenden Gebilden nicht als Ebner'sche Spermatoblasten anerkennen würde, dann müssten wir ihr Vorhandensein in den Eidechsenhodenkanälchen überhaupt leugnen. Auf Grund der besprochenen Eigenschaften sind in diesen Ge-

Fig. 9. Den Ebner'schen Spermatoblasten entsprechendes Gebilde in dem Eidechsenhoden, bei *a* steht die Intercellularmasse mit Samenfäden in Zusammenhang. (Flemming Gentiana Violett. Wegen Vereinfachung wurden bei den angrenzenden Zellen nur die Contouren gegeben. (Reich. hom. Imm.)

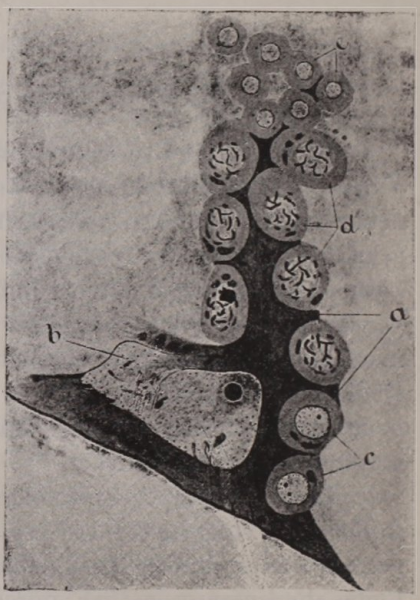



Fig. 10. Mit den Spermatoblasten homologes Gebilde. Die mit Cupr. Sulf. und Alk. Hæm. dunkel gefärbte Masse (*a*) besitzt an ihrer Basis einen unregelmässigen Wandkern (*b*), ihre Spitze verliert sich deutlich sichtbar zwischen den Spermatiden (*e*). *c* Spermatogonien, *d* Spermatocyten mit ebenfalls dunkelgefärbtem Nebenkerne. (Reich. hom. Imm.)

bilden tatsächlich die Spermatoblasten anzuerkennen, weshalb ich dieselben einer eingehenderen Untersuchung unterzog.

Bei den Spermatoblasten ist vor allem auf die Plasmagrenzen und Berührungsverhältnisse der Zellen zu achten, das ist auch der

Grund, dass wir die Plasmagrenzen der unregelmässigen Wandzellen, und die Berührungsverhältnisse der übrigen Elemente in diesem Kapitel gemeinschaftlich abhandeln.

1. Frisch isolirte Präparate. Wir haben die Eigenschaft der Samenkanälchen, dass sie sehr leicht in ihre Elemente zerfallen, bereits betont. Wenn man die Kanälchen mit der Nadel einigemal gehörig abstreift, zerfliesst deren Inhalt rahmartig, in welchem die einzelne Elemente isolirt herumfliessen. Bis man einerseits auf dieser Weise Zellen gut isolirt trifft, fesseln anderseits unsere Aufmerksamkeit die in diesen Präparaten befindlichen Riesengebilde, welche als mehrkernige Cysten erscheinen. Diese mehrkernigen Gebilde sind sowohl mit Zugabe von Kochsalzlösung als mit Essigsäure nachweisbar. Die Cysten können Knäuelkerne oder kleine Samenzellenkerne enthalten 12—15 auf einmal, im engsten Sinne des Wortes durch einer gemeinsamen Plasmaschicht umrungen.

2. An isolirten und fixirten Präparaten sind die Zellengrenzen äusserst fein, zwischen ihnen sieht man eine sich mit Hæmatoxylin schön färbende feine netz- oder fädchenartige Substanz, welche sich entweder zwischen den Zellen verbreitet, oder von einer Zelle oder Zellengruppe zur anderen in Streifen zieht.

3. Die wertvollsten Befunde gewinnt man an Schnittpräparaten. In diesen bemerkt man eine zwischen sämmtlichen Elementen des Samenkanälchens, wenn auch nicht in beständig gleicher Menge vorhandene, stellenweise aber auffallend gut nachweisbare Netzwerk bildende Substanz. Dieselbe kann man sowohl zwischen den Wand- als zwischen den Knäuelkern- und kleinen Samenzellen nachweisen.

Fig. 11. Die Intercellularsubstanz ist bei *b* zwischen den Spermatiden, bei *c* freiliegend sichtbar. (Reich. hom. Imm.

In Fig. 11 erscheinen nicht nur die Zellcontouren und die zwischen diesen befindlichen dunklen Streifen gut, sondern man sieht diese Streifen einerseits ganz frei stehen (*c*), die nachbarlichen Zellen verlassend, zum Beweise, dass man es hier tatsächlich mit einer selbstständigen Substanz zu tun hat.

Die Intercellularsubstanz erscheint nach der Wand zu ge-

wöhnlich in grösseren Mengen, welche sozusagen den Ausgangspunkt derselben bilden. (S. Fig. 2.)

*Diese zwischen sämmtlichen Elementen des Samenkanälchens vorhandene, ein intercellulares Netzwerk bildende Substanz kann man von den, die unregelmässigen Wandzellen in sich schliessendn mit den Spermatoblasten homologen Gebilden, nirgends unterscheiden,* sie stehen in continuirlichem Zusammenhang, derart, dass auf diese Weise der Körper der oben beschriebenen Spermatoblasten wahrlich als Intercellularsubstanz erscheint.

Bis die Basis der Spermatoblasten neben der Wand unter den Wandzellen sich verliert, dringen die Ausläufer ihrer Körper überall zwischen den nachbarlichen Elementen, für welche sie als Nest dienen, wodurch ihre Oberfläche ein ausserordentlich unregelmässiges gehöhltes Aussehen gewinnt. (S. Fig. 9 u. 10.) Besonders aber machen wir auf Fig. 10 aufmerksam, wo man die Spitze dieses Gebildes bis in das zwischen den kleinen Samenzellen befindliche Netzwerk verfolgen kann.

Es ist also einerseits festzustellen, dass *die mit den Spermatoblasten homologen Gebilde mit den Intercellularstreifen direct zusammenhängen,* anderseits deuten das ganze Aussehen, deren Substanz, vorzüglich aber die Färbungsverhältnisse *auf die Identität mit der Intercellular-Substanz.* Beide gewinnen durch Hæmatoxylin, vorzüglich aber mit dem im Kapitel der Technik beschriebenem modificirten Weigert'schen Verfahren, eine ganz gleichmässig dunkle Farbe.

Die mit den verschiedenen Verfahren gewonnene Bilder überzeugen uns erstens darüber, dass die Zellen der Samenkanälchen jede Membran oder Hülle entbehren. Ohne Zweifel beweisen aber das die in Zupfpräparaten so auffallenden, als mehrkernige Cysten erscheinende Gebilde, welche nur durch das Confluiren der Zellengruppen entstehen konnten. Für diese Herkunft spricht einerseits ihre beträchtliche Zahl, im Gegensatze zu dem, dass sie in anders verfertigten Präparaten gänzlich fehlen; zweitens ihre äusserst mannigfaltige Grösse und Inhalt; drittens endlich erinnern wir an Ebner, der das Confluiren an der Zellen des Rattenhodens tatsächlich auch selbst beobachtete. Dieses ausserordentlich leichte Confluiren der Zellen ist der vorzüglichste Be-

weis, dass sie irgendwelche Membran entbehren. Das leichte Gelingen des Zerzupfens, das leichte Zerfallen der Elemente beweist in erster Reihe, dass zwischen ihnen der Zusammenhang nur sehr locker besteht; ferner weil die Elemente in frischen Präparaten ohne Zusatz jeglicher Flüssigkeit frei herumschwimmen, rufen sie den Verdacht wach, dass zwischen ihnen eine flüssigere Substanz sitzt; solche Zwischensubstanz kann man aber sowohl an fixirten Zupf-, als an Schnittpräparaten nachweisen, in Form einer zwischen den Zellen in wechselnder Menge vorhandenen, sich mit Hæmatoxylin gut färbenden Interzellular-Substanz.

Als Resultat können wir aussprechen:

1. Die Hodenzellen besitzen keine Membran.

2. Zwischen den membranlosen Zellen des Eidechsenhodenkanälchens befindet sich in wechselnder Menge eine Intercellular-Substanz.

3. *Diese Intercellular-Substanz steht in continuirlichem Zusammenhang mit dem Zellenkörper der Spermatoblasten, mit deren Substanz dieselbe identisch ist.*

Diese dritte bisher noch unerkannte wichtige Thatsache erfordert nähere Erörterung. Bei der Beurteilung dieses eigentümlichen Umstandes sind nur drei Fälle denkbar. Erstens könnte man diese sich verzweigende Substanz wie es bisher allgemein gültig war für Plasma, zweitens für Intercellular-Substanz, drittens in irgendwelcher Weise für die Combination Beider betrachten.

Der ersten Auffassung tritt der Verdacht für den ersten Anblick recht nahe; wenn man die vielfach verzweigten und häufig sehr bizarren Gestalten noch irgendwie für mit Fortsätzen versehene Zellen halten mag (Cellule ramificate Sertoli's) den continuirlichen Zusammenhang, besonders aber das gleiche Aussehen und Färbung mit der Intercellular-Substanz kann man mit den Begriff des Plasmas keineswegs vereinigen.

Dadurch verfällt die erste Annahme, und gewinnt zugleich einen Beweis die zweite, wonach der ganze Zellenkörper des Spermatoblasts nichts anderes, als Intercellular-Substanz wäre; diese Auffassung aber in dieser Form kann desswegen nicht bestehen, dass man dann wieder die unregelmässigen Wandzellenkerne ohne Plasma sich vorstellen muss.

Danach bleibt nur die dritte Möglichkeit noch übrig, nach welcher man das Zellenplasma sammt der Intercellular-Substanz, in derselben Substanz zu suchen hat. Sehen wir nun: ob man dafür eine vereinigte Erklärung finden kann? Die Antwort liegt nahe. Im Obigen wurde gezeigt, dass die unregelmässigen Wandkerne degeneriren, demnach muss aber ihr Plasma ebenfalls zu Grunde gehen, wodurch die sich auflösenden zerfallenden Teile zwischen den Zellen sich verbreiten und zur Intercellular-Substanz werden. Die gewonnenen Bilder stimmen auffallend mit dieser Anschauung überein; überall gewinnen wir den Eindruck, dass in erster Reihe das Plasma der unregelmässigen Wandzellen seine Selbstständigkeit aufgiebt: es wird durch die nachbarlichen wachsenden und sich vermehrenden Elemente in höchstem Maasse beeinflusst, auf verschiedenster Weise durch jene comprimirt; nach dem Untergang des Plasmas wird auch der Kern unter dem Einfluss der nachbarlichen Zellen gezogen, (welcher sich längstens aufrecht erhielt) und nach vollendeter Degeneration dann ebenso comprimirt, und zur Intercellular-Substanz wird, wie das vorausgeschrittene Plasma. Damit giebt die unregelmässige Wandzelle als solche ihre Existenz auf.

Dadurch ergiebt sich die vollständige Erklärung, warum diese Kerne so unregelmässig sind, und ihr Plasma so eigenthümliche Verhältnisse zeigt, womit auch ihr Name die Berechtigung fand. Das Schlussresultat unserer Folgerungen ist demnach Folgendes: *Die unregelmässigen Wandzellen gehen ganz zu Grunde, in erster Reihe ihr Plasma, welchem die Kerne folgen so dass dann beide zur Intercellular-Substanz werden.*

Bis daher habe ich die Verhältnisse dieser eigentümlichen Gebilde zu den unregelmässigen Wandzellen und zur Intercellular-Substanz ins Klare gebracht: die letzte Frage blieb nur mehr übrig: wie ist es möglich, dass dieselben sogar mit Samenfäden-Bündeln in Zusammenhang stehen? Dieser wichtigste Punkt der Ebner'schen Anschauung soll noch beantwortet werden, zu dessen Verständniss man in erster Reiche die Anordnungs-Verhältnisse der Samenkanälchen-Elemente in Betracht nehmen muss.

Bei der Betrachtung der Eidechsenhodenkanälchen fällt uns momentan die äusserst mannigfachige Anordnung der Elemente

auf. Während in einzelnen Kanälchen die Elemente einen mehr oder weniger regelmässige, gleiche Auskleidung bilden, erscheinen sie in den meisten in einem unregelmässigen Durcheinander; vorzüglich nach dem Lumen zu findet man die verschiedensten Formen von Ausbuchtungen und denen entsprechende zottenartige Gebilde, wodurch an ein und demselben Präparat die Epithelauskleidung verschieden dick erscheint. Dementsprechend fällt natürlich die Regel weg, dass die älteren Entwickelungsstadien zugleich dem Lumen näher kommen. In Fig. 12 sieht man z. B. wohlentwickelte Spermatozoen unmittelbar an der Wand.

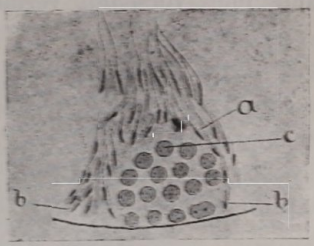



Fig. 12. Die bei *c* sich entwickelte Gruppe verschiebt die über ihr liegenden Samenfäden bogenförmig nach dem Lumen zu. An beiden Seiten der Gruppe (*b*) blieben die Samenfäden im Mangel solcher Verschiebung unmittelbar an der Wand. (Reich. oc. 3. Obj. 8.)

In Fig. 13 ist eine Gruppe kleiner Samenzellen von denselben Stadien in Y Form zwischen die anderen Elemente eingeschaltet; die Spitze des Keiles steht auf einem unregelmässigen Wandkern (*b*) das ein paariges Kernkörperchen enthält, und auffallend grösser als die nachbarlichen Zellenkerne ist; zwischen den Schenkeln der Y förmigen Gebilde, nach dem Lumen zu, folgt eine Schichte der Spermatozooen, [in der Zeichnung nur angedeutet]. Aus dieser Figur ist es zu entnehmen, dass in einer gewissen Entfernung von der Wand, entsprechend der Linie *d*, unmittelbar ober dem unregelmässigen Wandkern man, nebeneinander ganz verschiedene Entwickelungsstadien findet. [Kleine Samenzellen Knäuelkernezellen und gewöhnliche Wandzellen.] Davon also, dass man im Allgemeinem ausspricht, dass ältere Stadien dem Lumen sich nähern, kann nicht die Rede sein: feststeht aber, dass in der *Richtung des Radius, nach dem Lumen zu die Elemente in bestimmter Reihenfolge sich befinden.* (S. z. B. die Linien *f*, *e*, der Fig.). Mit anderen Worten, entsprechend der Wandoberfläche, d. h. in paralleler Richtung mit derselben, befinden sich beliebige Entwickelungsstadien nebeneinander, aber übereinander oder unter-

einander in der Richtung ein und desselben Radius liegen sie nur in bestimmter Reihenfolge, und zwar muss noch hervorgehoben werden mit beliebiger Unterbrechung derselben.

Dieses Gesetz der Anordnung der Elemente ist allgemein, sollte eine noch so hohe Zahl der Schichten vorhanden sein; nur muss man vorsichtig verfahren, dass man sich durch Flächen-

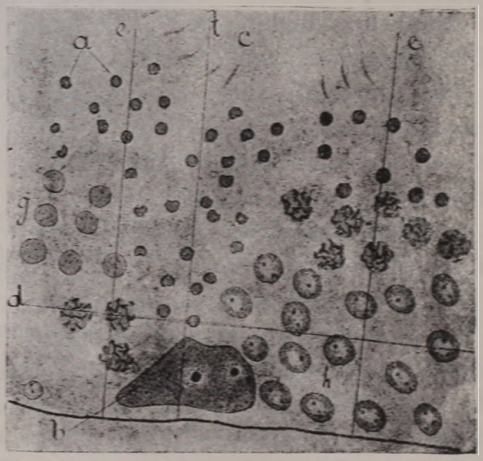



Fig. 13. Gleich Fig. 12, nur schematisch gezeichnet, die Situation der Elemente aber wurde mit der Camera Lucida genau wiedergegeben. Reich. hom. Imm. Die Gruppe der Spermatiden *a* ist in der Richtung des Radius *f*, nach einer unregelmässigen Wandzelle *b* zu versenkt, (*c*) Samenfäden, (*g*) junge Spermatiden, (*h*) regelmässige Wandzellen.

schnitte des Epithels entstandenen, daher natürlich nicht entsprechenden Befunden nicht irreführen lässt.

Ausser diesem soeben festgestellten Gesetze der Elementen-Anordnung, giebt es noch eines von weittragender Bedeutung: nämlich die *gruppenartige* Anordnung derselben Stadien entsprechenden Elementen. Dieses Verhältniss fällt bei den regelmässigen Wandzellen weniger ins Auge, wenn es auch unsere Aufmerksamkeit schon dort wachrief; viel auffallender ist es in den späteren, aus mehr Elementen zusammengesetzten Stadien.

Diese Nester erscheinen in dreierlei Gestalten: 1. Mehr-weniger regelmässig der Wandoberfläche parallel sich verbreitend, jenes Bild, welches den Eindruck der Schichte macht; 2. sie kön-

nen aber auch nach dem Lumen zu sich vorwölbende Bögen oder Kegel bilden, (s. in Fig. 12 *a*), oder 3. im Gegenteil kann die Convexität der Bögen oder Kegel der Wand zugekehrt sein. (S. *a*, *b* Fig. 13.)

Die aus Wand- oder Knäuelkernzellen bestehenden Nesten bilden der Wand mehr-weniger parallel stehende Schichten, oder dem Lumen zu sich vorwölbende Gruppen. Die kleinen Samenzellen bilden ebenfalls dem Lumen zu sich vorwölbende Neste bei ihnen aber, wie wir in Fig. 13 bei *a* sahen, begegnet man auch schon die, ihre Spitze der Wand zuwendenden Kegeln. Mit den Spermatozooen steht die Sache umgekehrt, hier sind die nach der Wand zu blickende Bögen oder Kegel viel häufiger, wenn auch das Gegenteil vorkommt. Der ganze Inhalt des Eidechsenhodenkanälchen ist aus solchen — mehr oder weniger ausgeprägten — Nesten, Gruppen, Bögen, richtiger Kegeln zusammengesetzt.

Wir langten nun zu dem, für uns wichtigsten Umstande: *gegenüber den, mit ihrer Spitze der Wand zustehenden Nesten oder Kegeln findet man häufig unregelmässige* (Sertoli'sche) *Wandzellen.* Das Verhältniss aber zwischen der unregelmässigen Wandzelle und nach ihr zugewendeten Gruppen ist sehr wechselnd. 1. Es ist möglich — wie in Fig. 13 — dass diese dem unregelmässigen Wandkerne sich zugewendeten Elemente unmittelbar bis zum Kern reichen, 2. dass andere Schichten sie von dem unregelmässigen Kern sondern, 3. kommen die Ebner'schen Spermatoblasten vor, in welchem Falle die dem unregelmässigen Wandkern zugewendete Samenfädengruppe vermittelst jenem Gebilde mit diesem in Zusammenhang tritt. (S. Fig. 9.)

Zu all'diesem habe ich noch zwei Möglichkeiten hinzufügen: 1. dass die Elemente zwar der Wand sich zuwenden, aber daselbst sich keine unregelmässige Wandzelle vorfindet, (Fig. 12 *b*), 2. dass die unregelmässige Wandzelle zwar vorhanden ist, ober ihr aber die Elemente gar keine Anordnung aufweisen.

Wie sollen wir diese Erscheinungen auffassen?

Wir wollen von den Worten v. Ebner's ausgehen, der in dieser Sache am competentsten ist; er definirt die Spermatoblasten auf p. 244. des XXX. B. des Arch. f. mikr. Anat. folgend: «Sie

bestehen aus einer einheitlichen Protoplasmamasse, welche aus einer SERTOLI'schen Zelle, verbunden mit einer Gruppe von, in der Entwicklung begriffenen Samenfäden besteht». Diese Definition vor Augen haltend, müssen wir hinweisen, dass man diesen ganz entsprechenden Bilder in den Eidechsenhodenkanälchen nur selten findet. Das in Fig. 9 veranschaulichte Gebilde entspricht gänzlich den Forderungen, indem dort tatsächlich eine SERTOLI'sche Zelle vermittelst einer einheitlichen Masse mit den Samenfäden zusammenhängt; die oben beschriebenen ähnlichen und viel häufigeren Gebilde aber entsprechen nicht ganz jener Definition, ein jedes derselben besitzt nur einzelne Eigenschaften, bis andere fehlen: so z. B. sehen wir in Fig. 13 keine Samenfäden, sondern kleine Samenzellen in einer Gruppe über den SERTOLI'schen Kern, in Fig. 12 sich entwickelnde Spermatozooen der Wand zugewendet, so dass jene diese unmittelbar berühren, in Fig. 10 steht die von den SERTOLI'schen Kernen entspringende protoplasmatische Masse gar nicht mit Samenfäden, sondern mit kleinen Samenzellen in Berührung, welche noch dazu gar keine Anordnung aufweisen. In unserem Falle müssen wir diese Gebilde dennoch mit den EBNER'schen Spermatoblasten für homolog halten: 1. weil sie einerseits mit den Spermatoblasten wesentliche gemeinschaftliche Eigenschaften haben, 2. hauptsächlich weil man diese Gebilde in den Samenkanälchen von einander nicht sondern kann, 3. *weil alle auf denselben Grund zurückzuführen und ähnlich erklärbar sind.*

Bei der Erklärung dieser Gebilden werfen wir vor Allem die Frage auf, warum sind einzelne Gruppen der Elemente zwischen die übrigen eingeschoben? Nach der BENDA-EBNER'schen Annahme ist die Einschaltung der Elemente, eigentlich der Samenfäden, zwischen den übrigen Elementen, und die Zuwendung nach der Sertoli'schen Zelle ein secundärer Process, als wenn die Samenfäden nachträglich, durch einer, unbekannter Kraft gruppirt und eingekeilt wurden. Nun muss man aber die zweite Möglichkeit betrachten, dass diese Elemente schon ursprünglich so tief standen, und nur durch die Verschiebungsverhältnisse in jene eigentümliche Situation gerieten? Für diese letzte Möglichkeit findet man tatsächlich eine nahe liegende Erklärung, wenn man an-

nimmt, *dass an gewissen Stellen die Verschieaung der Elemente nach dem Lumen zu zeitweise unterbleibt,* oder langsamer vorgeht, wie an anderen Stellen; Nun sehen wir wie ist das möglich?

Dass an gewissen Stellen die Elemente keine Verschiebung erleiden, kann darauf ruhen, dass unter ihnen sich keine neue Generation entwickelt. Wenn wir in Fig. 12 *b* betrachten, wo der Samenfädenbusch unmittelbar die Wand berührt, werden wir die Sache so auffassen, dass während bei *e* ein neues Nest entstand, bei *b* herrschte Ruhe; demnach unterblieb die Verschiebung der Elemente, bei *c* aber wurden durch das sich neu entwickelnde Nest die ober ihm liegenden Elemente in entsprechender Bogenform nach dem Lumen zu verschoben.

Mit dieser Annahme sind aber auch die ober den SERTOLI'schen Zellen befindlichen versenkten Gruppen nicht nur in Einklang zu bringen, sondern sie dienen zugleich als vorzüglicher Beweis für die Richtigkeit meiner Auffassung. Betrachte man nur Fig. 13, welche als Schema des Mechanismus dienen kann. Der, den übrigen gegenüber ausserordentlich mächtige SERTOLI'sche Kern, repräsentirt an der Stelle der Wand welche er einnimmt im Verhältniss zu den von ihm nach rechts und links liegenden Nesten, zweifelsohne einen Ruhepunkt; es ist daher nur natürlich, dass die Verschiebung der Elemente in der Richtung des über den SERTOLI'schen Kern gezogen gedachten Radius unterbleibt. Dass die SERTOLI'schen Zellen tatsächlich einen Ruhepunkt repräsentiren, entspricht nicht nur jener verbreiteten Ansicht, dass sie sich fortwährend im Ruhestand befinden, sondern auch meiner, nach welcher sie degenerirende Elemente repräsentiren.

Zum vollständigen Aufbau der Spermatoblasten brauchen wir nichts anderes mehr, als dass wir die unmittelbare Einschmelzung der Samenfädengruppen in diese verästelten Gebilde (BENDA'sche Copulation) erklären. Bei der Beurteilung der Sache müssen wir auf zwei Dinge achten: 1. dass im Sinne der Vorhergesagten der Körper der Spermatoblasten nichts anderes als degenerirtes zerronnenes Plasma ist, 2. dass, wie es bereits eingehend begründet wurde, die samenfädenbildenden Zellen keinerlei Membran besitzen. Schon diese zwei Umstände liefern einen ausreichenden Grund, dass man zwischen den, durch die nachbahrlichen Neste zusam-

mengedrückte SERTOLI'sche Zellen einerseit, zwischen der Samenfädenbuschen andererseits beobachtetes gänzliches Fehlen irgend einer Grenze für natürlich finde; dagegen spricht aber auch nichts, dass man das wahrliche Confluiren der zweierlei Elemente anerkenne. Bei der Entstehung der Samenfäden aus den kleinen Hodenzellen degenerirt ja auch jedem einzelnen Samenfaden entsprechendes Zellenplasma nach aller Wahrscheinlichkeit, wenigstens der grösste Teil desselben, so dass eigentlich von beiden Seiten von zugrunde gegangenen Plasmamassen die Rede sein kann.

*

Der Mangel an Raum gestattete mir nicht, das eingehendere Vergleichen der Litteratur der SERTOLI'schen Zellen, so können wir kaum das Vergleichen der in der ganzen Tierwelt befindlichen zweierlei Hodenzellen unternehmen.

Bezüglich der Eidechse finden wir in den niederen Tierklassen die bei den Pulmonaten beschriebenen Ergebnisse, PLATTNER's entsprechend. Seine grossen Basalzellen entsprechen den SERTOLI'schen Zellen der Eidechse, sowohl ihrer Entstehung nach aus den Spermatogonien als ihrer Degeneration bezüglich.

Hauptsächlich in dem neuen Werke RATH's (1894), welches mir erst nach Beendigung meiner Untersuchungen zukam, finden wir zum Vergleiche schöne Resultate. Beim Salamander und noch niedereren Tierklassen steht die Samenfädenentwickelung mit Cystenbildung in Zusammenhang, bei der Eidechse dagegen, wie bei den Vögeln und Säugetieren findet man keine cystenartigen Gebilde. Daraus folgt aber bei Weitem noch nicht, dass man es hier mit einer wesentlich verschiedenen Form der Samenfädenentwickelung zu tun hat wie das die Autoren allgemein annehmen; *ich sehe in den bei der Eidechse beschriebenen Nester und Gruppen nichts anderes, als die Cysten der niederen Klassen, in den zwischen den einzelnen Gruppen eingeschalteten* SERTOLI*schen Zellen, die sogenannten Cystenzellen.* Dieser Vergleich bietet sich spontan, überzeugende Beweise fehlten aber gänzlich. Als RATH an den Cystenzellen des Salamanders die amitotische Teilung, das Zugrundegehen derselben nachweist, schliesslich den

gemeinsamen Ursprung mit den Spermatogonien, so treffen diese Resultate in jeden Punkt mit den durch mir an den SERTOLI'schen Zellen des Eidechsenhodens nachgewiesenen zusammen. Demnach kann betreffs der Homologie und Degeneration dieser Zellen kein Zweifel mehr bestehen. Anderseits ist der Reptilienhoden [bei den von mir untersuchten Schlangen sind die Verhältnisse allgemein ganz und gar dieselben wie bei den Eidechsen] als Übergang nicht nur zu den Hoden der Vögeln sondern auch als Verknüpfungsform zwischen den Hoden niederer Thieren mit ausgeprägten Cystenbildungen zu den Hoden der Säugethieren aufzufassen, bei welchen die Elemente auf den ersten Blick scheinbar nicht gruppenweise sondern in Schichten geordnet sind. *Diese Schichten des Säugethierhodens sind aber nichts anderes als mehr oder weniger in der Richtung der Wand ausgestreckten Cysten.* Hier stehen wir scheinbar grossen Schwierigkeiten gegenüber, weil man unter den, hauptsächlich die Säugetiere betreffenden zahlreiche Untersuchungen der Autoren nirgends etwas Wesentliches betreffs der direkten Teilung der SERTOLI'schen Zellen [Unregelmässige Wandzelle] finden, die Degeneration derselben aber entging ihnen gänzlich. Dieser Umstand zwang mich dazu, dass ich das Meerschwein nochmals vergleicheshalber in den Bereich meiner Untersuchungen ziehe woselbst ich wahrhaft die directe Teilung der SERTOLI'schen Kerne, wenn auch sehr selten, dennoch unanfechtbar, konstatiren konnte; in der neuesten Arbeit v. MIHALKOVICS* wurde das auch in einer Figur veranschaulicht.

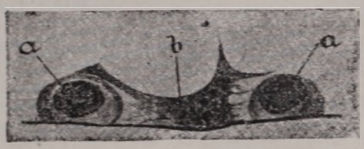



Fig. 14. Partie aus dem Samenkanälchen des Meerschweinhodens. Zwischen den zwei regelmässigen Wandzellen *a* sieht man die zugrunde gegangene Substanz einer Sertoli'schen Zelle. (*b*). (Reich. hom. imm.)

Endlich dass bei den Säugethieren solche Bilder welche auch Fig. 14. veranschaulicht [zwichen zwei Spermatogonien *a*, sind

* MIHALKOVICS, G. Der Bau des Samenkanälchens. In den Festschriften zum Andenken des 25 jährigen Jubileum Prof. J. KOVÁCS. Budapest, 1894 [ungarisch].

die Reste der total zugrundgegangenen Sertoli'schen Zellen *b*, sichtbar], die bisherigen Beobachter gänzlich ausser acht liessen: kann man ausser der Kleinheit dieser Zellen und der hier sehr selten zur Anschauung kommenden directen Teilung ihrer Kerne endlich noch dadurch erklären, dass man heutzutage in den Präparaten mehr nur das Schöne sucht: die natürlich sehr verzerrten Bilder der zugrundegehenden Sertoli'schen Zellen haben vielleicht auch dazu beigetragen, dass ihre Bedeutung so lange verborgen blieb.

16.

# ÜBER DIE MEHRFACHEN INVOLUTIONEN.

(Dritte Mitteilung.) *

Von Dr. JULIUS VÁLYI,

C. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KOLOZSVÁR (KLAUSENBURG).

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 19. Oktober 1896 vom o. M. und Classensecretair *Julius König.*

(Aus »Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie) Band XIV, pp. 381—401, Budapest, 1896.

Zur Ergänzung der vorigen Mitteilungen suchen wir jetzt die mehrfach involutorischen endlichen Punktsysteme *im Raume* auf.

## I.

Unter einer *Involution* versteht man auch im Raume denjenigen Fall zweier collinearer Punktsysteme, wo irgend einem Punkte, sei derselbe zum ersten oder zweiten Punktsysteme gerechnet, derselbe Punkt entspricht.

Es seien $X(x_1x_2x_3x_4)$ und $Y(y_1y_2y_3y_4)$ einander solcherweise doppelt entsprechende Punkte.

Dann bestehen gleichzeitig die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\rho y_i &= a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4\\ \sigma x_i &= a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3+a_{i4}y_4.\end{aligned} \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad 1)$$

* Die erste und zweite Mitteilung erschien im Bande XIII dieser Berichte pp. 244—258 und 259—269, 1896.

Hieraus folgen:

$$\begin{aligned} a_{i1}a_{1k}+a_{i2}a_{2k}+a_{i3}a_{3k}+a_{i4}a_{4k}&=0, \quad (i\gtrless k)\\ a_{i1}a_{1i}+a_{i2}a_{2i}+a_{i3}a_{3i}+a_{i4}a_{4i}&=\rho\sigma, \ (i=1,2,3,4). \end{aligned} \qquad 2)$$

Diesen in vier verschiedenen Formen darstellbaren Wert von $\rho\sigma$, welcher bei einer wahren Collineation nicht verschwinden kann, bezeichnen wir mit $\alpha$.

Man sieht leicht, dass die Annahmen

$$\begin{aligned} a_{ik}&=0 \qquad (i\gtrless k)\\ a_{11}&=a_{22}=a_{33}=a_{44} \end{aligned}$$

die Gleichungen 2) befriedigen.

Bei der dazu gehörigen Involution entspricht jeder Punkt sich selbst. Diese *identische* Involution lassen wir in den Folgenden ausser Acht. Wir setzen also voraus, dass es neben den sich selbst entsprechenden Punkten *(Doppelpunkten)* auch solche giebt, welche mit den entsprechenden Punkten nicht zusammenfallen. *(Einfache Punkte.)*

Es seien $X$ und $Y$ einander entsprechende einfache Punkte. Dem Punkte

$$\underset{(i=1,\,2,\,3,\,4)}{\rho y_i+\lambda x_i}$$

entspricht nach den Gleichungen 1) der Punkt

$$\underset{(i=1,\,2,\,3,\,4)}{\rho\,(\sigma x_i+\lambda y_i)}$$

In der Punktreihe $XY$ sind also die Punkte paarweise involutorisch. Die Doppelpunkte werden durch die Gleichung

$$\lambda^2=\rho\sigma=\alpha$$

bestimmt.

Zwei Doppelpunkte, welche demselben Werte von $\sqrt{\alpha}$ angehören, nennen wir *gleichartig*, im entgegengesetzten Falle *ungleichartig*.

Die Gerade $XY$ entspricht sich selbst (*Doppelgerade*). Durch jeden einfachen Punkt geht eine solche Doppelgerade mit zwei ungleichartigen Doppelpunkten.

Ueber die Doppelpunkte gelten die Sätze:

*Lehrsatz 1.* Jeder Punkt einer Gerade, welche durch zwei gleichartige Doppelpunkte geht, ist ein mit diesen gleichartiger Doppelpunkt.

Denn es seien $X$ und $Y$, $X'$ und $Y'$ einander entsprechende einfache Punkte.

Dem Punkte

$$\rho y_i + \sqrt{a}x_i + \lambda(\rho' y_i' + \sqrt{a}x_i') \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

entspricht nach den Gleichungen 1) der Punkt

$$\begin{aligned}&\rho(\sigma x_i + \sqrt{a}y_i) + \lambda\rho'(\sigma' x_i' + \sqrt{a}y_i') = \\ &= \sqrt{a}(\rho y_i + \sqrt{a}x_i + \lambda(\rho' y_i' + \sqrt{a}x_i')) = \\ &= \sqrt{a}(\rho y_i + \lambda\rho' y_i' + \sqrt{a}(x_i + \lambda x_i')). \quad (i=1, 2, 3, 4)\end{aligned}$$

Die zweite Form der Coordinaten zeigt, dass dieser Punkt ein Doppelpunkt ist, welcher nach der dritten Form mit den vorigen Doppelpunkten gleichartig ist.

*Lehrsatz 2.* Auf der Geraden, welche zwei ungleichartige Doppelpunkte verbindet, giebt es keine weiteren Doppelpunkte, sondern die Punkte, welche durch die Doppelpunkte harmonisch getrennt sind, sind einander entsprechende einfache Punkte.

Denn dem Punkte

$$\rho y_i + \sqrt{a}x_i + \lambda(\rho' y_i' - \sqrt{a}x_i')$$

entspricht nach den Gleichungen 1) der Punkt

$$\begin{aligned}&\rho(\sigma x_i + \sqrt{a}y_i) + \lambda\rho'(\sigma' x_i' - \sqrt{a}y_i') = \\ &= \sqrt{a}(\rho y_i + \sqrt{a}x_i - \lambda(\rho' y_i' - \sqrt{a}x_i')), \quad (i=1, 2, 3, 4)\end{aligned}$$

woraus der Satz folgt.

Hiernach sind zweierlei Arten der Doppelgeraden zu unterscheiden; nämlich Doppelgeraden durch zwei gleichartige Doppelpunkte *(Doppelgeraden erster Art)* und durch zwei ungleichartige Doppelpunkte *(Doppelgeraden zweiter Art)*.

Aus dem Lehrsatze 1) folgt, dass die Gesammtheit der Doppel-

punkte gleicher Art entweder einen Punkt, oder eine Gerade, oder eine Ebene bilden. Weil eine einzige Doppelgerade zweiter Art durch einen einfachen Punkt gehen kann, folgert man, dass

wenn ein einziger Doppelpunkt der einen Art vorhanden ist, so bilden die Doppelpunkte der anderen Art eine Ebene, und umgekehrt,

wenn die Doppelpunkte der einen Art eine Gerade bilden, so bilden auch die Doppelpunkte der anderen Art eine Gerade.

Im letzten Falle können die beiden Geraden sich nicht schneiden, denn sonst würden durch einen einfachen Punkt ihrer Ebene unendlich viele Doppelgeraden zweiter Art gehen, was unmöglich ist.

Hiernach können zweierlei Involutionen ausser der identischen im Raume vorkommen.

1. Wenn ein einziger Doppelpunkt der einen Art (*Centrum* der Involution) und eine Ebene aus den Doppelpunkten der anderen Art (*Ebene* der Involution) vorhanden ist, so trennen diese die involutorischen Punktpaare nach dem Lehrsatze 2) harmonisch.

Diese Art der Involution nennen wir *perspectiv*.

2. Wenn die Doppelpunkte beider Arten je eine Gerade (*Axen* der Involution) bilden, so trennen dieselben die involutorischen Punktpaare auf ihren gemeinsamen Schnittlinien harmonisch.

Diese Art der Involution nennen wir *zweiaxig*.

Bei den reellen Involutionen unterscheidet man noch zwei Fälle, je nachdem die Axen reell ($a>0$) oder imaginär ($a<0$) sind.

Hiernach können wir die Gleichungen beider Involutionen leicht bestimmen.

1. Bei der *perspectiven Involution* seien $c_1c_2c_3c_4$ die Coordinaten des Centrums und sei $\lambda$ der dazu gehörige Wert von $\sqrt{a}$.

Dann sind

$$\rho y_i + \lambda x_i \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

proportionell mit $c_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$, wenn $X$ irgend ein einfacher Punkt ist. Die Form der Gleichungen ist also:

$$\rho y_i = -\lambda x_i + c_i(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4). \qquad (i=1, 2, 3, 4) \qquad 3)$$

Hieraus sieht man, dass die Punkte der Ebene $(d_1 d_2 d_3 d_4)$ Doppelpunkte sind. Diese Ebene ist also die Ebene der Involution.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\rho(d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 + d_4 y_4) =$$
$$= (-\lambda + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + c_4 d_4)(d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4).$$

Andererseits liegt der Punkt

$$\rho y_i - \lambda x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

als zweiter Doppelpunkt der Punktreihe $XY$ auf der Ebene $(d_1 d_2 d_3 d_4)$, es ist also

$$\rho(d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 + d_4 y_4) = \lambda(d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4).$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$2\lambda = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + c_4 d_4. \qquad 4)$$

Die Gleichungen 3) sind also die Gleichungen der perspectiven Involution unter der Voraussetzung 4).

Die Gleichungen sind einfacher, wenn man das Centrum zu einem Grundpunkte, die Ebene der Involution zur gegenüberliegenden Grundebene wählt.

Wenn die Coordinaten

des Centrums 1, 0, 0, 0
der Ebene 1, 0, 0, 0

sind, so ist

$$2\lambda = 1$$

und sind die Gleichungen der Involution

$$\begin{aligned} 2\rho y_1 &= x_1 \\ 2\rho y_2 &= -x_2 \\ 2\rho y_3 &= -x_3 \\ 2\rho y_4 &= -x_4. \end{aligned} \qquad 5)$$

Die Gleichungen sind auch dann einfach, wenn zwei Grundpunkte (z. B. der erste und vierte) involutorisch sind und die beiden übrigen auf der Ebene der Involution liegen.

Wenn die Coordinaten des Centrums $c_1 0 0 c_4$ sind, so sind die Coordinaten der Ebene der Involution nach den gemachten Voraussetzungen $c_4 0 0 c_1$.

Es ist also

$$\lambda = c_1 c_4 .$$

und die Gleichungen der Involution sind

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= c_1^2 x_4 \\ \rho y_2 &= -c_1 c_4 x_2 . \\ \rho y_3 &= -c_1 c_4 x_3 \\ \rho y_4 &= c_4^2 x_1 \end{aligned} \qquad 6)$$

2. *Bei der zweiaxigen Involution* seien $A\ (a_1 a_2 a_3 a_4)$ und $C (c_1 c_2 c_3 c_4)$ Punkte der einen Axe und es sei $\lambda$ der zu ihnen gehörige Wert von $\sqrt{a}$.

Dann liegt der Punkt

$$\rho y_i + \lambda x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

auf der Gerade $AC$, wenn $X$ irgend ein einfacher Punkt ist. Die Form der Gleichungen ist also

$$\begin{aligned} \rho y_i = -\lambda x_i + a_i (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4) + \\ + c_i (d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4). \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad 7)$$

Weil $A$ und $C$ Doppelpunkte sind, bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d_1 a_1 + d_2 a_2 + d_3 a_3 + d_4 a_4 = 0; \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = 0. \end{aligned} \qquad 8)$$

Aus den Gleichungen 7) sieht man, dass die gemeinsamen Punkte der Ebenen $(b_1 b_2 b_3 b_4)$ und $(d_1 d_2 d_3 d_4)$ Doppelpunkte sind. Wenn man noch die Gleichungen 8) beachtet, sieht man, dass die Ebenen $b$ und $d$ durch die zweite Axe und durch $C$, respective $A$ gehen. Aus den Gleichungen 7) folgen weiter

$$\begin{aligned} \rho (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4) = \\ = (-\lambda + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \rho (d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 + d_4 y_4) = \\ = (-\lambda + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + c_4 d_4) (d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4). \end{aligned}$$

Weil der Punkt

$$\rho y_i - \lambda x_i \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

auf der Schnittlinie der Ebenen $b$ und $d$ liegen soll, bestehen die Gleichungen

$$2\lambda = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + c_4d_4 . \quad 9)$$

Die Gleichungen 7) sind also unter den Voraussetzungen 8) und 9) Gleichungen der zweiaxigen Involution.

Die Gleichungen sind sehr einfach, wenn $A$ und $C$ Grundpunkte (z. B. der erste und der dritte) sind und die beiden übrigen auf der anderen Axe liegen. Dann sind

die Coordinaten von $A$ 1, 0, 0, 0;
« « von $C$ 0, 0, 1, 0;
« « von $b$ 1, 0, 0, 0;
« « von $d$ 0, 0, 1, 0.

Es is also

$$2\lambda = 1$$

und die Gleichungen der Involution sind:

$$\begin{aligned} 2\rho y_1 &= x_1 ; \\ 2\rho y_2 &= -x_2 ; \\ 2\rho y_3 &= x_3 ; \\ 2\rho y_4 &= -x_4 . \end{aligned} \qquad 10)$$

Die Gleichungen sind auch dann einfach, wenn die Grundpunkte paarweise (z. B. der erste und vierte, der zweite und dritte) involutorisch sind. Es seien die Punkte $A$ und $C$ auf der ersten Axe so gewählt, dass der Punkt $A$ mit dem ersten und vierten Grundpunkte, der Punkt $C$ mit dem zweiten und dritten Grundpunkte in einer geraden Linie liegen.

Wenn die Coordinaten von $A$ $a_1\ 0\ 0\ a_4$
« « « von $C$ $0\ c_2\ c_3\ 0$

sind, so sind nach den gemachten Voraussetzungen die Coordinaten

von $b$ $a_4\ 0\ 0\ a_1$
« $d$ $0\ c_3\ c_2\ 0$.

Es ist also

$$\lambda = a_1 a_4 = c_2 c_3 ;$$

und die Gleichungen der Involution sind

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= a_1^2 x_4 ; \\ \rho y_2 &= c_2^2 x_3 ; \\ \rho y_3 &= c_3^2 x_2 ; \\ \rho y_4 &= a_4^2 x_1 ; \end{aligned} \qquad 11)$$

mit der Voraussetzung

$$a_1 a_4 = c_2 c_3 ;$$

Wir brauchen bei der Untersuchung der mehrfachen Involutionen die Gleichungen 6) und 11).

Es sei schon vornherein bemerkt, dass nur die allgemeinen Fälle behandelt werden. Die speciellen Fälle können genau so untersucht werden, wie es in Bezug auf die ebenen Systeme im III. Abschnitt der zweiten Mitteilung geschah. Die Ergebnisse sind aber weniger interessant.

## II.

Wir suchen solche Punktsysteme

$$A_h B_h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots r-1)$$

im Raume auf, welche gleichzeitig durch die beiden Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_h \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+1} \end{pmatrix}$$

verbunden werden, wo die Indices mod. $r$ zu reducieren sind.

1. Es seien beide Involutionen perspectiv mit den Centren $CC'$ und mit den Ebenen $dd'$.

Wir wählen das gemeinsame Punktpaar der beiden Involutionen auf der Geraden $CC'$ zum ersten und vierten Grundpunkt, während die beiden übrigen Grundpunkte auf der Gerade $dd'$ liegen sollen.

Dann werden die Gleichungen beider Involutionen nach den Gleichungen 6) gebildet.

Es seien die Coordinaten von

$$\begin{array}{llllll} A_h & \alpha_{h1} & \alpha_{h2} & \alpha_{h3} & \alpha_{h4}, \\ B_h & \beta_{h1} & \beta_{h2} & \beta_{h3} & \beta_{h4}, \\ C & c_1 & 0 & 0 & c_4, \\ C' & c_1' & 0 & 0 & c_4'. \end{array}$$

Dann bestehen die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \rho_h \beta_{h1} = c_1^2 \alpha_{h4}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,1} = c_1'^2 \alpha_{h4}, \\ \rho_h \beta_{h2} = -c_1 c_4 \alpha_{h2}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,2} = -c_1' c_4' \alpha_{h2}, \\ \rho_h \beta_{h3} = -c_1 c_4 \alpha_{h3}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,3} = -c_1' c_4' \alpha_{h3}, \\ \rho_h \beta_{h4} = c_4^2 \alpha_{h1}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,4} = c_4'^2 \alpha_{h1}. \end{array}$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

Hieraus

$$\frac{\alpha_{h2}}{\alpha_{h3}} = \frac{\beta_{h2}}{\beta_{h3}} = \frac{\beta_{h+1,2}}{\beta_{h+1,3}}$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

also ist der Wert dieser Brüche von $h$ unabhängig. Sei derselbe $c$.

Die Punkte $A_h B_h$ liegen also in der Ebene

$$x_2 - c x_3 = 0.$$

Dieser Fall wurde aber in der zweiten Mitteilung erledigt.

2. Es seien beide Involutionen zweiaxig.

Die beiden Geraden, welche die vier Axen schneiden, sind Doppelgeraden zweiter Art in beiden Involutionen. Wir wählen die gemeinsamen Punktpaare beider Involutionen auf diesen Geraden zu Grundpunkten. Dann werden die Gleichungen beider Involutionen nach den Gleichungen 11) gebildet.

Es bestehen also

$$\begin{array}{ll} \rho_h \beta_{h1} = a_1^2 \alpha_{h4}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,1} = a_1'^2 \alpha_{h4}, \\ \rho_h \beta_{h2} = c_2^2 \alpha_{h3}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,2} = c_2'^2 \alpha_{h3}, \\ \rho_h \beta_{h3} = c_3^2 \alpha_{h2}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,3} = c_3'^2 \alpha_{h2}, \\ \rho_h \beta_{h4} = a_4^2 \alpha_{h1}, & \rho_{h+1}' \beta_{h+1,4} = a_4'^2 \alpha_{h1}, \end{array}$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

wo

$$a_1 a_4 = c_2 c_3, \qquad a_1' a_4' = c_2' c_3'$$

sind.

Hieraus

$$\frac{a_{h1}a_{h4}}{a_{h2}a_{h3}} = \frac{\beta_{h1}\beta_{h4}}{\beta_{h2}\beta_{h3}} = \frac{\beta_{h+1,1}\beta_{h+1,4}}{\beta_{h+1,2}\beta_{h+1,3}};$$
$$(h=0,1,\ldots r-1)$$

folglich ist der Wert dieser Brüche von $h$ unabhängig. Sei derselbe $c$.

Die Punkte $A_hB_h$ $(h=0,1,\ldots r-1)$ liegen also auf der Fläche zweiter Ordnung

$$x_1x_4 - cx_2x_3 = 0,$$

und die Axenpaare beider Involutionen sind conjugierte Polaren in Bezug auf diese Fläche.

3. Es sei die erste Involution perspectiv mit dem Centrum $C$ und mit der Ebene $d$, die zweite Involution sei zweiaxig mit den Axen $t_1t_2$.

Es sei $e_1$ die gemeinsame Schnittgerade von $t_1$ und $t_2$ durch den Punkt $C$, und $e_2$ die gemeinsame Schnittgerade von $t_1$ und $t_2$ in der Ebene $d$.

Wir wählen das gemeinsame Punktpaar der beiden Involutionen auf der Gerade $e_1$ zum ersten und vierten Grundpunkte, der zweite und dritte Grundpunkt soll auf der Geraden $e_2$ liegen, harmonisch zu den Schnittpunkten mit $t_1$ und $t_2$.

Dann werden die Gleichungen der ersten Involution nach den Gleichungen 6), die der zweiten nach 11) gebildet.

Es bestehen also

$$\begin{aligned}
\rho_h\beta_{h1} &= c_1^2 a_{h4}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,1} &= a_1'^2 a_{h4},\\
\rho_h\beta_{h2} &= -c_1c_4 a_{h2}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,2} &= c_2'^2 a_{h3},\\
\rho_h\beta_{h3} &= -c_1c_4 a_{h3}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,3} &= c_3'^2 a_{h2},\\
\rho_h\beta_{h4} &= c_4^2 a_{h1}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,4} &= a_4'^2 a_{h1}.
\end{aligned}$$
$$(h=0,1,\ldots r-1)$$

wo

$$a'_1a'_4 = c'_2c'_3.$$

ist. Hieraus

$$\frac{a_{h1}a_{h4}}{a_{h2}a_{h3}} = \frac{\beta_{h1}\beta_{h4}}{\beta_{h2}\beta_{h3}} = \frac{\beta_{h+1,1}\beta_{h+1,4}}{\beta_{h+1,2}\beta_{h+1,3}}$$
$$(h=0,1,\ldots r-1)$$

folglich ist der Wert dieser Brüche von $h$ unabhängig. Sei derselbe $c$.

Die Punkte $A_hB_h$ $(h=0, 1, \ldots r-1)$ liegen also auf der Fläche zweiter Ordnung:

$$x_1x_4-cx_2x_3=0.$$

In Bezug auf diese Fläche sind $C$ und $d$ Pol und Polarebene, $t_1$ und $t_2$ conjugierte Polaren.

Hierdurch wurde die Untersuchung der monocyklisch mehrfachen Involutionen auf die Bestimmung mehrfach involutorischer Punktsysteme auf einer Fläche zweiter Ordnung zurückgeführt.

## III.

Die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung und zweiter Klasse kann auf die Form

$$x_1x_4-x_2x_3=0$$

gebracht werden.

Setze man

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_4}{x_3}=\lambda,$$

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{x_4}{x_2}=\mu,$$

so erhält man die folgende parametrische Darstellung:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \lambda : \mu : \lambda\mu.$$

Dieser Punkt sei mit $(\lambda\mu)$ bezeichnet. So sind die Grundpunkte des Coordinatensystems

$$(00),\ (\infty 0),\ (0\infty),\ (\infty\infty).$$

Durch den Punkt $(\lambda\mu)$ gehen die beiden Geraden der Fläche

$$x_2-\lambda x_1=0,\quad x_4-\lambda x_3=0,$$

und

$$x_3-\mu x_1=0,\quad x_4-\mu x_2=0.$$

Durch diese Geraden geht die Ebene

$$\lambda\mu x_1 - \mu x_2 - \lambda x_3 + x_4 = 0,$$

die Berührungsebene im Punkte $(\lambda\mu)$. Sei dieselbe mit $[\lambda\mu]$ bezeichnet.

Die Berührungspunkte derjenigen Berührungsebenen, welche durch den Punkt $A\ (a_1a_2a_3a_4)$ gehen, werden durch die Gleichung

$$a_1\lambda\mu - a_2\mu - a_3\lambda + a_4 = 0$$

verbunden. Wie man leicht sieht, liegen alle diese Punkte in der Ebene

$$a_4x_1 - a_3x_2 - a_2x_3 + a_1x_4 = 0,$$

in der Polarebene des Poles $A$.

Bekanntlich trennen der Pol und die Polarebene die Punkte der Fläche harmonisch. In der perspectiven Involution, welche durch einen Pol und seine Polarebene bestimmt wird, entspricht also die Fläche sich selbst, und sind ihre Punkte paarweise perspectiv-involutorisch.

Um die Gleichungen dieser Involution zu erhalten, soll man die Bedingungen dafür bestimmen, dass die Verbindungslinie der Punkte $(\lambda\mu)$ und $(\lambda'\mu')$ durch den Punkt $A\ (a_1a_2a_3a_4)$ gehe.

Man bemerkt leicht, dass die Verbindungslinie der Punkte $(\lambda\mu)$ und $(\lambda'\mu')$ zugleich die Schnittlinie der Ebenen $[\lambda\mu']$ und $[\lambda'\mu]$ bildet. Ihre Gleichungen sind also

$$\begin{aligned} \lambda\mu' x_1 - \mu' x_2 - \lambda x_3 + x_4 &= 0, \\ \lambda'\mu x_1 - \mu x_2 - \lambda' x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gerade geht also durch den Punkt $A\ (a_1a_2a_3a_4)$ hindurch, wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1\lambda\mu' - a_2\mu' - a_3\lambda + a_4 &= 0, \\ a_1\lambda'\mu - a_2\mu - a_3\lambda' + a_4 &= 0, \end{aligned} \qquad 12)$$

bestehen. Diese Gleichungen bestimmen also eine perspective Involution, welche schon durch ihr Centrum bestimmt wird. Das Centrum kann irgend ein Punkt sein, welcher nicht auf der Fläche liegt.

Zu einer zweiaxigen Involution gelangt man folgenderweise: Die Schnittlinie der Berührungsebenen der Punkte $(\lambda_1\mu_1)$ und $(\lambda_2\mu_2)$ schneidet die Fläche in den Punkten $(\lambda_1\mu_2)$ und $(\lambda_2\mu_1)$, — wie schon oben bemerkt wurde, — und umgekehrt. Die beiden Geraden sind also conjugierte Polaren. Dieselben trennen bekanntlich die Punkte der Fläche auf ihren gemeinsamen Schnittlinien harmonisch. In der zweiaxigen Involution, welche durch zwei conjugierte Polaren bestimmt wird, entspricht also die Fläche sich selbst und sind ihre Punkte paarweise zweiaxig involutorisch.

Zur Bestimmung der Gleichungen einer solchen Involution braucht man nur die Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Verbindungsgerade der Punkte $(\lambda\mu)$ und $(\lambda'\mu')$ diejenige von $(\lambda_1\mu_1)$ und $(\lambda_2\mu_2)$ schneide, oder was dasselbe ist, dass die vier erwähnten Punkte in einer Ebene liegen. Dann giebt es vier Zahlen $(A_1A_2A_3A_4)$, für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&A_1+A_2\lambda+A_3\mu+A_4\lambda\mu=0,\\
&A_1+A_2\lambda'+A_3\mu'+A_4\lambda'\mu'=0,\\
&A_1+A_2\lambda_1+A_3\mu_1+A_4\lambda_1\mu_1=0,\\
&A_1+A_2\lambda_2+A_3\mu_2+A_4\lambda_2\mu_2=0,
\end{aligned}$$

bestehen. Diese Gleichungen drücken aber bekanntlich aus, dass die Doppelverhältnisse der Zahlen $\lambda\lambda'\lambda_1\lambda_2$ und $\mu\mu'\mu_1\mu_2$ gleich sind, oder mit der gebräuchlichen Schreibweise

$$(\lambda\lambda'\lambda_1\lambda_2)=(\mu\mu'\mu_1\mu_2).$$

Die Verbindungsgerade der Punkte $(\lambda\mu)$ und $(\lambda'\mu')$ schneidet auch diejenige von $(\lambda_2\mu_1)$ und $(\lambda_1\mu_2)$, wenn zugleich die Gleichung

$$(\lambda\lambda'\lambda_2\lambda_1)=(\mu\mu'\mu_1\mu_2).$$

besteht. Aus beiden Gleichungen folgt

$$(\lambda\lambda'\lambda_1\lambda_2)=(\mu\mu'\mu_1\mu_2)=-1,$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned}
&\lambda\lambda'-\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda+\lambda')+\lambda_1\lambda_2=0;\\
&\mu\mu'-\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)(\mu+\mu')+\mu_1\mu_2=0.
\end{aligned}\qquad 13)$$

Diese Gleichungen bestimmen also eine zweiaxige Involution.

Man bemerkt, dass wenn die Punkte $(\lambda\mu)$ $(\lambda'\mu')$ involutorisch sind, so sind es auch die Punkte $(\lambda\mu')$ $(\lambda'\mu)$.

Eine solche Involution wird schon durch die eine Axe bestimmt, wofür irgend eine Gerade gewählt werden kann, welche die Fläche in zwei verschiedenen Punkten schneidet.

Man bemerkt leicht, dass die Verbindungsgeraden des ersten und vierten, des zweiten und dritten Grundpunktes des Coordinatensystems conjugierte Polaren sind. Bei der Wahl des Coordinatensystems kann man also den ersten und vierten Grundpunkt beliebig wählen mit der einzigen Beschränkung, dass dieselben nicht auf einer Geraden der Fläche liegen dürfen.

Bei einem passend gewählten Coordinatensystem sind die Gleichungen beider Involutionen viel einfacher.

Wenn der erste und vierte Grundpunkt involutorisch sind, so sind die Gleichungen der perspectiven Involution

$$\begin{aligned} \lambda\mu' &= a\,; \\ \lambda'\mu &= a\,; \end{aligned} \qquad 14)$$

und die Gleichungen der zweiaxigen Involution

$$\begin{aligned} \lambda\lambda' &= b\,; \\ \mu\mu' &= c. \end{aligned} \qquad 15)$$

Diese Gleichungen brauchen wir zur Untersuchung der mehrfachen Involutionen.

Suchen wir die Punktsysteme auf der Fläche auf, welche durch die beiden Involutionen

$$\binom{A_h}{B_h}, \qquad \binom{A_h}{B_{h+1}}$$

verbunden werden.

Es seien die Parameter

$$\begin{aligned} \text{von } A_h \quad & \lambda_h \mu_h\,; \\ \text{“ } B_h \quad & \nu_h \rho_h\,. \end{aligned}$$

1. Wenn beide Involutionen perspectiv sind mit den Centren $CC'$, wählen wir die Schnittpunkte der Geraden $CC'$ mit der

Fläche zum ersten und vierten Grundpunkte. So werden die Gleichungen beider Involutionen nach 14) gebildet. Es bestehen also die Gleichungen:

$$\lambda_h \rho_h = a; \qquad \lambda_h \rho_{h+1} = a';$$
$$\mu_h \nu_h = a; \qquad \mu_h \nu_{h+1} = a';$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

Hieraus

$$\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = \frac{\mu_{h+1}}{\mu_h} = -\frac{\nu_h}{\nu_{h+1}} = \frac{\rho_h}{\rho_{h+1}} = \frac{a}{a'}.$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

Man ersieht hieraus, dass $\frac{a}{a'}$ eine $r$-te Einheitswurzel ($\varepsilon$) sein soll.

Aus den obigen Gleichungen folgen weiter

$$\lambda_h = \lambda_0 \varepsilon^h, \qquad \nu_h = \nu_0 \varepsilon^{-h},$$
$$\mu_h = \mu_0 \varepsilon^h, \qquad \rho_h = \rho_0 \varepsilon^{-h},$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

wo

$$\lambda_0 \rho_0 = \mu_0 \nu_0.$$

ist. Die sämmtlichen Punkte liegen also in der Ebene

$$\mu_0 x_2 - \lambda_0 x_3 = 0.$$

Die Punkte $A_h B_h$ bilden also zwei $r$-aden in einer quadratischen Punktreihe aus demselben Systeme, welche $r$-aden uns schon aus der ersten und zweiten Mitteilung bekannt sind. Der erste und vierte Grundpunkt sind die Grundpunkte beider $r$-aden. Die zwei $r$-aden werden durch die perspectiven Involutionen

$$\binom{A_h}{B_{h+k}}$$
$$(k=0, 1, \ldots r-1)$$

verbunden.

2. Wenn beide Involutionen zweiaxig sind, so wählen wir diejenigen Punkte zum ersten und vierten Grundpunkte, in welchen die Fläche durch die eine gemeinsame Schnittlinie der vier Axen geschnitten wird. Dann werden die Gleichungen beider Involutionen nach 15) gebildet. Es bestehen also

$$\lambda_h \nu_h = b\,; \qquad \lambda_h \nu_{h+1} = b'\,;$$
$$\mu_h \varrho_h = c\,; \qquad \mu_h \varrho_{h+1} = c'.$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

Hieraus

$$\lambda_h = \lambda_0 \varepsilon_1^h\,; \qquad \nu_h = \nu_0 \varepsilon_1^{-h}\,;$$
$$\mu_h = \mu_0 \varepsilon_2^h\,; \qquad \varrho_h = \varrho_0 \varepsilon_2^{-h}\,;$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

wo $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ $r$-te Einheitswurzeln bezeichnen. Wenn

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{n_1}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon^{n_2},$$

wo $\varepsilon$ eine primitive $r$-te Einheitswurzel bedeutet, so sind die Punkte $A_h$ nur dann von einander verschieden, wenn die Zahlen $n_1$, $n_2$, $r$ keinen gemeinsamen Teiler haben.

Wie man leicht sieht, werden die Punkte $A_h B_h$ durch die $r$ zweiaxigen Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+k} \end{pmatrix}$$
$$(k=0, 1, \ldots r-1)$$

verbunden. Solche Punktsysteme können wir wieder *r-aden* nennen. Die Gleichungen sämmtlicher Involutionen werden nach 15) gebildet. In jeder Involution sind also der erste und vierte, zweite und dritte Grundpunkt involutorisch *(Grundpunktpaare der r-aden)*.

Unter einem *Involutionenbündel* verstehen wir die Gesammtheit derjenigen zweifach unendlich vielen zweiaxigen Involutionen, deren Axenpaare conjugierte Polaren der Fläche, und zugleich gemeinsame Schnittlinien von zwei fixen conjugierten Polaren sind. Die Schnittpunkte der fixen conjugierten Polaren mit der Fläche sollen *Grundpunktpaare des Bündels* heissen.

Die Involutionen der obigen $r$-aden gehören also einem Bündel an.

Die Haupteigenschaft einer $r$-ade ist die folgende:

Einer $r$-ade entspricht in jeder Involution des zu den Grundpunktpaaren der $r$-ade gehörigen Bündels eine zweite $r$-ade, welche mit der ersten $r$-fach involutorisch ist. Diese $r$ Involutionen gehören demselben Bündel an.

Eine $r$-ade, deren Grundpunktpaare der erste und vierte, zweite und dritte Grundpunkt des Coordinatensystems sind, wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \lambda_0 \varepsilon_1^h; \\ \mu_h &= \mu_0 \varepsilon_2^h; \\ (h=0,1,\ldots r-1) & \end{aligned} \qquad 16)$$

bestimmt, wo $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ $r$-te Einheitswurzeln sind.

Unter diesen $r$-aden giebt es auch solche, welche einer linearen oder quadratischen Punktreihe angehören.

Die $r$-ade gehört einer linearen Punktreihe an, wenn $\lambda_0$ oder $\mu_0$ den Wert 0 oder $\infty$ hat.

Die $r$-ade gehört einer quadratischen Punktreihe an, wenn

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1^{-1}.$$

ist. Die Grundpunkte der $r$-ade sind im ersten Falle der erste und vierte, im zweiten Falle der zweite und dritte Grundpunkt des Coordinatensystems.

Wenn $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$ ist und der Einheitspunkt so gewählt wird, dass $\lambda_0 = \mu_0 = 1$ sei, so sind die Coordinaten der Punkte

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \varepsilon_1^h : \varepsilon_1^{2h} : \varepsilon_1^{3h};$$

die sämmtlichen Punkte liegen also auf der Raumcurve dritter Ord ung, deren parametrische Darstellung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \lambda : \lambda^2 : \lambda^3$$

ist. Dieser $r$-ade sind wir schon im VII. Abschnitte der ersten Mitteilung begegnet.

3. Wenn die erste Involution perspectiv mit dem Centrum $C$, die zweite Involution zweiaxig mit den Axen $t_1 t_2$ ist, so wählen wir diejenigen Punkte zum ersten und vierten Grundpunkte, in welchen die durch $C$ gehende gemeinsame Schnittlinie von $t_1$ und $t_2$ die Fläche schneidet. So werden die Gleichungen der ersten Involution nach 14), die der zweiten nach 15) gebildet. Also bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_h \varrho_h &= a, \qquad \lambda_h \nu_{h+1} = b, \\ \mu_h \nu_h &= a, \qquad \mu_h \varrho_{h+1} = c. \\ (h=0,1,\ldots r-1) & \end{aligned} \qquad 17)$$

Hieraus

$$\frac{\lambda_{h+2}}{\lambda_h} = \frac{a^2}{bc}. \qquad 18)$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

Zwei Fälle sind zu unterscheiden, je nachdem $r$ ungerade oder gerade ist.

*a)* Wenn $r$ ungerade $(2r_1+1)$ ist, so multipliciere man die $r$ Gleichungen 18) zusammen. So erhält man, dass $\frac{a^2}{bc}$ eine $r$-te Einheitswurzel $(\varepsilon)$ sein soll. Man erhält weiter aus den Gleichungen 18)

$$\lambda_{2h} = \lambda_0 \varepsilon^h,$$
$$(h=0, 1, 2, \ldots r_1)$$

$$\lambda_{2h+1} = \lambda_0 \varepsilon^{h+r_1+1}.$$
$$(h=0, 1. \ldots r_1-1)$$

Wenn man

$$\varepsilon^{r_1+1} = \varepsilon_1$$

setzt, wo $\varepsilon_1$ wieder eine $r$-te Einheitswurzel ist, so erhält man einfacher

$$\lambda_h = \lambda_0 \varepsilon_1^h$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

und aus den Gleichungen 17)

$$\mu_h = \mu_0 \varepsilon_1^h;$$

$$\nu_h = \nu_0 \varepsilon_1^{-h};$$

$$\rho_h = \rho_0 \varepsilon_1^{-h};$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

wo

$$\lambda_0 \rho_0 = \mu_0 \nu_0.$$

ist. Die Punkte $A_h B_h$ bilden also zwei $r$-aden in derselben quadratischen Punktreihe aus demselben Systeme, genau so, wie wir es unter 1) gefunden haben.

Dies erklärt sich dadurch, dass die Involutionen in den Ebenen durch das Centrum einer perspectiven — und durch die eine Axe einer zweiaxigen Involution von derselben Art sind. Folglich kann irgend eine Involution zweier $r$-aden in derselben

quadratischen Punktreihe im Raume ebenso gut perspectiv, wie zweiaxig genannt werden.

*b)* Wenn $r$ gerade $(2r_1)$ ist, multipliciere man die $r_1$ ersten Gleichungen 18) zusammen. Dann sieht man, dass $\frac{a^2}{bc}$ eine $r_1$-te Einheitswurzel $(\eta)$ sein soll. Man erhält aus 18)

$$\lambda_{2h} = \lambda_0 \eta^h, \qquad \lambda_{2h+1} = \lambda_1 \eta^h; \qquad 19)$$
$$(h=0, 1, \ldots r_1-1)$$

und aus 17)

$$\begin{aligned} \mu_{2h} &= \mu_0 \eta^h, & \mu_{2h+1} &= \mu_1 \eta^h, \\ \nu_{2h} &= \nu_0 \eta^{-h}, & \nu_{2h+1} &= \nu_1 \eta^{-h}, \\ \rho_{2h} &= \rho_0 \eta^{-h}, & \rho_{2h+1} &= \rho_1 \eta^{-h}, \end{aligned} \qquad 19)$$
$$(h=0, 1, \ldots r_1-1)$$

wo

$$\begin{aligned} &\lambda_0\rho_0 = \mu_0\nu_0 = \lambda_1\rho_1 = \mu_1\nu_1 = a; \\ &\lambda_0\nu_1 = \lambda_1\nu_0\eta^{-1} = b; \\ &\mu_0\rho_1 = \mu_1\rho_0\eta^{-1} = c; \end{aligned} \qquad 20)$$

sind. Hieraus folgt, dass die Punkte $A_{2h}$, $A_{2h+1}$, $B_{2h}$, $B_{2h+1}$ einzeln je eine $r_1$-ade in quadratischen Punktreihen bilden, deren Grundpunkte in den ersten und vierten Grundpunkt des Coordinatensystems fallen. Die Ebenen der $r_1$-aden von $A_{2h}$ und $B_{2h}$, $A_{2h+1}$ und $B_{2h+1}$ fallen zusammen, aber die Ebenen der $r_1$-aden von $A_{2h}$ und $A_{2h+1}$ können auch verschieden sein.

Man sieht auch leicht, dass die vollständigen Punktsysteme $A_h$ und $B_h$ durch die $r_1$ perspectiven Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+2k} \end{pmatrix}$$
$$(k=0, 1, \ldots r_1-1)$$

und die $r_1$ zweiaxigen Involutionen

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+2k+1} \end{pmatrix}$$
$$(k=0, 1, \ldots r_1-1)$$

verbunden werden.

Suchen wir den Zusammenhang zwischen den $r_1$-aden von $A_{2h}$ und $A_{2h+1}$ auf.

Unter den Gleichungen 20) kommen die Gleichungen

$$\lambda_0 \nu_1 = \lambda_1 \nu_0 \eta^{-1};$$
$$\mu_0 \nu_0 = \mu_1 \nu_1;$$

vor. Hieraus

$$\lambda_1 \mu_1 = \lambda_0 \mu_0 \eta.$$

Wenn man mit $\eta^{2h}$ multipliciert und die Gleichungen 19) berücksichtigt, erhält man

$$\lambda_{2h+1} \mu_{2h+1} = \eta^{2h+1} \lambda_0 \mu_0,$$
$$(h=0, 1, \ldots r_1-1)$$

oder mit den Coordinaten ausgedrückt:

$$x_{01} x_{2h+1,4} = \eta^{2h+1} x_{04} x_{2h+1,1}.$$

Diese Gleichung bestimmt den geometrischen Ort des Punktes $A_{2h+1}$, wenn der Punkt $A_0$ schon gewählt wurde.

Man sieht hieraus, dass diese geometrischen Orte Kegelschnitte sind, deren Ebenen durch die conjugierte Polare derjenigen Geraden geht, welche die Grundpunkte der $r_1$-aden verbindet.

Man sieht weiter, dass die Ebenen in diesem Ebenenbüschel eine $r_1$-rade bilden, wenn $r_1$ ungerade ist, und eine $\frac{r_1}{2}$-ade, wenn $r_1$ gerade ist. Im letzteren Falle haben nämlich die Punkte $A_{2h+1}$ und $A_{2h+1+r_1}$ denselben Kegelschnitt, wie ihr gemeinsamer geometrischer Ort. Man soll aber bemerken, dass die $r_1$-ade von $A_{2h+1}$ bestimmt ist, sobald einer ihrer Punkte gewählt wurde.

Wenn man die $r_1$-aden von $A_{2h}$ und $A_{2h+1}$ dieser Weise gewählt hat, projiziere man dieselben aus einem Punkte der Geraden, welche die Grundpunkte der $r_1$-aden verbindet, auf die Fläche. So erhält man ein zweites Punktsystem $B_{2h}$, $B_{2h+1}$, welches zum ersten durch $r_1$ perspective und $r_1$ zweiaxige Involutionen verbunden wird.

Die $r_1$-aden von $A_{2h}$ und $A_{2h+1}$ können auch in derselben Ebene liegen. Dafür ist die Bedingung

$$\lambda_0 \mu_1 = \lambda_1 \mu_0.$$

Wenn man die Gleichung

$$\lambda_1 \mu_1 = \lambda_0 \mu_0 \eta$$

hinzunimmt, erhält man

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\eta}, \quad \mu_1 = \mu_0 \sqrt{\eta}.$$

Diese Werte in 19) eingesetzt, sieht man sogleich, dass die beiden $r_1$-aden sich zu einer $2r_1$-ade ergänzen.

Man erhält also für ein gerades $r$ in diesem Falle dasselbe Resultat, welches früher für ein ungerades $r$ gefunden wurde.

## IV.

Wir haben die Parameter der Punkte einer $r$-ade in imaginärer Form erhalten. Es fragt sich, ob es auch reelle $r$-aden giebt?

1. Die Gleichung einer concav-convexen Fläche zweiter Ordnung kann in einem reellen Coordinatensysteme auf die Form gebracht werden:

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0.$$

Setze man

$$\frac{x_3+x_4 i}{x_1+x_2 i} = \frac{x_1-x_2 i}{x_3-x_4 i} = \lambda;$$

$$\frac{x_3-x_4 i}{x_1+x_2 i} = \frac{x_1-x_2 i}{x_3+x_4 i} = \mu;$$

wo $i$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Man sieht hieraus, dass reelle Punkte der Fläche solche Parameter haben, für welche

$$|\lambda| = |\mu| = 1$$

ist. Unter den durch die Gleichungen 16) bestimmten $r$-aden sind also diejenigen reell, für welche

$$|\lambda_0| = |\mu_0| = 1$$

ist. Unter den verschiedenen $r$-aden giebt es also auf einer concav-convexen Fläche auch reelle.

2. Die Gleichung einer biconvexen Fläche zweiter Ordnung kann in einem reellen Coordinatensysteme auf die Form

$$x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$$

gebracht werden.

Wenn man

$$\frac{x_3+x_4 i}{x_1+x_2} = \frac{x_1-x_2}{x_3-x_4 i} = \lambda$$

$$\frac{x_3-x_4 i}{x_1+x_2} = \frac{x_1-x_2}{x_3+x_4 i} = \mu;$$

setzt, so gehören conjugierte complexe Parameter den reellen Punkten an. Die sämmtlichen Punkte der durch 16) bestimmten $r$-ade können also nur dann reell sein, wenn $\lambda_0$ und $\mu_0$ conjugiert complex sind und zugleich

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1^{-1}.$$

ist. Es giebt also auf einer biconvexen Fläche nur unter denjenigen $r$-aden reelle, welche in einer quadratischen Punktreihe liegen. Bei den anderen $r$-aden können höchstens einige Punkte reell sein.

*

Es sei endlich erwähnt, dass bei einer polycyklisch mehrfachen Involution, welche genau so untersucht werden kann, wie in der ein- und zweidimensionalen Geometrie, die Punkte der einzelnen Cyklen auf je einer Fläche zweiter Ordnung liegen, deren Gleichungen auf die Form

$$x_1 x_4 - c x_2 x_3 = 0$$

gebracht werden können, wo $c$ für die verschiedenen Cyklen verschieden sein kann.

Diese Flächen haben also vier gemeinsame Geraden, welche aber bei einem reellen Punktsysteme imaginär sind.

17.

# ÜBER EINE NEUE METHODE DER MORPHOMETRIE DER ERDOBERFLÄCHE.

Von Dr. R. von KÖVESLIGETHY,

AO. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BUDAPEST.

Vorgelegt in der Sitzung der Akademie vom 18. Februar 1895 vom o. M. *I. Fröhlich.*

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIII, pp. 167—180. 1895.

Das vordem rein geometrische Problem der Bestimmung der Erdgestalt erhielt im Laufe der Zeit in der Festsetzung des Geoides eine auf mechanischen Principien beruhende Lösung. Das Verfahren ist principiell richtig, da die Figur der Himmelskörper durch die Anziehung ihrer Massenteilchen und die von der Axendrehung herrührende Centrifugalkraft bestimmt ist; es ist aber auch praktisch verständlich, da die Operationen der modernen Gradmessung, mit Ausnahme der Aussteckung von Azimuthalwinkeln und der Basismessung, auf rein physikalischen Methoden beruhen. Sowohl bei der Festlegung der Amplitude des gemessenen Meridianbogens, als bei dem Nivellement spielt die Libelle die Hauptrolle, die sich in jedem Punkte nicht in die geometrische Tangentialebene des Erdkörpers, sondern in die Berührende der Niveaufläche hineinlegt. Auch gelangt man durch das Nivellement nicht zu Seehöhen, sondern zu dem Vertikalabstande der aufeinander folgenden Niveauflächen, die nur in dem einen Falle für identisch genommen werden dürfen, wenn längs der nivellirten Strecke die Schwerebeschleunigung constant dieselbe wäre.

Eine, wenn auch nicht dem Wesen, so doch der Form nach neue Stütze findet diese Auffassung darin, dass die Gestalt der

Erde, unabhängig von geometrischen Messungen, auch aus der Verteilung der Pendelschwere und aus dem Mondlaufe innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen erschlossen werden kann.

Die Geometrie der irdischen Oberflächenformen wurde, von einigen HUMBOLDT'schen Versuchen abgesehen, von SONKLAR (in: Allgemeine Orographie, Wien 1873) begründet; A. PENCK verleiht (in: Morphologie der Erdoberfläche, Stuttgart, 1894, I. Bd.) diesen Bestrebungen feste mathematische Einkleidung. Herrscht nämlich auf dem Flächenelemente $f_n$ eines auf der Basis $F = \Sigma f_n$ stehenden Gebildes der morphologische Wert $\omega_n$ (Höhe, Gefälle und ähnliche Elemente), so kann $\Omega = \frac{\Sigma f_n \omega_n}{\Sigma f_n}$ als Mittelwert jenes morphologischen Elementes für die betreffende Oberflächenform betrachtet werden. Dieser Wert ist offenbar das unter Stimmberücksichtigung der dazugehörigen Fläche gerechnete Mittel der einzelnen Elemente.

Die rein geometrische Definition der Orometrie, wie sie von SONKLAR gab, ist äusserst bequem und einfach, ihre Einführung zeitgemäss. Seither entstanden auf dieser Grundlage zahlreiche Monographieen, die zum Mindesten die Notwendigkeit dartun, uns über Oberflächengestaltungen, wenn auch nur schematische, Vorstellungen zu bilden. Doch hat diese geometrische Auffassung auch ihre Nachteile, die in dem Maasse fühlbarer werden, als Gradmessungsoperationen, Nivellements, astronomische und geodätische Ortsbestimmungen und Pendelmessungen auch auf das Gebirge ausgedehnt werden: sie stehen gänzlich fremd jenen Pendelbeschleunigungen und Lotstörungen gegenüber, die man in der Nähe der Gebirge beobachtet. Kein Wunder, denn derselbe Widerspruch zwischen Zweck und Mittel, den wir in der Bestimmung der Erdgestalt fanden, ergiebt sich hier wieder: Höhenmessungen werden zumeist mit dem Aneroide, Tiefenmessungen, wenigstens zum Teile, mit SIEMENS'schen Bathometern gemessen. Beide Instrumente sind als reine Dynamometer mehr physikalische oder mechanische, als geometrische Messapparate. Der genannte Widerspruch bleibt selbst dann bestehen, wenn die Höhenmessung auf trigonometrischem oder Nivellementswege versucht wird: wiederum ist die Libelle der ausschlaggebende Factor, die nie die

geometrische Horizontale darstellt, sondern die Berührende der Berg und Erde charakterisierenden Niveaufläche giebt.

Bei dieser Ueberlegung ist es eher zu verwundern, dass das Verfahren, welches in der Geodäsie so grosse Vorteile darbot, und welches in der die physische Geographie so nahe angehenden Theorie des Erdmagnetismus wörtlich wieder vorkommt — in der Tat ist die Darstellung des Geoides und Gauss' erdmagnetische Theorie mathematisch dasselbe Problem, — so vereinzelt angewendet wird. In der Morphometrie findet sich dessen keine Spur, obgleich die Beobachtungsmethoden auf dieses Verfahren geradezu hinweisen.

Im Folgenden möge der Begriff der Niveaufläche auch in die Orometrie und überhaupt die Morphometrie eingeführt werden; sollte die Einführung eines besonderen Namens wünschenswert erscheinen, so mag die Niveaufläche einer Oberflächengestalt kurz *Oroid* genannt werden.

Der mathematische Ausdruck des Oroids als Niveaufläche, kann mit beliebig weit getriebener Annäherung gegeben werden; die Fläche ist überall continuirlich, ohne Sprünge und Risse, enthält weder Ecken noch Kanten, und hängt nichtsdestoweniger von der Form des Gebildes ab, so dass es zu seiner Darstellung geeignet erscheint. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass auch diese Darstellungsart nur eine schematische sein kann, doch ist sie es gewiss nur in geringerem Grade, als jenes Bild, das wir uns aus den wenigen und kärglichen orometrischen Elementen der Gebirge bilden, oder welches die hypsographische, klinographische und andere Curven versinnlichen. Es ist weiter klar, dass die ersten Differentialquotienten des Oroids in jedem Punkte die Schwerebeschleunigung und die Lotabweichung ergeben, die beiden wichtigsten Elemente, die aus der geometrischen Orometrie kaum herausgerechnet werden können. Und während sich dort zahlreiche, für sich charakteristische Zahlendaten in eine gemeinsame Durchschnittszahl vermengen, behält hier jede Messung ihre Individualität und ihren Einfluss auf das Resultat, kann aus demselben leicht entfernt, um durch eine bessere, oder durch zahlreichere Daten ersetzt zu werden.

Bevor aber diese neuere morphometrische Methode in Angriff

genommen wird, muss eine wichtige praktische Frage beantwortet werden. Es ist nämlich klar, dass der Ausdruck des Oroides, gerade wie jener des Geoides die Summe der ersten Glieder einer Potentialentwickelung darstellt. Im Falle des Niveausphæroides convergiert die Reihe so rasch, dass die beiden ersten Glieder schon die beiden CLAIRAUT'schen Theoreme darstellen, so dass in den meisten Fällen das Geoid geradezu mit dem Niveausphæroide genug geringer Ordnung verwechselt werden darf. Ist aber diese günstige Convergenz auch im Falle des Gebirgspotentiales zu erwarten? Aus mathematischem Standpunkte kann die Frage natürlich nur für Formen von regelmässiger Gestalt und gegebener Massenverteilung beantwortet werden. Im Falle eines unregelmässig gestalteten Berges von unbekanntem Dichtegesetze, kann die Antwort nur nachträglich gegeben werden, insofern als bei der Reihenentwickelung fortschreitend bis zu so hohen Gliedern gegriffen werden muss, dass der Unterschied des für einen Punkt des Berges berechneten und beobachteten Potentiales unter die Grenze der Beobachtungsfehler sinke. Nun besagt aber das erste Glied des Potentiales, dass der Berg nach Aussen eben die Wirkung zeige, als wäre seine ganze Masse in einem einzigen inneren Punkte concentrirt. Betrachtet man nun dieses einzige und allereinfachste Glied, so erhält man bei einfach gestalteten Bergen schon für die Dichte der Erde ganz annehmbare Werte, sei es, dass man die Lotabweichung am Fusse des Berges messe (wie es MASKELYNE und JAMES für den Shehallion taten, die als Erddichte 4,7 und 5,32 fanden), sei es, dass man die Pendelbeschleunigung auf der Spitze beobachtete (wie MENDENHALL auf dem Fusiyama, der als Erddichte 5,77 fand). Da der Unterschied der vernachlässigten Reihenglieder gerade für den Fuss und den Gipfel des Berges besonders gewichtig wird, ist es zu hoffen, dass das Oroid in allen Fällen schon durch eine geringe Zahl von Gliedern dargestellt werden könne. Deren Zahl ist um so kleiner, je regelmässiger der Berg gestaltet ist, je homogener seine Masse, und je isolierter er sich aus der Ebene erhebt. Den angestellten Ueberlegungen nach dürfte es erlaubt sein zu definieren: Das Oroid ist durch die Summe jener ersten Glieder der Potentialentwicklung einer Oberflächenform charakterisiert, die, für sich genommen, aus in irgend

einem Oberflächenpunkte der Form angestellten Beobachtungen, einen annehmbaren Wert der Erddichte ergeben.

*Der mathematische Ausdruck des Oroids.*

Durch irgend einen, dem Massenmittelpunkte der Oberflächenform nahegelegenen Punkt möge eine Horizontalebene gelegt werden, auf welche sowohl die Massenelemente der Form, als der Beobachtungsort durch die Zenithdistanz $z$, das Azimuth $a$ und den Radiusvector $r$ bezogen werden. Ist ein Massenelement der Form $dm'$, dessen Lage $z'$, $a'$, $r'$, die Lage des äusseren Punktes $P$: $z$, $a$, $r$, die Entfernung beider $\rho$, und die Constante der Massenanziehung $f$, so ist das Attractionspotential des Gebildes

$$U=f\int\frac{dm'}{\rho}, \qquad 1)$$

wo die Integration über die ganze Masse der Form auszudehnen ist. Bedeuten $\beta_0$ und $H_0$ geographische Breite und Seehöhe des Coordinatenanfangspunktes, $\beta$ und $H$ dasselbe für den Punkt $P$, endlich $R$ und $\omega$ den Radius und die Winkelgeschwindigkeit der hier mit völlig zureichender Genauigkeit kugelförmig vorausgesetzten Erde, so ist

$$W=\tfrac{1}{2}\omega^2((R+H)^2\cos^2\beta-(R_0+H_0)\cos^2\beta_0) \qquad 2)$$

das Potential der Centrifugalkraft, das für Formen geringer Ausdehnung auch vollkommen vernachlässigt, oder doch beträchtlich vereinfacht werden darf. Das vollständige Potential der Oberflächenform ist hiernach:

$$V=U+W \qquad 3)$$

und erteilt man dem $V$ einen constanten, sonst aber beliebigen Wert, dann entsteht die Gleichung des Oroids. Man wählt die Constante am zweckmässigsten so, dass die Niveaufläche durch den höchsten, beziehentlich den tiefsten Punkt der Form hindurchgehe und dementsprechend wird man auch vor Zeichenfehlern geschützt sein, wenn man im Falle vertiefter Formen unter $z$ stets Nadirdistanzen versteht.

Da $\rho^2=r^2+r'^2-2rr'(\cos z\cos z'+\sin z\sin z'\cos(a-a'))$ 4)

ist, so kann $\frac{1}{\rho}$ in 1) stets in eine konvergente Reihe entwickelt werden, so zwar, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}&=\frac{1}{r}\left(P_0+\frac{r'}{r}P_1+\cdots+\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n+\cdots\right),\quad \text{wenn}\quad r'<r\\ \frac{1}{\rho}&=\frac{1}{r'}\left(P_0+\frac{r}{r'}P_1+\cdots+\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n+\cdots\right),\quad \text{falls}\quad r<r'\end{aligned}\qquad 5)$$

wenn $P$ die Kugelfunctionen der Variabeln $z$ und $a$ bedeuten. Ihre näheren Ausdrücke sind durch 27) gegeben. Zieht man nun mit dem Radius $r$, das ist der Entfernung des Beobachtungspunktes $P$ von dem Coordinatenanfangspunkte aus letzterem eine Kugel um die Form, so zerlegt diese das Gebilde in zwei Teile: der eine befindet sich ganz innerhalb der Kugel, so dass für jedes seiner Massenelemente $r'<r$ ist; der andere liegt ganz ausserhalb der Kugel, so das für jedes seiner Elemente beständig $r'>r$ ist. Das Potential $U_i$ des ersteren Teiles ist unter Anwendung der ersten Reihe in 5), das Potential $U_a$ des zweiten Teiles mit Anwendung der zweiten Reihe 5) zu berechnen; das Potential der ganzen Form ist offenbar die Summe beider Teilpotentiale gleich. Bezeichnet man mit $s'$ die Dichte im Punkte $r'$, $a'$, $z'$, so ist

$$dm'=r'^2dr'\sin z'dz'da'.s' \qquad 6)$$

oder mit der Substitution

$$\cos z'=\mu' \qquad 7)$$

und ohne Berücksichtigung des Vorzeichens:

$$dm'=r'^2s'dr'd\mu'da' \qquad 8)$$

der Ausdruck des Massenelementes. Aus 1), 5) und 8) wird sohin:

$$\begin{aligned}U_i&=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int_0^{R'}r'^{n+2}dr'\int_{-1}^{+1}d\mu'\int_0^{2\pi}P_ns'da'\\ U_a&=f\sum_{n=0}^{\infty}r^n\int_0^{R'}r'^{-(n-1)}dr'\int_{-1}^{+1}d\mu'\int_0^{2\pi}P_ns'da'\end{aligned}\qquad 9)$$

wo $R'$ die Länge desjenigen zur Richtung $(z'\,a')$ gehörigen Radiusvectors bedeutet, welche zwischen dem Coordinatenanfangspunkte und der Oberfläche der Form liegt. Im Sinne des Azimuthes ist die Integration von 0 bis $2\pi$, der Zenithdistanz von 0 bis $\pi$ oder nach $\mu'$ von $-1$ bis $+1$ zu erstrecken; $s'$ ist im Allgemeinen Function der Coordinaten.

Definirt man Kürze halber durch

$$\begin{aligned} Y_i(n) &= f \cdot \int_0^{R'} r'^{n+2} dr' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^{2\pi} P_n s' da' \\ Y_a(n) &= f \cdot \int_0^{R'} r'^{-(n-1)} dr' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^{2\pi} P_n s' da' \end{aligned} \qquad 10)$$

die LAPLACE'schen Functionen, so wird einfacher:

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_i(n)}{r^{n+1}} \text{ és } U_a = \sum_{n=0}^{\infty} Y_a(n) r^n, \qquad 11$$

Die LAPLACE'schen Ausdrücke sind einfach angebbar. Bedeutet:

$$\begin{aligned} f_i^{(n)}(\mu) = \mu^{n-i} &- \frac{(n-i)(n-i-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-i-2} + \\ &+ \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-i-4} - \ldots + \\ &+ (-1)^k \frac{(n-i)(n-i-1)\ldots(n-i-2k+1)}{2 \cdot 4 \ldots (2k)(2n-1)\ldots(2n-2k+1)} \mu^{n-i-2k} + \ldots \end{aligned} \qquad 12)$$

das LEGENDRE'sche Polynom für die Variable $\mu$ (die nach 7) identisch mit $\cos z$ ist) so hat man:

$$\begin{aligned} Y_{(n)} = \tfrac{1}{2} a_0^{(n)} f_0^{(n)}(\mu) &+ \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} f_i^{(n)}(\mu)(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}} \cos ia + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} s_i^{(n)} f_i^{(n)}(\mu)(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}} \sin ia \end{aligned} \qquad 13)$$

wo die Hinzufügung des Indexes $i$ oder $a$ für die innere und äussere Masse nur die durch die Integration eingeführten $2n+1$ willkürlichen Constanten $a_0^{(n)}, c_1^{(n)} \ldots c_n^{(n)}, s_1^{(n)} \ldots s_n^{(n)}$ verändert hat. Die mit dem Buchstaben $a$ bezeichnete Constante bezieht sich auf die vom Azimuthe unabhängigen Glieder (so dass der untere 0 In-

dex auch wegbleiben könnte), die $c$ und $s$ sind Coefficienten der Vielfache des Azimuthes enthaltenden Cosinus- und Sinusglieder. Alle diese Constanten sind bestimmbar, wenn $R'$ und $s'$ als Function von $z'$ und $a'$ gegeben sind; wo nicht, wie auch in unserem Falle, sind sie durch, an verschiedenen Punkten angestellte Beobachtungen numerisch zu bestimmen. Geht man in der nach fallenden und steigenden Potenzen von $r$ angeordneten Entwickelung des Potentiales bis einschliesslich $\frac{1}{r^{n+1}}$ und $r^n$, so hat man im Ganzen $2\,(n+1)^2$ unbestimmte Coefficienten, die durch ebensoviele unabhängige Beobachtungen ausdrückbar sind.

Die ersten Glieder des gesammten Potentiales (der innerhalb und ausserhalb der durch den Punkt $P$ gezogenen Kugelfläche gelegenen Massen) sind:

$$
\begin{aligned}
U=&(a_0^{(0)}r^{-1}+\alpha_0^{(0)})+(a_0^{(1)}r^{-2}+\alpha_0^{(1)}r)\cos z+(c_1^{(1)}r^{-2}+\gamma_1^{(1)}r)\sin z\cos a+\\
&+(s_1^{(1)}r^{-2}+\sigma_1^{(1)}r)\sin z\sin a+(a_0^{(2)}r^{-3}+\alpha_0^{(2)}r^2)(\cos^2 z-\tfrac{1}{3})+\\
&+(c_1^{(2)}r^{-3}+\gamma_1^{(2)}r^2)\sin z\cos z\cos a+(s_1^{(2)}r^{-3}+\sigma_1^{(2)}r^2)\sin z\cos z\sin a+\\
&+(c_2^{(2)}r^{-3}+\gamma_2^{(2)}r^2)\sin^2 z\cos 2a+(s_2^{(2)}r^{-3}+\sigma_2^{(2)}r^2)\sin^2 z\sin 2a+\\
&+(a_0^{(3)}r^{-4}+\alpha_0^{(3)}r^3)\cos z\,(\cos^2 z-\tfrac{3}{5})+\\
&+(c_1^{(3)}r^{-4}+\gamma_1^{(3)}r^3)\sin z\,(\cos^2 z-\tfrac{1}{5})\cos a+(s_1^{(3)}r^{-4}+\\
&+\sigma_1^{(3)}r^3)\sin z\,(\cos^2 z-\tfrac{1}{5})\sin a+(c_2^{(3)}r^{-4}+\gamma_2^{(3)}r^3)\cos z\sin^2 z\cos 2a+\\
&+(s_2^{(3)}r^{-4}+\sigma_2^{(3)}r^3)\cos z\sin^2 z\sin 2a+(c_3^{(3)}r^{-4}+\gamma_3^{(3)}r^3)\sin^3 z\cos 3a+\\
&+(s_3^{(3)}r^{-4}+\sigma_3^{(3)}r^3)\sin^3 z\sin 3a+\cdots, \qquad 14)
\end{aligned}
$$

was zugleich auch die Gleichung des Oroides wird, wenn man den aus 2) zu entnehmenden Wert von $W$ beifügt, und $V=U+W=\text{const.}$ setzt. Bequemlichkeitshalber wurden hier die Indices $i$ und $a$ weggelassen, dafür die inneren und äusseren Massen durch lateinische und griechische Buchstaben der Constanten charakterisiert.

### *Bestimmung der Constanten.*

Das unmittelbarste Instrument zur Bestimmung des Potentiales wäre das SIEMENS'sche Bathometer und das Aneroid, die beide eine Federwage vorstellen. Der Grundgedanke der Messung ist

folgender: Ist das Potential der Erde (die in morphometrischen Untersuchungen getrost als Kugel angesehen werden darf) im Seespiegel

$$U_0 = G_0 R + \tfrac{1}{2}\omega^2 R \cos^2 \beta, \qquad 15)$$

so ist es in der Höhe $H$ bei Abwesenheit irgend einer Oberflächenform

$$U_H = G_0 \frac{R^2}{(R+H)^2} + \tfrac{1}{2}\omega^2 (R+H)^2 \cos^2 \beta, \qquad 16)$$

wenn $G_0$ die Beschleunigung der Erdanziehung im Seespiegel bedeutet. Unter Vernachlässigung des Quadrates und höherer Potenzen der kleinen Grösse $\frac{H}{R}$ kommt:

$$U_H = U_0 - G_0 H + \omega^2 R H \cos^2 \beta. \qquad 17)$$

Ist aber die Höhe $H$ auf der Oberfläche einer Form gemessen, so wird wegen deren Massenwirkung die Beschleunigung der Massenanziehung der Erde am Seespiegel $G$ statt $G_0$, wo $G$ grösser oder kleiner als $G_0$ ausfällt, je nachdem die Form eine Erhebung oder eine Senke darstellt. Wegen der Anwesenheit dieser Form ist das Potential jedenfalls

$$U'_H = U_0 - GH + \omega^2 R H \cos^2 \beta \qquad 18)$$

geworden, so dass die Differenz beider

$$U'_H - U_H = (G_0 - G) H = U \qquad 19)$$

geschrieben werden kann und offenbar das Attractionspotential der Form darstellt. $G_0$ wird aus der CLAIRAUT'schen Formel berechnet, $GH$ ist unmittelbar durch das Bathometer gegeben.

Ganz analog kann auch mit dem Aneroide vorgegangen werden, vorausgesetzt, dass das Instrument genügend empfindlich ist. Mit irgend einer barometrischen Höhenformel berechne man den Luftdruck in der Höhe $H$, natürlich unter Weglassung des bekannten Correctionsgliedes $(1+0{,}002623 \cos 2\beta)\,(1+0{,}000000314\, H)$, das die Berganziehung und die geographische Lage in Berücksichtigung nimmt; der Druck sei $p$. In derselben Höhe mag das Aneroid den Druck $p'$ anzeigen. Dann ist offenbar der Drucküber-

schuss $p'-p$ die Druckänderung infolge der Berganziehung. Da nach einem gut bekannten hydrodynamischen Satze

$$p'-p=hsg, \tag{20}$$

geschrieben werden kann, wo $s$ die Dichte der Luft bezeichnet, so ist dem Früheren nach das Potential der Form

$$U=\frac{p'-p}{s} \tag{21}$$

Natürlich ist die Luftdichte im Sinne des BOYLE-GAY-LUSSAC'schen Gesetzes auszudrücken.

Dieser — überhaupt nur des Princips halber — dargelegte Vorgang kann natürlich um vieles genauer gemacht werden, wenn man neben dem Aneroide unmittelbar das Barometer abliest, da man dann von der schwer in Rechnung zu ziehenden Temperatur der Luftsäule unabhängig wird. Das Barometer giebt nämlich, wie die Wage, die Masse der Luft, das Aneroid, wie die Federwage, das durch die Anziehung der Oberflächenform beeinflusste Gewicht der Luft. Daher muss die Barometerformel die vorhin angezogenen Correctionen der Schwere-Aenderungen enthalten, deren das Aneroid nicht bedarf. Giebt also das Barometer und Aneroid zu gleicher Zeit in der Höhe $H$ die respectiven Ablesungen $b$ und $b'$, so geben diese, in irgend eine Höhenformel, gesetzt den Höhenunterschied $h$, der mit der dortselbst herrschenden Schwerebeschleunigung multipliciert, das Potententiale der Form darstellt. Die bequemste Formel ist in diesem Falle die BABINET-BRUHNS'sche; an Stelle der Drucke der untern und oberen Station kommt $b'$ und $b$, die Schwerecorrection wird weggelassen. Man hat so:

$$U=16002\,(1+0{,}0039\,t)\,g\,\frac{b'-b}{b'+b}, \tag{22}$$

wenn $t$ die Lufttemperatur am Beobachtungsorte darstellt, und angenommen wird, dass der Dunstdruck eine lineare Function der Temperatur sei. Gesteigerten Ansprüchen entsprechen vollkommen die unter Berücksichtigung der Gesetze von MENDELEJEFF und HANN gerechneten Formeln.

Viel genauere Resultate ergeben sich, wenn man das Aneroid

umgeht und das Pendel anwendet, das aber statt des Potentiales die Coefficienten von

$$g = -\frac{\partial U}{\partial r}\cos z - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\sin z}{r} \qquad 23)$$

zu bestimmen gestattet. Ein Blick auf STERNECK's Pendelmessungen (R. v. STERNECK: Die Schwerkraft in den Alpen, Mitteil. d. k. u. k. militär-geogr. Inst. Wien, 1892. XI. Bd.) zeigt, dass in bergiger Gegend schon die dritte Decimale von $g$ veränderlich ist, so dass auf diesem Wege das Potential der Berge genug genau bestimmt werden kann.

Doch giebt es auch Methoden, die selbst die Pendelmessungen weit an Empfindlichkeit übertreffen. Alle bisher besprochenen Methoden leiden an dem gemeinsamen Fehler, die kleine Anziehung des Berges neben der grossen der Erde zu geben. Apparate, die nur in horizontalen Ebenen, also der Schwerkraft sozusagen entzogen, wirken, sind dieser Fehlerquelle frei. Nach Angaben SIEMENS', soll auch das Bathometer in dieser Weise umconstruiert werden können; zweckdienliche Instrumente sind das ZÖLLNER-sche Horizontalpendel und besonders die Drehwage, die beide die in horizontalem Sinne genommenen Differentialquotienten des Oroides messen.

Die Bestimmung von $r$, $z$, $a$, d. h. des Beobachtungsortes kann graphisch und interpolatorisch mit grosser Genauigkeit vorgenommen werden. Sei $O$ der Anfangspunkt des Coordinatensystems, $H_0$ dessen Seehöhe, $H$ die Höhe des Beobachters. Beide Daten können aus Schichtenkarten leicht entnommen werden, ebenso die horizontale Entfernung $l$ des Beobachters $P$ vom Punkte $O$. Die von Norden und Osten gezählte Richtung dieser Entfernung ist das Azimuth $a$. Die Entfernung $OP$ bildet mit dem Schnitte der durch $O$ gelegten Horizontal- und der durch $OP$ gelegten Vertikalebene ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem

$$\cot z = \frac{H - H_0}{l} \quad \text{und} \quad r = \frac{l}{\sin z}, \qquad 24)$$

so dass $a$, $z$ und $r$ als bekannt gelten darf.

Behält man in dem Ausdrucke des Oroides $2(n+1)^2$ Constante

bei, so wäre die Bestimmung derselben aus $2(n+1)^2$ linearen Gleichungen jedenfalls eine nicht zu bewältigende Arbeit. Einfacher und unmittelbarer kann so vorgegangen werden. — Es ist bekannt, dass die Function $\varphi(z, a)$ in eine, nach LAPLACE'schen Functionen fortschreitende Reihe entwickelt werden kann:

$$\varphi(z, a) = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n + \cdots ; \qquad 25)$$

wobei immer

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^{2\pi} \varphi(z', a') P_n da' \qquad 26)$$

ist. Wird diese Gleichung mit 13), 12) und der bekannten Definition der Kugelfunctionen:

$$P_n = M_n M_n' + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}} (1-\mu'^2)^{\frac{i}{2}}}{(n-i+1)\ldots(n+i)} \frac{d^i M_n}{d\mu^i} \frac{d^i M_n'}{d\mu'^i} \cos i(a-a'), \qquad 27)$$

in welcher unter Beibehaltung der Bezeichnung 12)

$$M_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} f_0^{(n)}(\mu), \quad M_n' = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} f_0^{(n)}(\mu') \qquad 28)$$

ist, verglichen, so erhält man für die Coefficienten des Oroides die folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$a_0^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi} \left( \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \right)^2 \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^{2\pi} f_0^{(n)}(\mu') \varphi(z', a') da' ;$$

$$c_i^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{[1.3\ldots(2n-1).n(n-1)\ldots(n-i+1)]^2}{(n-i+1)\ldots(n+i)\,[2.4\ldots(2n)]^2} \cdot$$

$$\int_{-1}^{+1} d\mu' (1-\mu'^2)^{\frac{i}{2}} \int_0^{2\pi} f_i^{(n)}(\mu') \varphi(z', a') \cos ia' da' ; \qquad 29)$$

$$s_i^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{[1.3\ldots(2n-1).n(n-1)\ldots(n-i+1)]^2}{(n-i+1)\ldots(n+1)\,[2.4\ldots(2n)]^2} \cdot$$

$$\int_{-1}^{+1} d\mu' (1-\mu'^2)^{\frac{i}{2}} \int_0^{2\pi} f_i^{(n)}(\mu') \varphi(z', a') \sin ia' da',$$

in denen $\varphi(z', a')$ oder $\varphi(\mu', a')$ die von Punkt zu Punkt gegebenen Werte des Potentials bedeuten. Die Doppelintegrale sind mecha-

nisch leicht auswertbar, entweder durch mehrfache Anwendung des Planimeters, oder indem man für die Interpolation die FOURIER'sche Reihe berechnet.

Man ziehe um den in die Karte eingezeichneten Punkt $O$ in gleichen Winkelabständen Gerade und Kreise mit den $\sin z'_1$, $\sin z'_2$.. $\sin z'_q$ propotionalen Radien, wobei $z'_1$, $z'_2$, $z'_3$.. eine arithmetische Progression bilden mögen. Die beobachteten Werte von $U$ werden für die Schnittpunkte der Kreise und Geraden interpoliert, und die Integration bei constantem $z'$ nach $a'$ über alle Kreise ausgedehnt. Aus den Integralwerten sämmtlicher Kreise bildet man eine der Abscisse $z'$ angehörige Curve, die planimetrisch nun auch nach $z'$ integriert werden kann. Oder aber, man löst in der Gleichung des Oroides die Potenzen von $\cos z$ und $\sin z$ in Kreisfunctionen vielfacher Argumente auf, und erhält so die Anfangsglieder einer FOURIER'schen Reihe, mit Hilfe welcher die auftretenden, und lineare Functionen der Grössen $a_0^{(n)}$, $c_k^{(n)}$, $s_k^{(n)}$, $\alpha_0^{(n)}$, $\gamma_k^{(n)}$, $\sigma_k^{(n)}$ darstellenden Coefficienten ebenfalls leicht bestimmt werden können.

## *Geometrie des Oroides.*

Nach Bestimmung der Constanten ist es ein Leichtes, die morphologisch wertvollen Daten z. B. in v. SONKLAR's Definition abzuleiten; es wird genügen, hier nur das Wesentlichste zu besprechen. Die Constante des Oroides $V_0$ (die Charakteristik) sei so bestimmt, dass das Oroid durch die culminirende Spitze der Form gehe. Dann giebt die Gleichung $a=$const. das Längsprofil, die Gleichung $H-H_0=r\cos z$ die Isohypsen des Oroides. Das Aufsuchen der Spitzen, Thäler, Sättel, Kämme und Thalsohlen ist ein einfaches Maximum-Minimum-Problem, die Bestimmung des Gefälles Tangentenconstruction, das Herstellen von Mittelwerten stets auswertbare Quadratur.

Die Fusslinie der Form ist dort zu suchen, wo das Oroid irgend ein Niveausphæroid der Erde schneidet. Betrachtet man die Erde als kugelförmig, und vernachlässigt mit der Abplattung die Centrifugalkraft gleicher Ordnung, so ist die Gleichung des Niveausphæroides

$$V_0=gR,$$

oder auf den Punkt $O$ der Form bezogen:

$$V_0 = g r_0 \operatorname{tang} z_0 , \qquad 30)$$

da der zur Fusscurve gezogene Radiusvector das kugelförmige Niveausphæroid berührt. Hierin bezeichnen $r_0$, $z_0$ die Lage irgend eines Punktes der Fusscurve, $V_0$ die Constante des Erdpotentials. Eliminirt man mit Hilfe der Gleichung des Oroides $z$, so erhält man die Polargleichung der Fusscurve, und setzt man darin als Schwerebeschleunigung $g$ den für das Meeresniveau geltenden Wert, so rechnet man zur Masse des Berges im Sinne des SONKLAR-schen Sockels auch jene Masse, welche im Seespiegel beginnt und sich bis zum Fusse des Berges erhebt. Verstünde man aber unter $g$ die Schwerebeschleunigung, welche in der Höhe des Bergfusses gilt, so enthält das Oroid nur die aus der Ebene hervorragende sichtbare Masse des Berges.

Die erste Constante des Oroides ist offenbar

$$a_0^{(0)} = fM, \qquad 31)$$

wenn $M$ die Masse des Berges bedeutet. Bei bekannter geologischer Zusammensetzung führt diese zum Volumen desselben, und es ist mit der Fläche $F$ der Fusscurve leicht die mittlere Curve jener Tafel berechenbar, welche mit dem Berge gleiches Volumen einschliesst. Und je nachdem man die Fusscurve in dem Seespiegel oder in der Höhe der Ebene annimmt, erhält man in SONKLAR's Definition das Volumen des ganzen Gebirges oder einfach der auf den Sockel gelagerten Kämme.

Hiemit sind die SONKLAR'schen orometrischen Elemente auch für das Oroid dargestellt, und ähnlich können auch jene Begriffe abgeleitet werden, die von SONKLAR's Nachfolgern für nötig erachtet wurden. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Darstellung einer Form durch Isohypsen und Profile unsere Anschauung mehr anspricht, als die vollständigste morphometrische Gleichung. Hat man aber vergleichungshalber numerische Werte einmal nötig, und können diese der Natur der Sache nach nur ein schematisches Bild geben, so muss zugestanden werden, dass der hier eingeschlagene Weg zu besseren und vielsagenderen Daten führt, als die Mittelwerte geometrischer Abmessungen. Und ausserdem hat hier

jede selbstständige Messung ihren individuellen Charakter beibehalten, und ihrer Ableitung nach steht die Morphometrie auf derselben Grundlage, wie die Geodæsie, oder die Lehre vom Erdmagnetismus.

Die STERNECK'schen Schweremessungen in den Alpen, oder die unter Leitung Baron R. EÖTVÖS angestellten Beobachtungen auf dem Sághberge (ROLAND Baron EÖTVÖS: Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus, dieser Band dieser Berichte, pp. 193—243; und Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. Bd. 59, p. 372) sind in erster Reihe geeignet, ähnlichen Untersuchungen als Grundlage zu dienen.

18.

# STÖRUNGEN IM VIELKÖRPERSYSTEM.

Gelesen in der Sitzung der Akademie vom 19. October 1896 von

Dr. R. v. KÖVESLIGETHY,

C. M. DER AKADEMIE, AO. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BUDAPEST.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIV. pp. 323—366. 1896.

Die mehrfach gemachte Erfahrung, dass die Integrationsmethoden der Schwingungstheorie auf die Himmelsmechanik angewendet, stets zu bemerkenswerten Vereinfachungen führt, liess es wünschenswert erscheinen, die in der Untersuchung der Combinationstöne, der Resonanz, der Fluorescenz und Phosphorescenz übliche Ueberlegung auch auf das Vielkörperproblem zu übertragen. Dadurch zerfällt das Problem in unendlich viele, dreigliedrige Gruppen von simultanen Differentialgleichungen, die von den nur bekannte Zeitfunctionen enthaltenden rechten Seiten abgesehen, alle identisch, in den Coordinaten zweiter Ordnung und linear sind. Die Auflösung ist daher in der Tat auf die Lösung dreier simultaner linearer Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zurückgeführt. Die Integration ist in geschlossener Form möglich, führt zu expliciten Ausdrücken der Coordinaten, so dass die aufeinanderfolgenden Näherungen der schon erwähnten Linearität halber ohne weiteres summierbar sind.

Es stellte sich zwar nachträglich heraus, dass die folgenden Ableitungen der Differentialgleichungen schon CAUCHY bekannt waren. Die tatsächliche Integration war aber nicht ausgeführt, und scheint mir an sich schon wichtig genug zu sein, um bekannt zu werden, ganz abgesehen davon, dass der Gang der Störungs-

rechnung durch die vorliegende Methode ungemein durchsichtig wird, und diese auf einen — wie mir bekannt — noch nicht behandelten Fall angewendet wird.

Die Vorteile der darzulegenden Methode dürften die folgenden sein: mit gleicher analytischer (wenn auch nicht rechnerischer) Arbeit kann das Problem der $n$-Körper behandelt werden; es verschwindet der nur durch die übliche Behandlung begründete Unterschied zwischen störendem und gestörtem Körper; während des ganzen Ganges der Rechnung können die Coordinaten des Körpers unverändert beibehalten werden, wodurch die Symmetrie der Ausdrücke gewahrt bleibt; die Coordinaten kommen stets linear und explicite vor, haben in allen Näherungen dieselben Coefficienten, so dass der Uebergang von den Coordinaten zu den Elementen besonders einfach wird. Die ganze Ableitung ist weiter so einfach und klar, dass sie einen wesentlich leichten Einblick in die Störungstheorie gestattet, und in der That geeignet erscheint, die Methode der speciellen Störungen zu verdrängen. All dies schliesst natürlich die Anwendung jener Vereinfachungen nicht aus, die in gegebenen Fällen auch bisher schon empfehlenswert schien: die Berufung auf die Kleinheit der Massen und die Störungen zweiten Grades.

## Umformungen der Gleichungen der relativen Bewegung.

Wir gehen aus von dem bekannten Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_i}{dt^2} + k^2(1+m_i)\frac{x_i}{r_i^3} &= k^2\Sigma m_k\left(\frac{x_k-x_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{x_k}{r_k^3}\right);\\
\frac{d^2y_i}{dt^2} + k^2(1+m_i)\frac{y_i}{r_i^3} &= k^2\Sigma m_k\left(\frac{y_k-y_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{y_k}{r_k^3}\right);\\
\frac{d^2z_i}{dt^2} + k^2(1+m_i)\frac{z_i}{r_i^3} &= k^2\Sigma m_k\left(\frac{z_k-z_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{z_k}{r_k^3}\right);
\end{aligned} \qquad 1)$$

in welchem der Reihe nach $i=1, 2 \ldots n-1$, $n$ und $k=1, 2 \ldots n$ mit fehlendem $i$ zu setzen ist. Die Sonne mag als $n+1$-ter Körper betrachtet werden. Es ist weiter bekanntlich

$$\rho_{ki}^2=(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2+(z_k-z_i)^2.$$

Schreibt man das volle Gleichungssystem auf, so erhält man ein simultanes System von $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösung $6n$ willkürliche Constanten einführt. Die vollständige Lösung ist unbekannt, die Ausdrücke der mechanischen Principien: der Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes, der Flächenmomente und der lebendigen Kraft, die einzigen bislang gefundenen geschlossenen Quadraturen. Die übrigen Integrale müssen aus Reihenentwickelungen berechnet werden, die wie bekannt, durchaus kein einheitliches Princip befolgen, sondern je nach dem bequemst scheinenden Bahnelemente des störenden Körpers fortschreiten.

Wir zerlegen die Coordinaten aller $n$ Körper in Reihen, die nach steigenden Potenzen der kleinen, sonst aber beliebigen und während der ganzen Rechnung constant bleibenden Grösse $\varepsilon$ fortschreiten. Man hat also für den $i$-ten Planeten:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_{i0} + x_{i1}\varepsilon + x_{i2}\varepsilon^2 + \cdots; \\ y_i &= y_{i0} + y_{i1}\varepsilon + y_{i2}\varepsilon^2 + \cdots; \\ z_i &= z_{i0} + z_{i1}\varepsilon + z_{i2}\varepsilon^2 + \cdots; \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

so dass allgemein $x_{in}$ den Coefficienten des $n$-ten Gliedes in der Coordinatenentwickelung des $i$-ten Körpers bedeutet. Schreibt man noch für die Masse $m_i$:

$$m_i = \varepsilon\mu_i\,, \qquad 3)$$

so giebt das System 2) die Auflösung des Vielkörperproblems, vorausgesetzt, dass die Reihe auch noch für $\varepsilon = 1$ convergent bleibt.

Bei der Berechnung benützt man am bequemsten den Polynomsatz:

$$(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \cdots)^n = U_0 + U_1\varepsilon + U_2\varepsilon^2 + \cdots;$$

wobei:

$$U_0 = u_0^n\,;$$

$$U_1 = nu_0^{n-1}u_1\,;$$

$$U_2 = \frac{n(n-1)}{2!}u_0^{n-2}u_1^2 + nu_0^{n-1}u_2\,;$$

$$U_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u_0^{n-3}u_1^3 + n(n-1)u_0^{n-2}u_1u_2 + nu_0^{n-1}u_3\,;$$

$$U_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} u_0^{n-4} u_1^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} u_0^{n-3} u_1^2 u_2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} u_0^{n-2} u_2^2 + n(n-1) u_0^{n-2} u_1 u_3 + n u_0^{n-1} u_4 .$$

. . . . . .

Die für uns wichtige Eigenschaft der $U$-Coefficienten besteht darin, dass das mit dem höchsten Index versehene $u$ stets linear und an denselben Factor $nu_0^{n-1}$ gebunden vorkommt. Substituiert man daher die Gleichung 2) in 1) und vergleicht die Coefficienten gleichhoher $\varepsilon$ Potenzen, so werden wegen 3) erstlich $x_0$, $y_0$, $z_0$ ganz unabhängig von der auf der rechten Seite stehenden Bewegung der störenden Körper; zweitens geben die Coefficienten von $\varepsilon^m$ eine Gleichung, in welcher $x_m$, $y_m$, $z_m$ stets in derselben Verbindung vorkommen. Die noch vorkommenden Grössen $x_{m-1}$, $y_{m-1}$, $z_{m-1}$; $x_{m-2}$, $y_{m-2}$, $z_{m-2}$; . . . $x_0$, $y_0$, $z_0$ sind offenbar durch die vorhergehenden Gleichungen gegeben, können also als bekannt betrachtet, und auf die rechte Seite gebracht werden, so dass die linke Seite der zur Bestimmung von $x_m$, $y_m$, $z_m$ dienenden Gleichung stets dieselbe bleibt, die rechte Seite aber eine bekannte Zeitfunction darstellt. Für die $x$ Coordinate des $i$-ten Körpers hat man auf diese Weise:

$$x''_{i0} + k^2(1+m_i)\frac{x_{i0}}{r_{i0}^3} = 0;$$

$$x''_{i1} + k^2(1+m_i)\left((r_{i0}^{-3} - 3x_{i0}^2 r_{i0}^{-5}) . x_{i1} - 3x_{i0}y_{i0}r_{i0}^{-5} . y_{i1} - \right.$$

$$\left. - 3x_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5} . z_{i1}\right) = k^2 \Sigma \mu_k \left(\frac{x_{k0} - x_{i0}}{\rho_{ki0}^3} - \frac{x_{k0}}{r_{k0}^3}\right);$$

$$x''_{i2} + k^2(1+m_i)\left((r_{i0}^{-3} - 3x_{i0}^2 r_{i0}^{-5}) . x_{i2} - 3x_{i0}y_{i0}r_{i0}^{-5} . y_{i2} - \right.$$

$$\left. - 3x_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5} . z_{i2}\right) = k^2 \Sigma \mu_k \left(\frac{x_{k1} - x_{i0}}{\rho_{ki1}^3} - 3\frac{x_{k0} - x_{i0}}{\rho_{ki0}^5}((x_{k0} - x_{i0})\right.$$

$$(x_{k1} - x_{i1}) + (y_{k0} - y_{i0})(y_{k1} - y_{i1}) + (z_{k0} - z_{i0})(z_{k1} - z_{i1})) - \frac{x_{k1}}{r_{k0}^3} +$$

$$\left. + 3\frac{x_{k0}}{r_{k0}^5}(x_{k0}x_{k1} + y_{k0}y_{k1} + z_{k0}z_{k1})\right) -$$

$$- k^2 \left( x_{i0} \left( \frac{3 \cdot 5}{2} r_{i0}^{-7} (x_{i0} x_{i1} + y_{i0} y_{i1} + z_{i0} z_{i1})^2 - \frac{3}{2} r_{i0}^{-5} r_{i1}^2 \right) \right.$$

$$\left. - 3 x_{i1} r_{i0}^{-5} (x_{i0} x_{i1} + y_{i0} y_{i1} + z_{i0} z_{i1}) \right). \qquad 4)$$

. . . . . .

Während die linken Seiten stets dieselben bleiben, werden die rechten sehr bald ungemein compliciert, bleiben aber stets algebraische Funktionen der vorhergehenden $x$, $y$, $z$. Die erste Gleichung ist der Ausduck der einfachen KEPLER'schen Bewegung oder des Zweikörpersystems, und daher die rechten Seiten in der Tat bekannte Zeitfunctionen, in denen Kürze halber:

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \qquad 5)$$

Bezeichnet man die rechten Seiten kurz mit $X_{im}$, so kommt für die $m$-te Coordinatennäherung des $i$-ten Körpers:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 x_{im}}{dt^2} + k^2 ((r_{i0}^{-3} - 3 x_{i0}^2 r_{i0}^{-5}) \cdot x_{im} - 3 x_{i0} y_{i0} r_{i0}^{-5} \cdot y_{im} - \\
&\qquad - 3 x_{i0} z_{i0} r_{i0}^{-5} \cdot z_{im}) = X_{im}; \\
&\frac{d^2 y_{im}}{dt^2} + k^2 (-3 x_{i0} y_{i0} r_{i0}^{-5} \cdot x_{im} + (r_{i0}^{-3} - 3 y_{i0}^2 r_{i0}^{-5}) \cdot y_{im} - \\
&\qquad - 3 y_{i0} z_{i0} r_{i0}^{-5} \cdot z_{im}) = Y_{im}; \\
&\frac{d^2 z_{im}}{dt^2} + k^2 (-3 x_{i0} z_{i0} r_{i0}^{-5} \cdot x_{im} - 3 y_{i0} z_{i0} r_{i0}^{-5} \cdot y_{im} + \\
&\qquad + (r_{i0}^{-3} - 3 z_{i0}^2 r_{i0}^{-5}) \cdot z_{im}) = Z_{im};
\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

in denen der Reihe nach $i = 1, 2 \ldots n$ und $m = 1, 2 \ldots \infty$ zu setzen ist. Das ursprüngliche simultane Gleichungssystem löst sich daher in eine unendliche Zahl von dreigliedrigen simultanen Gruppen, die bis auf die rechte Seite identisch und für die Unbekannten $x_m$, $y_m$, $z_m$ linear sind. Gelingt es daher ein solches System zu integrieren, so ist die volle Lösung des Vielkörperproblems auf eine unendliche Anzahl von Quadraturen reduciert.

Im Folgenden möge vor der Hand der Index $i$ und $m$ weggelassen werden. Man hat es daher mit dem folgenden System zu tun:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2}{r_0^5}(r_0^2 - 3x_0^2).x - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0y_0.y - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0z_0.z = X\\
&\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0y_0.x + \frac{k^2}{r_0^5}(r_0^2 - 3y_0^2).y - \frac{3k^2}{r_0^5}y_0z_0.z = Y\\
&\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0z_0.x - \frac{3k^2}{r_0^5}y_0z_0.y + \frac{k^2}{r_0^5}(r_0^2 - 3z_0^2).z = Z
\end{aligned}\right\} \ldots 7)$$

in welchem:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + k^2\frac{x_0}{r_0^3} = 0; \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} + k^2\frac{y_0}{r_0^3} = 0; \quad \frac{d^2z_0}{dt^2} + k^2\frac{z_0}{r_0^3} = 0. \quad 8)$$

## Integration der reducierten Differentialgleichungen.

Der Anfangspunkt unseres Coordinatensystems fällt zwar in den Mittelpunkt der Sonne, ist aber sonst noch nicht näher beschränkt. Wie immer auch die Bahn der Planeten beschaffen sein möge, stets bestimmen der momentane Ort und die dazu gehörige Geschwindigkeit: $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sechs Constanten, die eine mit ihrem Brennpunkt in der Sonne liegende KEPLER'sche Ellipse zu bestimmen gestatten, in welcher die Bewegung im nächsten $dt$ Zeitelemente den KEPLER'schen Gesetzen entsprechend vor sich geht. Diese zur Zeit $T_0$ osculierende Ellipse sei die Fundamentalebene $x_0, y_0$, so dass

$$z_0 = 0 \quad 9)$$

wird, ausserdem sei die positive $x_0$ Axe gegen das Perihelium der osculierenden Ellipse gerichtet, so dass die Gleichungen

$$x_0 = r_0\cos v; \quad y_0 = r_0\sin v; \quad r_0(1 + e\cos v) = a(1 - e^2), \quad 10)$$

zu Recht bestehen. Die wahre Anomalie $v$, die halbe grosse Axe $a$ und die numerische Excentricität erheischen keine 0 Indices, da sie im ganzen Laufe der Rechnung beibehalten werden. Sie sind also nachträglich nur mit dem Planetenindex $i$ zu versehen. Diese Vereinfachung bestimmt nur die Lage des Coordinatensystems, verringert zwar die Zahl der Constanten in dem als erste Näherung

betrachteten Probleme der zwei Körper, übt aber durchaus keinen Einfluss oder keine Beschränkung auf die Zahl der später auftretenden Constanten aus.

Dem Gesagten nach kann 7) in folgender einfacher Form geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2}{r_0^3}(1-3\cos^2 v).x - \frac{3k^2}{r_0^3}\sin v\cos v.y = X;\\ &\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3k^2}{r_0^3}\sin v\cos v.x + \frac{k^2}{r_0^3}(1-3\sin^2 v).y = Y;\\ &\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2}{r_0^3}z = Z; \end{aligned}\right\} \ldots 11)$$

die zwar in der $z$ Coordinate weniger symmetrisch, aber bedeutend einfacher ist.

Wir führen nun statt der laufenden Zeit die wahre Anomalie in der osculierenden Ellipse ein, was neben vielen Vorteilen mit dem einen Nachteil verbunden ist, das die unabhängige Variabele für alle Planeten eine andere wird. Man hat in dem Zweikörperprobleme:

$$\frac{dv}{dt} = k\sqrt{1+m}\sqrt{a(1-e^2)}\frac{1}{r_0^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1+e\cos v)^2, \quad 12)$$

und infolge dessen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k^2(1+m)}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos v)^4\frac{d^2x}{dv^2} - \\ - \frac{2k^2(1+m)e}{a^3(1-e^2)^3}\sin v(1+e\cos v)^3\frac{dx}{dv}; \quad 13)$$

so dass die Gleichungen unter 11) werden:

$$\left.\begin{aligned} &(1+e\cos v)\frac{d^2x}{dv^2} - 2e\sin v\frac{dx}{dv} + (1-3\cos^2 v)x - 3\sin v\cos vy = \\ &\qquad = \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{X}{(1+e\cos v)^3};\\ &(1+e\cos v)\frac{d^2y}{dv^2} - 2e\sin v\frac{dy}{dv} - 3\sin v\cos vx + (1-3\sin^2 v)y = \\ &\qquad = \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{Y}{(1+e\cos v)^3}; \end{aligned}\right\} 14)$$

$$(1+e\cos v)\frac{d^2z}{dv^2} - 2e\sin v\frac{dz}{dv} + z = \\ = \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{Z}{(1+e\cos v)^3}; \qquad 14)$$

wo statt der rechten Seiten auch $\frac{r_0^3}{k^2(1+m)}X$ u. s. w. geschrieben werden kann.

Setzt man nun statt der rechten Seiten Nullen, so wird die dritte Gleichung durch die Substitution

$$(1+e\cos)z=\zeta \qquad 15)$$

sogleich integrabel, man findet:

$$\frac{d^2\zeta}{dv^2}+\zeta=0 \qquad 16)$$

und als Auflösung derselben

$$\zeta=E\sin v+F\cos v, \qquad 17)$$

oder mit Beibehaltung der rechten Seite

$$z(1+e\cos v)=\mathfrak{E}\sin v+\mathfrak{F}\cos v+\frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\Big(\sin v\int\frac{Z\cos v}{(1+e\cos v)^3}dv \\ -\cos v\int\frac{Z\sin v}{(1+e\cos v)^3}dv\Big); \qquad 18)$$

wo $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ die notwendigen beiden willkürlichen Constanten darstellen.

Setzt man ähnlich, wie in 15) auch

$$x(1+e\cos v)=\xi; \quad y(1+e\cos v)=\eta; \qquad 19)$$

so ergeben die beiden ersten Gleichungen der Gruppe 14)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\xi-\frac{3\cos v}{1+e\cos v}(\xi\cos v+\eta\sin v)&=\frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{X}{(1+e\cos v)^3};\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}+\eta-\frac{3\sin v}{1+e\cos v}(\xi\cos v+\eta\sin v)&=\frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{Y}{(1+e\cos v)^3};\end{aligned}\right\}\ldots 20)$$

die wir zunächst unter der Annahme $X=Y=0$ integrieren wollen.

Multipliciert man die erste Gleichung mit $\sin v$, die zweite mit $-\cos v$ und addirt, so erhält man eine integrable Gleichung:

$$\frac{d\xi}{dv}\sin v - \frac{d\eta}{dv}\cos v - \xi\cos v - \eta\sin v = C_1. \qquad 21)$$

Aus der ersten Gleichung folgt weiter

$$\eta = \frac{1+e\cos v}{3\sin v\cos v}(\xi''+\xi) - \xi\operatorname{cotg} v, \qquad 22)$$

welche in die eben gefundene Integralgleichung gesetzt, für $\xi$ liefert:

$$\sin v\cos v(1+e\cos v)\frac{d^3\xi}{dv^3} + (2+e\cos v - 3\cos^2 v - 2e\cos^3 v)\frac{d^2\xi}{dv^2} +$$
$$+ \sin v\cos v(e\cos v - 2)\frac{d\xi}{dv} +$$
$$+ (2+e\cos v - 2e\cos^3 v)\xi + 3\sin^2 v\cos v C_1 = 0, \qquad 23)$$

deren Auflösung mit $C_1$ zusammen die notwendige Anzahl willkürlicher Constanten herstellt.

Die Substitution

$$\xi = C_2\sin v + \sin v\int U dv \qquad 24)$$

giebt die einfachere Gleichung

$$\sin^2 v\cos v(1+e\cos v)\frac{d^2U}{dv^2} + \sin v(2+e\cos v + e\cos^3 v)\frac{dU}{dv} -$$
$$-(\cos v + \cos^3 v + 2e\cos^4 v)U + 3\sin^2 v\cos v C_1 = 0, \qquad 25)$$

welche durch die ähnliche Substitution

$$U = C_3\sin v + \sin v\int V dv \qquad 26)$$

endlich in

$$\sin v\cos v(1+e\cos v)\frac{dV}{dt} + (2+e\cos v + 2\cos^2 v + 3e\cos^3 v)V +$$
$$+ 3C_1\cos v = 0 \qquad 27)$$

übergeht. Setzt man kurz

$$\omega = \int\frac{2+e\cos v + 2\cos^2 v + 3e\cos^3 v}{\sin v\cos v(1+e\cos v)}dv, \qquad 28)$$

so wird das Integral $V$

$$V=e^{-\omega}\left(C_4-3C_1\int\frac{e^{+\omega}dv}{\sin v\,(1+e\cos v)}\right), \tag{29}$$

wobei als Erleichterung dienen kann, dass der Zähler in $\omega$ in der Form $(1+e\cos v)\ (1+3\cos^2 v)+\sin^2 v$ geschrieben werden kann. Das fertige Resultat lautet:

$$\omega=\lg\left(\frac{\sin^4 v}{\cos^2 v}(1+e\cos v)\right), \tag{30}$$

womit endlich $V$

$$V=\frac{C_4-6C_1\cos v-C_4\sin^2 v+3C_1\sin^2 v\cos v}{\sin^4 v\,(1+e\cos v)}. \tag{31}$$

wird. Mit Rücksicht auf die angewendeten Substitutionen kommt

$$\xi=C_2\sin v-C_3\sin v\cos v+\sin v\int dv\sin v\int Vdv. \tag{32}$$

Berechnet man die auftretenden einfachen Quadraturen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\int Vdv=&\frac{C_4e+6C_1}{3\,(1-e^2)}\sin^{-3}v+\frac{C_4(1+2e^2)+3e(5+e^2)\,C_1}{3\,(1-e^2)^2}\cos v\sin^{-1}v\\&-\frac{C_4+6C_1e}{3\,(1-e^2)}\cos v\sin^{-3}v-\frac{eC_4+3C_1(1+e^2)}{(1-e^2)^2}\sin^{-1}v+\\&+\frac{e^2C_4+3C_1e\,(1+e^2)}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E;\end{aligned} \tag{33}$$

womit endlich $\xi$ in der Form

$$\begin{aligned}\xi=&\frac{1}{3\,(1-e^2)^2}(C_4(2+e^2)+3eC_1(7-e^2))+C_2\sin v-\\&-\frac{eC_4+6C_1}{3\,(1-e^2)}\cos v-C_3\sin v\cos v-\\&-\frac{C_4(1+2e^2)+3eC_1(5+e^2)}{3\,(1-e^2)^2}\cos^2 v-\\&-\frac{eC_4+3C_1(1+e^2)}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E\sin v(1+e\cos v)\end{aligned} \tag{34}$$

geschrieben werden kann. Hiebei bedeutet $E$ stets die excentrische Anomalie. Durch blosse Differentiation erhält man hieraus mit der Gleichung 22) auch $\eta$; das Resultat ist:

$$\begin{aligned}\eta = C_3 + (eC_3 - C_2)\cos v + C_3\cos^2 v - \\ - \frac{(1+2e^2)C_4 + 3C_1(5e+e^3)}{3(1-e^2)^2}\sin v\cos v - \\ - \frac{(2e+e^3)C_4 + (2+3e^2+e^4)\cdot 3C_1}{3(1-e^2)^2}\sin v + \\ + \frac{eC_4 + 3C_1(1+e^2)}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E(1+e\cos v)(e+\cos v);\end{aligned} \quad 35)$$

und befriedigt mit $\xi$ zugleich das System 20) identisch, wenn die rechten Seiten Null sind.

Statt der Constanten $C_1 \ldots C_4$ mögen die folgenden eingeführt werden:

$$\frac{C_4}{3(1-e^2)^2} = A; \quad \frac{3C_1}{3(1-e^2)^2} = B; \quad C_2 = C; \quad C_3 = D; \quad 36)$$

was zu den einfacheren Formeln

$$\left.\begin{aligned}\xi = ((2+e^2)A + (7e-e^3)B) + C\sin v - \\ - (e(1-e^2)A + 2(1-e^2)B)\cos v - D\sin v\cos v - \\ - ((1+2e^2)A + (5e+e^3)B)\cos^2 v - \\ - \frac{3}{\sqrt{1-e^2}}(eA + (1+e^2)B)\cdot E\sin v(1+e\cos v); \\ \eta = D(1+\cos^2 v) + (eD-C)\cos v - \\ - ((1+2e^2)A + (5e+e^3)B)\sin v\cos v - \\ - ((2e+e^3)A + (2+3e^2+e^4)B)\sin v + \\ + \frac{3}{\sqrt{1-e^2}}(eA + (1+e^2)B)\cdot E(e+\cos v)(1+e\cos v).\end{aligned}\right\} \quad 37)$$

führt.

## Lösung der vollständigen Differentialgleichung.

Setzt man Kürze halber

$$\frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{X}{(1+e\cos v)^3}=X';\quad \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{Y}{(1+e\cos v)^3}=Y';\quad 38)$$

so kann die Form 37) auch als Lösung der vollständigen Differentialgleichung betrachtet werden, wenn die Constanten nun als Function der Zeit aufgefasst werden. Sie müssen zu diesem Zwecke das folgende Gleichungssystem befriedigen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA}{dv}\Big(-e(2+e^2)\sin v+2(1+2e^2)\sin v\cos v-\\
&\qquad-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(2e\cos^2 v+\cos v-e)\Big)+\\
&+\frac{dB}{dv}\Big(-(1+5e^2)\sin v+2e(5+e^2)\sin v\cos v-\\
&\qquad-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E(2e\cos^2 v+\cos v-e)\Big)+\\
&\qquad+\frac{dC}{dv}\cos v-\frac{dD}{dv}(2\cos^2 v-1)=X';\\
&\frac{dA}{dv}\Big((1+5e^2)+(e-e^3)\cos v-2(1+2e^2)\cos^2 v-\\
&\qquad-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}\sin v(e^2+1+2e\cos v)E\Big)+\\
&+\frac{dB}{dv}\Big((8e+4e^3)+(1-e^4)\cos v-2(5e+e^3)\cos^2 v-\\
&\qquad-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e^2+2e\cos v)\Big)+\\
&\qquad+\frac{dC}{dv}\sin v-\frac{dD}{dv}\sin v(e+2\cos v)=Y';
\end{aligned}\right\}\quad\ldots 39)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA}{dv}\left((2+e^2)-e(1-e^2)\cos v-(1+2e^2)\cos^2 v-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\right)+\\
&+\frac{dB}{dv}\left((7e-e^3)-2(1-e^2)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}.E\sin v(1+e\cos v)\right)+\\
&\qquad+\frac{dC}{dv}\sin v-\frac{dD}{dv}\sin v\cos v=0;\\
&\frac{dA}{dv}\left(-(1+2e^2)\sin v\cos v-(2e+e^3)\sin v+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(1+e\cos v)(e+\cos v)\right)+\\
&+\frac{dB}{dv}\left(-(5e+e^3)\sin v\cos v-(2+3e^2+e^4)\sin v+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}.E(1+e\cos v)(e+\cos v)\right)-\\
&\qquad-\frac{dC}{dv}\cos v+\frac{dD}{dv}(1+e\cos v+\cos^2 v)=0.
\end{aligned}\right\}\ldots 39)$$

Setzt man darin $\frac{dA}{dv}=A'$; $\frac{dB}{dv}=B'\ldots$; und bezeichnet den $A'$ und $B'$ enthaltenden Teil der vier Gleichungen der Reihe nach mit I, II, III, IV, so kann 39) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I}+C'\cos v-D'(2\cos^2 v-1)=X';\\
&\text{II}+C'\sin v-D'(e\sin v+2\sin v\cos v)=Y';\\
&\text{III}+C'\sin v-D'\sin v\cos v=0;\\
&\text{IV}-C'\cos v+D'(1+e\cos v+\cos^2 v)=0.
\end{aligned}\right\}\ldots 40)$$

Die Summe der ersten und vierten, die Differenz der zweiten und dritten Gleichung giebt:

$$\begin{aligned}
&\text{I}+\text{IV}+D'(2+e\cos v-\cos^2 v)=X';\\
&\text{II}-\text{III}-D'(e\sin v+\sin v\cos v)=Y';
\end{aligned}$$

und nach Elimination von $D'$:

$$(\mathrm{I}+\mathrm{IV})(e\sin v+\sin v\cos v)+(\mathrm{II}-\mathrm{III})(2+e\cos v-\cos^2 v)= \\ = X'(e\sin v+\sin v\cos v)+Y'(2+e\cos v-\cos^2 v). \qquad 41)$$

Subtrahiert man aber die dritte Gleichung von der ersten, nachdem man diese mit $\cos v$, jene mit $\sin v$ multipliciert hat, und addiert man die zweite und vierte, nachdem man der Reihe nach mit $\cos v$ und $\sin v$ multipliciert hat, so kommt:

$$\mathrm{I}\sin v-\mathrm{III}\cos v+D'(\sin v-\sin v\cos^2 v)=X'\sin v; \\ \mathrm{II}\cos v+\mathrm{IV}\sin v+D'(\sin v-\sin v\cos^2 v)=Y'\cos v,$$

durch deren Subtraction eine neue, ebenfalls nur $A'$ und $B'$ enthaltende Gleichung entsteht:

$$(\mathrm{I}-\mathrm{IV})\sin v-(\mathrm{II}+\mathrm{III})\cos v=X'\sin v-Y'\cos v. \qquad 42)$$

Die in 41) und 42) vorkommenden Ausdrücke $\mathrm{I}\pm\mathrm{IV}$ und $\mathrm{II}\pm\mathrm{III}$ werden:

$$\mathrm{I}+\mathrm{IV}=A'\Big(-(4e+2e^3)\sin v+(1+2e^2)\sin v\cos v+ \\ +\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(2e+e^2\cos v-e\cos^2 v)\Big)+ \\ +B'\Big(-(3+8e^2+e^4)\sin v+(5e+e^3)\sin v\cos v+ \\ +\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1+e^2}}E(2e+e^2\cos v-e\cos^2 v)\Big);$$

$$\mathrm{I}-\mathrm{IV}=A'\Big(3(1+2e^2)\sin v\cos v- \\ -\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(2\cos v+e^2\cos v+3e\cos^2 v)\Big)+ \\ +B'\Big((1-2e^2+e^4)\sin v+3(5e+e^3)\sin v\cos v- \\ \frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E(2\cos v+e^2\cos v+3e\cos^2 v)\Big);$$

$$\text{II}+\text{III}=A'\Big((3+6e^2)-3(1+2e^2)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(2+e^2+3e\cos v)\Big)+$$
$$+B'\Big((15e+3e^3)-(1-2e^2+e^4)\cos v-3(5e+e^3)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(2+e^2+3e\cos v)\Big);$$
$$\text{II}-\text{III}=A'\Big(-(1-4e^2)+2(e-e^3)\cos v-(1+2e)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e^2+e\cos v)\Big)+$$
$$+B'\Big((e+5e^3)+(3-2e^2-e^4)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e^3+e\cos v)\Big);$$

und deren Substitution in 42) giebt

$$(1-e^2)^2 B'=X'\sin v-Y'\cos v, \qquad 43)$$

während die Einsetzung in 41) zu der Gleichung

$$-2(1-e^2)^2 A'-(e(1-e^2)^2-3(1-e^2)^2\cos v)B'=$$
$$=X'\sin v(e+\cos v)+Y'(2+e\cos v-\cos^2 v); \qquad 44)$$

und mit Berücksichtigung von 43) zu

$$(1-e^2)^2 A'=-(X'\sin v(e-\cos v)+Y'(1+\cos^2 v)); \qquad 45)$$

führt. Die Wiedereinsetzung dieser Werte in eine der Gleichung, die ausser $D'$ nur die Grössen I, II, III, IV enthält, giebt

$$(1-e^2)^2\sin v(e+\cos v)D'=X'\sin v\Big((2e+e^3)+(2+e^4)\cos v$$
$$-(2e+e^3)\cos^2 v-(1+2e^2)\cos^3 v-$$
$$-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e+\cos v)(1+e\cos v)\Big)+$$

$$+Y'\Big(-(2e^2+e^4)-3(e+e^3)\cos v-(1-e^4)\cos^2 v+$$

$$+3(e+e^3)\cos^3 v+(1+2e^2)\cos^4 v+$$

$$+\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e+\cos v)(e+\cos v+e^2\cos v+e\cos^2 v)\Big);\quad 46)$$

und endlich folgt aus irgend einem Gliede der Gruppe 40) auch

$$(1-e^2)^2\sin v(e+\cos v)C'=-X'\sin v\Big((5e^2-2e^4)+$$

$$+(3e+e^3-e^5)\cos v-(2+e^2)\cos^2 v-(4e-e^3)\cos^3 v-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)(e+\cos v)\Big)-Y'\Big(-(2e+e^3)-$$

$$-(2+5e^2-e^4)\cos v-2(e-e^3)\cos^2 v+(2+5e^2-e^4)\cos^3 v+$$

$$+(4e-e^3)\cos^4 v+\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e^2+(2e+e^3)\cos v+$$

$$+(1+2e^2)\cos^2 v+e\cos^3 v)\Big).\quad 47)$$

Nach einigen Zusammenziehungen hat man demnach

$$\left.\begin{aligned}
A&=\mathfrak{A}-\int\frac{X'\sin v}{(1-e^2)^2}(e-\cos v)\,dv-\int\frac{Y'}{(1-e^2)^2}(1+\cos^2 v)\,dv;\\
B&=\mathfrak{B}-\int\frac{X'\sin v}{(1-e^2)^2}\,dv-\int\frac{Y'\cos v}{(1-e^2)^2}\,dv;\\
C&=\mathfrak{C}-\int\frac{X'}{(1-e^2)^2}\Big((5e-2e^3)-(2-3e^2+e^4)\cos v-\\
&\qquad-(4e-e^3)\cos^2 v-\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\Big)dv-\\
&\quad-\int\frac{Y'}{(1-e^2)^2}\Big(-(2+e^2)\sin v-(4e-e^3)\sin v\cos v+\\
&\qquad+\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E(1+e\cos v)(e+\cos v)\Big)dv;
\end{aligned}\right\}\quad 48)$$

$$
\begin{aligned}
D = \mathfrak{D} &+ \int \frac{X'}{(1-e^2)^2}\Big((2+e^2)-(e-e^3)\cos v-(1+2e^2)\cos^2 v- \\
&- \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} E \sin v\,(1+e\cos v)\Big)\,dv \\
&+ \int \frac{Y'}{(1-e^2)^2}\Big(-(2e+e^3)\sin v-(1+2e^2)\sin v\cos v + \\
&+ \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} E\,(e+\cos v)\,(1+e\cos v)\Big)\,dv\,;
\end{aligned}
\qquad 48)
$$

so dass mit diesen Werten das vollständige Integral von 20) unter Berücksichtigung der Gleichungen 37) und der Bezeichnungen 38) und 19) hingeschrieben werden kann:

$$
\begin{aligned}
\xi = (1+e\cos v)\,x = A\Big((2+e^2)-e\,(1-e^2)\cos v-(1+2e^2)\cos^2 v- \\
- \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} E \sin v\,(1+e\cos v)\Big) + \\
+ B\Big((7e-e^3)-2\,(1-e^2)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v - \\
- \frac{3\,(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E \sin v\,(1+e\cos v)\Big) + \\
+ C\sin v - D\sin v\cos v\,; \\
\eta = (1+e\cos v)\,y = A\Big(-(1+2e^2)\sin v\cos v-(2e+e^3)\sin v + \\
+ \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} E\,(e+\cos v)\,(1+e\cos v)\Big) + \\
+ B\Big(-(5e+e^3)\sin v\cos v-(2+3e^2+e^4)\sin v + \\
+ \frac{3\,(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E\,(e+\cos v)\,(1+e\cos v)\Big) - \\
- C\cos v + D\,(1+e\cos v+\cos^2 v),
\end{aligned}
\qquad 49)
$$

in welchen $A, B, C, D$ natürlich aus der vorhergehenden Gleichungsreihe zu nehmen sind.

Die Gleichungen 18) und 48—49) sind die vollständige

Lösung der Gruppe 14) mit den notwendigen 6 Constanten: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{F}$.

Bezieht man diese Gleichung auf die $m$-te Coordinatennäherung des $i$-ten Planeten, so bekommen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{F}$, $X'$, $Y'$, $Z'$, $x, y, z$ den Index $_{im}$, die Elemente $a, e, m, v$ und $E$ den einfachen Index $_i$, insofern diese Grössen in allen Näherungen desselben Planeten constant bleiben. Im Falle von $n$ Körper erhält man also in der Tat $6n$ Integrationsconstanten, da aber unendlich viele Gleichungssysteme vorhanden sind, so könnte es den Anschein haben, dass im Ganzen $6mn$, also für $m=\infty$ unendlich viele Constanten auftreten. Das ist ein Irrtum, insofern schliesslich nur $6n$ Constanten bleiben. Schreibt man nämlich für irgend einen Planeten die aufeinanderfolgenden Näherungen

$$x_{i0},\ x_{i1},\ x_{i2},\ \ldots\ x_{im}$$

auf, und multiplicirt dieselben der Reihe nach mit $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2 \ldots$ $\varepsilon^m \ldots$ und addirt hierauf, so treten die unendlich vielen Constanten, z. B. die durch $\mathfrak{A}$ bezeichneten in der Form

$$\mathfrak{A}_{i0}+\varepsilon\mathfrak{A}_{i1}+\varepsilon^2\mathfrak{A}_{i2}+\cdots+\varepsilon^m\mathfrak{A}_{im}+\cdots$$

auf, insofern die Factoren von $A, B, C, D$ von dem Indexe $m$ der Näherung unabhängig sind. Der aufgeschriebene Ausdruck entspricht aber, trotzdem darin unendlich viele $\mathfrak{A}$ Coefficienten vorkommen doch nur der einen willkürlichen Constanten $\mathfrak{A}_i$.

Da die Berechnung der vorkommenden Ausdrücke ziemlich verwickelt ist, dürfte die Bemerkung nicht überflüssig sein, dass die Integrale 49) unter Berücksichtigung von 48) in das System 20) eingesetzt, die Probe $0=0$ ergeben.

Zu besonders einfachen, doch im Allgemeinen nur einer imaginären Osculationsepoche entsprechenden Ausdrücken würde man gelangen, wenn die osculierende Bahn ein Kreis wäre. Es ist dann $e=0$ und $v=E=M$ der mittleren Anomalie gleich. Man hat für diesen Fall:

$$\xi = x = (2-\cos^2 M)\,(\mathfrak{A}+\int X' \sin M \cos M dM - \int Y'(1+\cos^2 M) dM) -$$
$$-(2+3M\sin M)\,(\mathfrak{B}+\int X' \sin M dM - \int Y' \cos M dM) +$$
$$+\sin M\,(\mathfrak{C}+\int X'\,(2\cos M+3M\sin M)\,dM +$$
$$+\int Y'(2\sin M - 3M\cos M)\,dM) -$$
$$-\sin M\cos M\,(\mathfrak{D}+\int X'(2-\cos^2 M)\,dM - \int Y' \sin M\cos M dM);$$

$$\eta = y = -\sin M\cos M\,(\mathfrak{A}+\int X'\,(\sin M\cos M dM -$$
$$-\int Y'\,(1+\cos^2 M)\,dM) - (2\sin M - 3M\cos M).$$
$$(\mathfrak{B}+\int X' \sin M dM - \int Y' \cos M dM) -$$
$$-\cos M\,(\mathfrak{C}-\int X'\,(2\cos M+3M\sin M)\,dM +$$
$$+\int Y'\,(2\sin M - 3M\cos M)\,dM) +$$
$$+(1+\cos^2 M)\,(\mathfrak{D}+\int X'(2-\cos^2 M)\,dM - \int Y' \sin M\cos M dM).$$

Unter Einführung der besagten Osculationsperiode würden auch die auftretenden Quadraturen bedeutend einfacher, da diese nicht nach der wahren Anomalie der verschiedenen Planeten, sondern überhaupt nach einer der Zeit einfach proportionalen Grösse gebildet sind.

Nun kann auch einfach das allgemeine Integral des Systems 7) hingeschrieben werden. Bezeichnet man die auf die Ekliptik bezogenen Coordinaten mit $x'$, $y'$, $z'$, und richtet die positive $x'$ Axe gegen das Frühlingsäquinoctium, so bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
x' &= (\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i)\,x - \\
&\quad -(\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega\cos i)\,y + (\sin i\sin\Omega)\,z; \\
y' &= (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)\,x + \\
&\quad +(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)\,y - (\sin i\cos\Omega)\,z; \\
z' &= (\sin\omega\sin i)\,x + (\cos\omega\sin i))\,y + (\cos i)\,z;
\end{aligned}\right\} \quad 50)$$

in welchen $x$, $y$, $z$ durch 49) und 18) ersetzt werden müssen.

## Gang der Störungsrechnung.

Für eine beliebige Epoche werden die elliptischen Elemente der Planeten entnommen, die durch den ganzen Verlauf der weiteren Rechnung constant bleiben. Sie repräsentieren die Lösung der ersten Gleichung in 4). Damit kann sogleich die rechte Seite der zweiten Gleichung bestimmt werden, nämlich die Grössen:

$$k^2 \Sigma \mu_k \left( \frac{x_k - x_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{x_k}{r_k^3} \right);$$

$$k^2 \Sigma \mu_k \left( \frac{y_k - y_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{y_k}{r_k^3} \right);$$

$$k^2 \Sigma \mu_k \left( \frac{z_k - z_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{z_k}{r_k^3} \right);$$

die rein von der elliptischen Bewegung aller Planeten abhängen, und die $x_1$, $y_1$, $z_1$ liefern. Mit diesen Grössen wird die rechte Seite der zweiten Näherung gerechnet u. s. f. Es erheischt also die ganze Rechnung nur die Auswertung aufeinanderfolgender Quadraturen. Die Summe aller Näherungen, in denen nun unter $\mu$ die eigentliche Planetenmasse verstanden wird, giebt die Coordinaten der Planeten mit den nötigen $6n$ Constanten.

Einigen Unterschied macht es, ob man von dem einfachen Systeme 49) oder dem verwickelteren 50) ausgeht. Im ersteren Falle bezieht sich jede Coordinatennäherung eines jeden Planeten auf dessen osculierende Bahn als Fundamentalebene; vor der Berechnung der Grössen $X$, $Y$ und $Z$ muss also alles auf dasselbe System reduciert werden. Rechnet man aber nach 50) so ist während der ganzen Rechnung keine Coordinatentransformation mehr nötig.

Man kann dabei natürlich alle Vereinfachungen anwenden, die durch die Natur des Problems geboten sind; hält man z. B. an dem Principe der Superposition kleiner Störungen fest, so ist die Bewegung des störenden Körpers die einfache Kepler'sche Bewegung, und statt eines simultanen Systems von $3n$ Gleichungen erhält man blos ein solches von 3 Gleichungen.

Insofern man in der Störungstheorie meist nicht die Coordinaten des Planeten, sondern nur deren Abweichungen von den

KEPLER'schen Werten sucht, kann in den Reihenentwickelungen vom Anfangsgliede $x_0$, $y_0$, $z_0$ abgesehen werden. Diese drücken nämlich die KEPLER'sche Bewegung aus, also die Coordinaten selbst, wenn $m_k = \mu_k = 0$ wäre, ein störender Körper nicht vorhanden ist. Es ist also für $\varepsilon = 1$:

$$\begin{aligned} \delta x &= x_1 + x_2 + \cdots; \\ \delta y &= y_1 + y_2 + \cdots; \\ \delta z &= z_1 + z_2 + \cdots \end{aligned}$$

der Ausdruck der Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten.

Die Störungen erster Ordnung sind also einfach durch die Störungsfunction

$$V = \frac{a^3(1-e^2)^3}{1+m} \Sigma m_k \left( \frac{1}{\rho_k} - \frac{x_k x + y_k y + z_k z}{r_k^3} \right)$$

ausdrückbar, insofern als die nach den Coordinaten $x$, $y$, $z$ genommenen Differentialquotienten dieses Ausdruckes die rechte Seite der ersten Näherungsgleichung bilden. Allgemein bekannt sind die Vorschriften, welche sich auf die Entwickelung dieser Function nach Cosinussen der Vielfachen einer Zeitfunction beziehen, und welche den Uebergang der hier behandelten Störungen zu Störungen in den Polarcoordinaten oder den Elementen der Bahn vermitteln. Es möge einfach verzeichnet werden, dass die Störungen erster Ordnung in Polarcoordinaten aus der Gleichung 49) werden:

$$\begin{aligned} (1+e\cos v)\,\delta r = A \Big( & -e(2+e^2) + (1-e^2)\cos v + e(1+2e^2)\cos^2 v + \\ & + \frac{3e^2}{\sqrt{1-e^2}} E \sin v (1+e\cos v) \Big) \\ + B \Big( & -(2+3e^2+e^4) + 2e(1-e^2)\cos v + \\ & + e^2(5+e^2)\cos^2 v + \frac{3e(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E \sin v (1+e\cos v) \Big) \\ + D & (1+e\cos v)\sin v; \end{aligned}$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

$$(1+e\cos v)\,r\delta v = A\left(-(2+e^2)\sin v - e(1+2e^2)\sin v\cos v + \right.$$
$$\left. + \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} E(1+e\cos v)^2\right)$$
$$+ B\left(-(7e-e^3)\sin v - e^2(5+e^2)\sin v\cos v + \right.$$
$$\left. + \frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E(1+e\cos v)^2\right)$$
$$- C + D\cos v(2+e\cos v).$$

Zur Bestimmung der Constanten diene die Bemerkung, dass das Gleichungssystem 48)—49) auch für das Zweikörperproblem giltig ist, wenn störende Massen nicht vorhanden sind, also $X'=Y'=Z'=0$ gesetzt wird. Dann ist aber $A=\mathfrak{A}$, $B=\mathfrak{B}$, $C=\mathfrak{C}$, $D=\mathfrak{D}$, und weiter $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}=0$, was die Bestimmung sehr erleichtert. Alle diese Elemente beziehen sich dann natürlich auf die osculierende Bahn als Fundamentalebene; auf die Ekliptik bezogen müssen die vollständigen Gleichungen 50) als Ausgangspunkt dienen.

Es erübrigt noch tür die in die Gleichung 6) eintretenden Grössen $X$, $Y$, $Z$ oder die $X'$, $Y'$, $Z'$ der Gleichung 38) bequeme Definitionen zu geben. Zu diesem Zwecke sei kurz

$$-k^2\frac{x_i}{r_i} + \Sigma k^2 m_k\left(\frac{x_k-x_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{x_k}{r_k^3}\right) = \Xi(\varepsilon), \qquad 53)$$

wenn man hierin nämlich die Substitution 2) vorgenommen denkt. Aehnlich ist auch $H(\varepsilon)$ und $Z(\varepsilon)$ zu definieren.

Mit Rücksicht auf 13) kann nun die Gleichung 1) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{d^2x_i}{dv_i^2}(1+e_i\cos v_i) - 2e_i\sin v_i\frac{dx_i}{dv_i} = \frac{a_i^3(1-e_i^2)^3}{k^2(1+m_i)}\,\frac{\Xi(\varepsilon)}{(1+e_i\cos v_i)^3}. \qquad 54)$$

Nun aber ist die $m$-te Coordinatennäherung 14) das $m$-te Glied der nach Potenzen von $\varepsilon$ fortschreitenden Reihenentwickelung, daher identisch mit

$$\frac{d^2x_{im}}{dv_i^2}(1+e_i\cos v_i)-2e\sin v_i\frac{dx_{im}}{dv_i}=$$

$$=\frac{a_i^3(1-e_i^2)^3}{k^2(1+m_i)}\frac{1}{m!}\frac{\Xi^{(m)}(0)}{(1+e_i\cos v_i)^3}; \qquad 55)$$

in welchem $\Xi^{(n)}(0)$ denjenigen Wert bedeutet, welchen $\Xi(\varepsilon)$ nach $n$-facher Differentiation und hernachiger Nullsetzung von $\varepsilon$ annimmt. Da diese Gleichung mit der ersten von 14) übereinstimmen soll, muss man haben:

$$\left.\begin{aligned} X'_{im}&=x_{im}-3\cos v_i(x_{im}\cos v_i+y_{im}\sin v_i)+\frac{1}{m!}\frac{r_{i0}^3}{k^2(1+m_i)}\Xi^{(m)}(0);\\ Y'_{im}&=y_{im}-3\sin v_i(x_{im}\cos v_i+y_{im}\sin v_i)+\frac{1}{m!}\frac{r_{i0}^5}{k^2(1+m_i)}H^{(m)}(0);\\ Z'_{im}&=z_{im}\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{m!}\frac{r_{i0}^3}{k^2(1+m_i)}Z^{(m)}(0). \end{aligned}\right\} \qquad 56)$$

Es ist nun die wichtige Frage, ob die Einsetzung der in 48)—49) gefundenen Werte in die Reihe 2) eine convergente Reihe geben? Da sowohl in Gleichung 48) als 49) die einem und demselben Planeten angehörigen $X'$ und $Y'$ mit demselben Coefficienten verbunden vorkommen, so kann die Frage auch so gestellt werden: Ist die Reihe

$$\varepsilon X'_{i1}+\varepsilon^2X'_{i2}+\varepsilon^3X'_{i3}+\cdots$$

und

$$\varepsilon Y'_{i1}+\varepsilon^2Y'_{i2}+\varepsilon^3Y'_{i3}+\cdots$$

für den Fall $\varepsilon=1$ convergent? Die besagte Substitution ergiebt nämlich in dem Beispiels halber gewählten Ausdruck

$$B\Big((7e-e^3)-2(1-e^2)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v-$$

$$-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\Big)$$

von $x(1+e\cos v)$ das folgende Resultat:

$$\mathfrak{B}_i\Big((7e_i-e_i^3)-2(1-e_i^2)\cos v_i-(5e_i+e_i^3)\cos^2 v_i-$$
$$-\frac{3(1+e_i^3)}{\sqrt{1-e_i^2}}E_i\sin v_i(1+e_i\cos v_i)\Big)+$$
$$+\int\frac{dv_i\sin v_i}{(1-e_i^2)^2}(X'_{i1}\varepsilon+X'_{i2}\varepsilon^2+\cdots)-$$
$$-\int\frac{dv_i\cos v_i}{(1-e_i^2)^2}(Y'_{i1}\varepsilon+Y'_{i2}\varepsilon^2+\cdots),$$

wodurch unsere Behauptung erhärtet erscheint.

Setzt man nun die Werte von $X'_{im}$ ein, so ist ein Teil der Substitution

$$\frac{r_{i0}^3}{k^2(1+m_i)}\left(\frac{\varepsilon}{1!}\Xi'(0)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\Xi''(0)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\Xi'''(0)+\cdots\right)$$

eine TAYLOR'sche Reihenentwickelung der in 53) ausführlicher gegebenen Funktion; der zweite Teil

$$(1-3\cos^2 v)(x_{i0}+\varepsilon x_{i1}+\varepsilon^2 x_{i2}+\cdots)-$$
$$-3\sin v_i\cos v_i(y_{i0}+\varepsilon y_{i1}+\varepsilon^2 y_{i2}+\cdots)$$

scheint in Bezug auf seine Convergenz von vorhinein nicht näher untersucht werden zu können, es lässt sich nur so viel sagen, dass $X_{im}$ wegen der Multiplication mit der $m$-ten Potenz der störenden Massen rasch abnehmen muss, so dass die Reihe für numerische Anwendungen geeignet erscheint.

## Anwendung der Theorie auf einen bisher nicht betrachteten Fall.

Wegen der auf der Oberfläche der Sonne und der Erde vor sich gehenden Processe kann das Potential dieser Himmelskörper nicht als constant betrachtet werden. Es kann mithin die Frage aufgeworfen werden, ob diese Vorgänge zur Erklärung der säcularen Acceleration des Mondes, oder jener Trepidationen der Erde

herbeigezogen werden können, welche genaue Schwereänderungsmessungen als möglich erweisen.

Man denke sich Einfachheit halber, dass die Activität der Sonne darin bestehe, dass eine concentrische Kugelschale von der Masse $\mu$ sich z. B. in Gestalt einer wolkenartigen Protuberanz auf der Sonnenoberfläche erhebe, und nach gewisser Zeit wieder kugelschalenförmig niederschlage. Nimmt man die Masse der Sonne wieder der Einheit gleich, so ist das auf die Erde bezogene beständige Potential

$$V=k^2\frac{1+m}{r},$$

während das veränderliche durch

$$V=k^2\frac{1-\mu'+m}{r}+k^2\frac{\mu'}{l} \qquad 57)$$

ausgedrückt werden kann, in welchem $l$ die Entfernung der Masse $\mu'$ vom Erdmittelpunkte bedeutet. Ist $\varphi$ die heliocentrische Breite, $\lambda$ die Länge der Masse bezogen auf den durch die scheinbare Mitte der Sonnenscheibe hindurchgehenden Meridian, so ist die Entfernung von der Sonnenmitte $\theta$ durch

$$\cos\theta=\cos\varphi\cos\lambda \qquad 58)$$

gegeben, und es wird

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{a}\left(1-2\frac{R}{a}\cos\theta+\frac{R^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{R}{a}\cos\theta+\cdots\right), \qquad 59)$$

da $\frac{R}{a}\left(=\frac{1}{215}\right)$, der Sonnenradius in Einheiten der Sonnenentfernung genügend klein ist. Man hat daher

$$V=k^2\frac{1+m}{r}+\frac{k^2\mu' R}{r^2}\cos\lambda\cos\varphi. \qquad 60)$$

Wie immer der Massentransport beschaffen ist, stets kann er in der Form

$$\mu'=\Sigma\mu_n\sin(nt+\alpha_n) \qquad 61)$$

geschrieben werden; wir behalten zunächst nur das erste Glied $\mu \sin(nt+\alpha)$ der Reihe bei. Bei der linearen Form der Reihe kann die vollständige Lösung durch Addition der Teillösungen hingeschrieben werden.

Die relative Bewegung der Erde ist durch

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \frac{1+m}{r^3} x = -\frac{2k^2\mu R}{r^4} \cos\varphi \cos\lambda \sin(nt+\alpha)\, x \quad 62)$$

gegeben; eine ähnliche Gleichung gilt auch für die $y$ Coordinate. Mit Rücksicht auf die Kleinheit von $\mu$ kann jedenfalls die zweite Potenz der kleinen Störungen

$$x-x_0=\delta x; \quad y-y_0=\delta y; \quad z=\delta z \quad 63)$$

vernachlässigt werden. Als $xy$ Ebene sei die Ekliptik gewählt, so dass $z_0=0$ ist. Vernachlässigt man auch die Producte der Störungen mit $\mu$, so gelangt man zum Gleichungssystem 14) wenn

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{2k^2\mu R x_0}{r_0^4} \cos\varphi \cos\lambda \sin(nt+\alpha); \\ Y &= -\frac{2k^2\mu R y_0}{r_0^4} \cos\varphi \cos\lambda \sin(nt+\alpha); \quad Z=0, \end{aligned}\right\} \ldots 64)$$

oder aber

$$\left.\begin{aligned} X' &= -\frac{2\mu}{1+m} R \cos v \cos\varphi \cos\lambda \sin(nt+\alpha); \\ Y' &= -\frac{2\mu}{1+m} R \sin v \cos\varphi \cos\lambda \sin(nt+\alpha), \end{aligned}\right\} \ldots 65)$$

gesetzt wird, wo $1+m$ ganz getrost mit der Einheit verwechselt werden darf.

Da es in der Anwendung keinen wesentlichen Unterschied macht, so mag die Bewegung der Erde als gleichförmige Kreisung angesehen werden. Man wählt dann als Ausgangspunkt statt der Gleichung 49) das einfachere System auf Seite 398. Bedeutet $w$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde, $q$ jene der Sonne, dann hat man

$$\partial\xi = (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2M)\,\mathfrak{A} - (2 + 3M\sin M)\,\mathfrak{B} + \sin M\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\sin 2M\,\mathfrak{D} -$$

$$- \tfrac{1}{4}\mu w R\cos\varphi\left(-\frac{\sin((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \right.$$

$$+ \frac{\sin((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} + \frac{\sin((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w} -$$

$$\left. - \frac{\sin((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w}\right) +$$

$$+ \tfrac{3}{4}\mu w R\cos\varphi\left(\frac{\sin((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} - \right.$$

$$- \frac{\sin((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \frac{\sin((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w} -$$

$$\left. - \frac{\sin((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w}\right) +$$

$$+ 2\mu w R\cos\varphi\sin wt\left(\frac{\cos((n+q)t+\alpha-\gamma)}{n+q} + \frac{\cos((n-q)t+\alpha-\gamma)}{n-q}\right);$$

66)

$$\partial\eta = -\tfrac{1}{2}\sin 2wt\,.\,\mathfrak{A} - (2\sin wt + 3wt\cos wt)\,\mathfrak{B} - \cos wt\,.\,\mathfrak{C}'$$

$$+ (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2wt)\,\mathfrak{D} + \tfrac{1}{4}\mu w R\cos\varphi\left(\frac{\cos((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \right.$$

$$+ \frac{\cos((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} + \frac{\cos((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w} +$$

$$\left. + \frac{\cos((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w}\right) +$$

$$+ \tfrac{3}{4}\mu w R\cos\varphi\left(\frac{\cos((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \right.$$

$$+ \frac{\cos((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} + \frac{\cos((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w} +$$

$$\left. + \frac{\cos((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w}\right) -$$

$$- 2\mu w R\cos\varphi\cos wt\left(\frac{\cos((n+q)t+\alpha+\gamma)}{n+q} + \frac{\cos((n-q)t+\alpha-\gamma)}{n-q}\right);$$

oder in bekannter Weise auf Polarcoordinaten reduciert:

$$\left.\begin{aligned}\partial r &= \mu R\cos\varphi\left(\frac{w^2}{(n+q)^2-w^2}\sin((n+q)t+\alpha+\gamma)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{w^2}{(n-q)^2-w^2}\sin((n-q)t+\alpha-\gamma)\right);\\ r\partial v &= 2\mu R\cos\varphi\left(\frac{w^3}{(n+q)((n+q)^2-w^2)}\cos((n+q)t+\alpha+\gamma)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{w^3}{(n-q)((n-q)^2-w^2)}\cos((n-q)t+\alpha-\gamma)\right).\end{aligned}\right\} \quad 67)$$

Man gelangt daher zu dem bemerkenswerten Resultate, dass die durch das Auftreten einer Protuberanz ausgelöste Störung nur von der Periode ihres Ablaufes und der Dauer der Sonnenrotation abhängt. Die aperiodischen Glieder sind sämmtlich herausgefallen, der Vorgang also auf die Erde als Centralkörper angewendet unmittelbar nicht geeignet, die Säcularbeschleunigung des Mondes, wohl aber im Falle der Sonne, die Trepidationen der Erde zu erklären.

Ist der Verlauf der Protuberanz ein rascher, $n$ daher genug gross, so kann daneben $q$ vernachlässigt werden, und die Trepidation hat nahe dieselbe Periode, wie die Protuberanz selbst. Bleibt aber die Massenumlagerung durch mehrere Sonnenrotationen hindurch bestehen, dann ist $n$ neben $q$ zu vernachlässigen, und die Periode der Trepidation ist nahezu der synodischen Sonnenrotation gleich. Da ähnliche Gleichungen auch für die magnetische Wirkung der Sonne bestehen, ist einzusehen, dass Hornstein aus magnetischen Variationen die Rotationsdauer der Sonne so überraschend genau zu bestimmen wusste.

Innerhalb eines Zeitraumes von $11^1/_9$ Jahren ist die Sonnenactivität ein Maximum und Minimum. Obwohl nun die Art der Massenumlagerung in diesem Vorgange eine wesentlich andere ist, als wir annahmen (es wäre jetzt eher ein periodisch veränderlicher Aequatorialgürtel anzunehmen), kann das Resultat doch eine Schätzung zulassen. In diesem Falle hat die Sonnenrotation keinen Einfluss mehr, $q$ und $\gamma$ müssen 0 genommen werden, die Erde vollführt innerhalb der Sonnenfleckenperiode eine mit ihr isochrone parallactische und Längsschwingung. Dies vielleicht der Grund, dass Förster eine kleine, der Frequenz der Sonnenflecken genau

parallelgehende Bewegung der Pfeiler des Berliner Meridiankreises nachweisen konnte.

Im widerstandslosen Raum giebt ein einmal gewonnener Impuls zu fortdauernden Schwingungen Anlass. Sind die Massenumlagerungen auch strenge periodisch, so könnte doch die parallaktische Störung bedenklich anwachsen. Nimmt man an, dass die Umlagerungen wesentlich dieselbe Masse beeinflussen, aber alle denkbaren Perioden annehmen, so hängt die Störung wesentlich von dem Werte

$$\int_0^\infty \frac{\cos(n\pm q)t}{w^2-(n\pm q)^2}\, d(n\pm q) = \frac{\pi}{2w}\sin wt \qquad 68)$$

ab, so dass die parallaktische Störung selbst nach unendlicher Zeit eine an das Jahr gebundene Periode und eine Amplitude annimmt, die stets sehr klein, von der Ordnung $\mu$ bleibt. Man hat nämlich:

$$\Sigma\delta r = -\pi\mu w R\cos\varphi\,.\sin wt. \qquad 69)$$

Wird die Periode der Massenumlagerung so beschaffen, dass

$$(n\pm q)=w, \qquad 70)$$

ist, so wird z. B. in dem Falle $n+q=w$ :

$$\left.\begin{aligned} \delta r &= \tfrac{1}{4}\mu R\cos\varphi\left(2wt\cos(wt+\alpha+\gamma)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{w}{q(q-w)}\sin((w-2q)t+\alpha-\gamma)\right);\\ r\delta v &= \tfrac{1}{2}\mu R\cos\varphi\left(\frac{w^3}{(w-2q)\,q(q-w)}\cos((w-2q)t+\alpha-\gamma)-\right.\\ &\qquad\left.-2wt\sin(wt+\alpha+\gamma)\right); \end{aligned}\right| \qquad 71)$$

so dass nun aperiodische Glieder in der Tat auftreten können. Für die Bewegung der Erde hat dieser Umstand keine Bedeutung, da auf der Sonne im Allgemeinen keine Massenübertragungen vorkommen, die an das Jahr gebunden wären. Eine säculäre Ver-

änderung des Jahres ist also aus diesen Vorgängen nicht zu erwarten.

Etwas anders liegen die Verhältnisse für Erde und Mond. Es bedeutet hier $\frac{2\pi}{w}$ die siderische Umlaufszeit des Mondes, während welcher infolge der Gezeitenbewegung in halbmonatlicher Periode eine beträchtliche Wassermenge von einer Halbkugel auf die andere strömt. Man kann auch hier von der Erdrotation absehen, $q$ und $\gamma$ gleich Null annehmen, und erhält als Störung des Mondes in der halbmonatlichen Periode der Gezeiten

$$\left.\begin{aligned} \delta r &= \tfrac{1}{2}\mu R\cos\varphi\,.\,wt\cos(wt+\alpha) \\ \text{und} \qquad r\delta v &= -\mu R\cos\varphi\,.\,wt\sin(wt+\alpha) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72)$$

oder durch $n$ Perioden hindurch summiert:

$$(\delta r) = \tfrac{1}{2}\frac{2\pi}{w}\,n\mu R\cos\varphi\sin\alpha \quad \text{und} \quad (r\delta v) = \frac{2\pi}{w}\,n\mu R\cos\varphi\cos\alpha, \quad 73)$$

wobei $\varphi$, da die Massenumlagerungen stets in der Nähe des Aequators vor sich gehen, auch Null angenommen werden darf. $\alpha$ bedeutet die Zeit, um welche die Ueberlagerungen nach dem Durchgang durch dass Perigæum eintreten. Insofern die Gezeiten beim Perigæum besonders stark auftreten, kann $\alpha$ klein oder gar Null genommen werden, so das eine parallactische Störung kaum entsteht und die Störung in Länge nahe

$$r(\delta v) = \frac{2\pi}{w}\,n\mu R \qquad 74)$$

wird. Man erhält daher in der Tat eine mit der Zeit wachsende Acceleration, deren Vorzeichen mit der Beobachtung übereinstimmt, und welche nach Beobachtungen 5″ im Jahrhundert betragen soll. Setzt man daher $\frac{2\pi}{w}\,n = 36525$ Tage, $\frac{R}{r} = \frac{1}{60}$ und $\delta v = 5$ arc 1″, so muss $\mu = 398{,}3.10^{-10}$ Erdmassen werden.

Setzt man dagegen auf der Sonne eine Protuberanz oder einen Fleck voraus, dessen Masse 0,000001 Sonnenmasse, und dessen

Ablauf der Reihe nach 10 Minuten, 1 Stunde oder 11,11 Jahre beträgt, so kommt mit $R=691{,}600.000$ m und $\frac{R}{r}=\frac{1}{215}$:

$$\partial r=2498.10^{-10}\sin((n+q)t+\alpha+\gamma)+2501.10^{-10}\sin((n-q)t+\alpha-\gamma)\,(\mathrm{m});$$

oder

$$=8972\cdot10^{-9}\quad\ldots\qquad\ldots\quad+9030\cdot10^{-9};\ldots\qquad\ldots$$

oder

$$=3\cdot851\qquad\ldots\qquad\ldots\quad+3\cdot851;\qquad\ldots\qquad\ldots$$

und gleicherweise

$$\partial v=1326\cdot10^{-20}\cos((n+q)t+\alpha+\gamma)+1328\cdot10^{-20}\cos(n-q)t+\alpha-\gamma)\,(\mathrm{B.sec.};$$

oder

$$=2854\cdot10^{-18}\quad\ldots\qquad\ldots\quad+2882\cdot10^{-18}\quad\ldots\qquad\ldots$$

oder

$$=7691\cdot10^{-10}\quad\ldots\qquad\ldots\quad+8006\cdot10^{-10};\ldots;\qquad\ldots$$

so dass die Störungen in der Länge jedenfalls unmerklich sind, die parallactischen aber in einzelnen günstigen Fällen mit sehr empfindlichen Schwerevariometern beobachtet werden dürften.

Alle diese Störungen können daher selbst nach unendlicher Zeit im Sinne der Gleichung 69) nicht mehr als auf 37 m anwachsen.

Man kommt zu numerisch noch günstigeren Resultaten, wenn man den tatsächlichen Verhältnissen vielleicht mehr entsprechend die Art der Massenumlagerung durch die Gleichung

$$\mu'=\mu\sin^2(nt+\alpha)=\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{2}\cos(2nt+2\alpha)\qquad 75)$$

ausdrückt. Der Fall ist übrigens leicht auf den schon behandelten zu reduzieren, wenn man einmal statt $n$ die Null, statt $\alpha$: $\frac{\pi}{2}$

das anderemal an Stelle $n : 2n$ und statt $a : 2a + \frac{3}{2}\pi$ setzt, und die beiden Resultate summiert.

Gyldén behandelt (in Astr. Nachr. 109. No 2593) das Zweikörperproblem unter der Voraussetzung veränderlicher und zwar mit der Zeit proportional wachsender Masse. Ist $\mu$ die Massenzunahme in der Zeiteinheit für den Centralkörper, so wird

$$X' = -2\mu Rt \cos M; \quad Y' = -2\mu Rt \sin M; \quad M = wt \qquad 76)$$

angenommen, dass sich die Masse in einem Punkte der Kugel vom Radius $R$ häuft. Man gelangt so zu der Schätzung des Einflusses, den z. B. Gebirgsbildung auf den Lauf des Mondes ausgeübt haben kann. Die Gleichungen lauten, da die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ der Null gleich zu setzen sind:

$$\left.\begin{aligned} \delta r &= -2\mu R\left(\frac{1}{w}\sin 2M - t\cos 2M\right); \\ r\delta v &= -2\mu R\left(\frac{2}{w} - wt^2\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 77)$$

Nimmt man aber an, dass sich die hinzukommende Masse in einer Kugelschale anhäuft, dann wird die Aenderung des Potentiales $\frac{\mu}{r}t$, und es kommt

$$\left.\begin{aligned} \delta r &= -\mu r^2\left(\frac{1}{w}\sin 2M - t\cos 2M\right) \\ r\delta v &= -\mu r^2\left(\frac{2}{w} - wt^2\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 78)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Oppolzer'sche Folgerung ziehen, dass der auf die Erde fallende Meteoritenstaub eine die säculare Acceleration erklärende Massenvergrösserung bewirke.

Man kann daher mit einiger Wahrscheinlichkeit behaupten, dass die Potentialänderungen der Sonne zwar das Jahr der Erde nicht verändern, aber in einzelnen Fällen noch nachweisbare parallactische Trepidationen hervorbringen. Die säculare Accele-

ration des Mondes mag zum Teile von der Gezeitenreibung, zum Teil von der durch kosmischen Staub verursachten Massenvergrösserung der Erde herrühren; sicherlich haben aber Gebirgsbildung und aperiodische Massenablagerungen, besonders aber der mit Ebbe und Flut und meterologischen Vorgängen verbundene Massentransport, dessen Periode der siderische Monat ist, das ihre getan.

19.

# ZUR THEORIE DER FERMAT'SCHEN CONGRUENZEN.

Von FERDINAND GRUBER,

PROFESSOR AN DER COMMUNAL-OBERREALSCHULE ZU BUDAPEST.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 16. December 1895 vom o. M. und Classensecretair Julius *König*.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie) Band XIV, pp. 22—25. 1896.

Es ist bekannt, dass im Falle eines Primzahlmoduls die Congruenz

$$x^{p-1}-1\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-1})\ (\mathrm{mod.}\,p),$$

für jeden ganzzahligen Wert des $x$ Geltung hat, wobei $a_1, a_2, \ldots a_p$ ein vollständiges Restsystem relativer Primzahlen zu $p$ bedeutet.

Im Folgenden wollen wir unter der Bedingung, dass $m$ keine Primzahl und $a_1, a_2, \ldots a_{\varphi(m)}$ ein vollständiges Restsystem relativer Primzahlen zu $m$ sei, untersuchen: *ob und wann die identische Congruenz*

$$x^{\varphi(m)}-1\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\varphi(m)})\ (\mathrm{mod.}\,m) \qquad 1)$$

*bestehet.*

Da wir den Fall $m=2$ ausschliessen, ist $\varphi(m)$ stets eine gerade Zahl und wir erhalten, $x=0$ gesetzt, alsogleich als notwendige Bedingung:

$$-1\equiv a_1a_2\ldots a_{\varphi(m)}\ (\mathrm{mod.}\ m).$$

Dem verallgemeinerten WILSON'schen Satze nach ist dies aber nur dann möglich, wenn $m=4$, $p^\alpha$ oder $2p^\alpha$ ist, wo $p$ eine un-

gerade Primzahl bedeutet. Der Satz gilt für $m=4$, denn es ist offenbar

$$x^2-1\equiv(x-1)(x-3)\ (\text{mod. } 4),$$

und wir haben nur zu untersuchen, ob die Congruenz (1) auch für die Fälle $m=p^\alpha$ und $m=2p^\alpha$ gültig bleibt. Wir differenzieren deshalb die Congruenz (1) und setzen nachher $x=1$; dadurch ergiebt sich

$$\varphi(m)\equiv-(a_2-1)(a_3-1)\ldots(a_{\varphi(m)}-1)\ (\text{mod. } m), \qquad (2)$$

wenn nämlich im vollständigen Restsystem der zu $m$ relativen Primzahlen $a_1\equiv 1$ angenommen wird.

Wenn $\alpha>1$ und $m=p^\alpha$, so sind

$$p+1,\ 2p+1,\ \ldots,\ (p^{\alpha-1}-1)p+1$$

zu $m$ relativ prime und incongruente Reste; ist aber $m=2p^\alpha$, so sind

$$2p+1,\ 4p+1,\ \ldots,\ 2(p^{\alpha-1}-1)p+1$$

ebensolche Reste und somit treten in den rechts stehenden Factoren der Congruenz (2) die Zahlen

$$p,\ 2p,\ \ldots,\ (p^{\alpha-1}-1)p,$$

respective

$$2p,\ 4p,\ \ldots,\ 2(p^{\alpha-1}-1)p$$

auf.

Das betreffende Produkt ist somit in beiden Fällen durch die $(p^{\alpha-1}-1)$-te Potenz von $p$ teilbar, also

$$\varphi(m)\equiv p^{p^{\alpha-1}-1}Q\ (\text{mod.}m),$$

wo $Q$ eine ganze Zahl bedeutet. Nun ist aber

$$p^{\alpha-1}\geqq(1+2)^{\alpha-1}\geqq 1+2^{\alpha-1}\geqq 1+\alpha,$$

also

$$p^{\alpha-1}-1\geqq\alpha;$$

und somit wäre

$$\varphi(m)\equiv 0\ (\text{mod. } p^\alpha),$$

was in keinem der beiden Fälle $m=p^\alpha$ und $m=2p^\alpha$ möglich ist. Wir folgern hieraus, dass $\alpha$ nicht grösser als 1 sein kann. Giebt

es zusammengesetzte Moduln, für welche der durch die Congruenz (1) ausgedrückte Satz giltig ist, so müssen selbe notwendig von der Gestalt $2p$ sein.

Betrachten wir die sämmtlichen relativen Primreste (mod. $2p$) also:

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ (p-2),\ (p+2),\ \ldots,\ (2p-1),$$

so bemerken wir, dass selbe auch (mod. $p$) ein vollständiges Restsystem bilden, somit ist

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv\prod_{s=1}^{p-1}(x-s)\pmod{p}\equiv x^{p-1}-1\pmod{p}$$

und weiter

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv\prod_{k=0}^{p-1}(-1)^k c_k x^{p-k-1}\equiv x^{p-1}-1\,(\mathrm{mod.}\,p).$$

Aus letzterer Congruenz folgt nun, dass

$$c_1\equiv c_2\equiv\cdots\equiv c_{p-2}\equiv 0\pmod{p},$$

und auch

$$c_0=1,\ c_{p-1}\equiv -1\pmod{p},$$

das heisst: mit Ausnahme des ersten und letzten Coëfficienten, ist jedes $c$ durch $p$ teilbar; durch $2p$ sind nur jene teilbar, die zugleich geradzahlig sind. Da aber die sämmtlichen relativen Primreste ungerade sind, so folgt, dass

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv(x-1)^{p-1}\pmod{2};$$

und wenn $p-1=2^i n$, wo $n$ ungerade ist, so wird

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv((x-1)^{2^i})^n\pmod{2}.$$

Bei Entwickelung der Potenz $(x-1)^{2^i}$ bemerken wir, dass, mit Ausnahme des letzten, die sämmtlichen Binomialcoëfficienten geradzahlig sind, denn es ist:

$$u\binom{2^i}{u}=2^i\binom{2^i-1}{u-1};$$

und wenn $u=2^{i_1}u_1$, wo $u_1$ ungerade ist, so gilt

$$u_1\binom{2^i}{u}=2^{i-i_1}\binom{2^i-1}{u-1}.$$

Weil nun $i>i_1$ und dabei $u<2^i$, so folgt, dass

$$\binom{2^i}{u}\equiv 0 \pmod 2;$$

und

$$(x-1)^{2^i}\equiv x^{2^i}+1 \pmod 2.$$

Schreiben wir nun die obige Congruenz in der Form

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k c_k x^{p-k-1}\equiv(x^{2^i}+1)^n \pmod 2,$$

so bemerken wir, dass

$$c_1\equiv c_2\equiv\cdots\equiv c_{2^i-1}\equiv 0 \pmod 2;$$

und da $n$ eine ungerade Zahl ist:

$$c_{2^i}\equiv\binom{n}{1}\equiv 1 \pmod 2;$$

somit ist $c_{2^i}$ nicht teilbar durch $2p$ und es giebt auch in diesem Falle incongruente Coëfficienten, ausgenommen wenn $n=1$, da dann der erste nicht teilbare Coëfficient zugleich der letzte ist; wir erhalten also

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv x^{p-1}-1 \pmod{2p}$$

wenn $p-1=2^i$.

Das Resultat unserer Untersuchung ist somit: *unter den zusammengesetzten Moduln sind $m=4$ und jene der Form $2(2^i+1)$ — wobei $(2^i+1)$ eine Primzahl sei — die einzigen, für welche die Congruenz*

$$x^{\varphi(m)} - \equiv \prod_{r=1}^{\varphi(m)} (x - a_r) \pmod{m}$$

*bei edem ganzzahligen $x$ besteht.*

Die hier ausgezeichneten Primzahlen der Form $2^i + 1$ spielen — wie bekannt — auch in der Kreisteilungstheorie eine wichtige Rolle.

---

20.

# NEUE GEOMETRISCHE THEORIE SEISMISCHER ERSCHEINUNGEN.

Gelesen in der Sitzung der Akademie vom 21. Oktober 1895 von

Dr. R. v. KÖVESLIGETHY,

C. M. DER AKADEMIE, AO. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BUDAPEST.

Aus: «Mathematikai és Természettudományi Értesitõ» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIII, pp. 363—407. 1895.

Angeregt durch die Untersuchungen von HOPKINS befasste sich die englische geophysikalische Schule längere Zeit mit der Theorie der Präcession und Nutation, um hieraus Schlüsse auf die innere Structur der Erde ziehen zu können. Es war in der Tat ein naheliegender Gedanke, die hypothetische Massenverteilung im Innern der Erde so lange zu variiren, bis der berechnete Wert der Präcessionsconstante mit dem astronomisch bestimmten in Einklang gebracht würde. Als aber nach vielseitigen Versuchen und in Uebereinstimmung mit einem früheren Ausspruche DELAUNAY's W. THOMSON 1876 in der Eröffnungsansprache der British Association zu Glasgow das Hinfällige dieser Schlussfolgerungen beleuchtete, konnten die Untersuchungen von G. H. DARWIN über die Präcession eines viscosen, von S. OPPENHEIM über die Präcession eines flüssigen Sphæroides die gehegten Erwartungen nicht mehr täuschen; in erster Annäherung ergiebt sich dieselbe Präcessionsconstante, die Erde möge als starr, oder als flüssig angenommen werden. Es folgt hieraus, dass diese Zahlangabe nicht so sehr geeignet ist, die innere Massenverteilung der Erde, als ihre Form, die Rotation und

die Wirkungsweise der äusseren Kräfte zu charakterisieren. Nach THOMSON kann höchstens daran festgehalten werden, dass im Falle einer dünnen, starren Rinde die kurzperiodischen Glieder der Nutation — besonders die sechsmonatliche und 14-tägige Periode — voll verändert würden, und ähnlicher Meinung ist auch DARWIN, der aus dem Drucke der Continente folgert, dass die Rinde noch in einer Tiefe von 1600 km die Starrheit des Granits aufweise.

Es ist jedenfalls ein beklagenswerter Verlust, dass die analytisch streng durchführbare und astronomisch so genau bestimmbare Präcession für das Studium des Erdinneren verloren geht und hiemit wieder eine jener wenigen Methoden bei Seite gesetzt werden muss, welche diesem Zwecke dienlich schienen.

Die mittlere Dichte der Erde, die Abplattung und das aus Pendelmessungen erschlossene Verhältnis der Hauptträgheitsmomente sind zu spärliche Daten. Umsomehr verlegte man sich auf das Studium der Gezeitenerscheinungen, von denen zuverlässigere Resultate zu erwarten stehen, wie ebenfalls W. THOMSON und DARWIN darlegten. Ist nämlich die Erde kein absolut starrer Körper, so durchläuft sie eine der Flutwelle analoge Deformationswelle, so dass wir statt der die absolut starre Erdrinde charakterisierenden Wasserhebung den Unterschied der Hebung von Wasser und Land beobachten. Leider macht die mathematisch nicht einkleidbare Oberflächengestalt der Erde und das unbekannte Tiefengesetz der Oceane die rein theoretische Bestimmung der Gezeiten unmöglich; man muss sich damit begnügen, der Theorie nur die auftretenden Perioden zu entnehmen, die dazu gehörigen Amplituden aber von Ort zu Ort an geeignet aufgestellten Limnographen abzulesen. Die bislang erreichten Resultate sind der Schwierigkeit der Beobachtung halber noch nicht besonders zuverlässig, zeigen aber doch, dass die halbtägige Periode der Wasserbewegung der beträchtlichen elastischen Nachwirkung und der Trägheit des Erdkörpers halber fast ungestört vor sich gehe. Gerade, als ob die Erdfeste wirklich absolut starr wäre. Die halbjährige Periode ist zu enge mit derselben Periode sämmtlicher meteorologischer Factoren verquickt, um genaue Daten liefern zu können, und somit bleibt nur die halbmonatliche Periode, die besondere Beachtung verdient. Nach den zuverlässigen Beobachtungen bleibt diese aber völlig aus, was gerade

im Gegenteil mit den englischen Rigidisten bewiese, dass in dieser Periode Hebung von Wasser und Land sehr nahe gleich seien, die Erdfeste also noch immer einen beträchtlichen Grad von Elasticität besitze.

Da nun die Präcession für die Erkennung des Erdinneren nicht viele neue Angaben beibringt, die Gezeitenuntersuchung, die sich noch zumeist auf die Grenzlinie von Wasser und Land bezieht, viele praktische Schwierigkeiten bereitet, so suchte ich von dem in Verlust geratenen Gebiete auf anderer Seite möglichst viel zurückzuerwerben, und war der Meinung, dass hierin die Untersuchung der Erdbeben von Nutzen sein könnte. Erdbeben sind mechanisch verhältnismässig leicht zu behandeln, versprechen ihres täglichen Vorkommens halber recht häufige Anwendung und wirken sowohl auf das trockene, als auf das nasse Element ein. Meine Meinung begegnete ganz der von MALLET: «seismology is chiefly to be viewed and valued, as the instrument by which a knowledge of the deep interior of our planet will be attained» und als die freundliche Unterstützung Sr. Excellenz des ung. Ministers für Cultus und Unterricht meine italienische Studienreise im Sommer 1895 ermöglichte, stand als Resultat meiner vorläufigen Studien eine ganz neue und zum Teile sehr überraschende geometrische Theorie der Erdbeben fertig. Schon früher betrachtete ich nicht ohne Misstrauen die seichten Tiefen, in welchen nach bisherigen Rechnungsmethoden der Erdbebenheerd zu suchen ist (nach MALLET ist diese Tiefe nie grösser als 60 km), die Schwäche der Stützen für diese Anschauung, die ungemein grossen und schwankenden Werte der oberflächlichen Fortschreitungsgeschwindigkeit, und da ich bemerkte, dass das Fallenlassen der constanten und daher geradlinigen Fortpflanzung auf bedeutend grössere Tiefen führt, glaubte ich die neue geometrische Methode der Erdbebenforschung ausarbeiten zu sollen. Das Resultat war besonders aus dem Grunde auch für mich überraschend, da das einzige Argument gegen die grössere Tiefe des Heerdes, die geringe Oberflächenausdehnung der Beben, in sehr unerwarteter Weise entkräftet wurde, die zudem auch mit andern Problemen der Geophysik, nämlich den Polhöhenschwankungen und den mikroseismischen Bewegungen Verbindung herstellt. Die weitere Ausarbeitung geschah unter der

Einwirkung der besuchten italienischen geodynamischen Observatorien, besonders infolge des Ideenaustausches mit Herrn Prof. GIULIO GRABLOWITZ, Director des Observatoriums zu Casamicciola, der sich zumeist um die Festlegung der Wellenoberfläche der Beben drehte. Auch beeinflusste mich die durch die ganze einschlägige Litteratur sich hinziehende Klage um die noch immer fehlende Theorie. Ich erwarte von der Veröffentlichung dieser Untersuchung, dass sie in der schwierigen praktischen Bestimmung der Wellenoberfläche zur Erleichterung diene, zu zuverlässigeren Werten der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und damit der Constanten der Elasticität der Erdrinde führe, durch den erweiterten Spielraum des Erdbebenheerdes auch auf die physikalische Erklärung jener interessanten Erscheinungen nicht ohne Wirkung bleibe und mit Schwerebestimmungen zusammen zu Aufschlüssen über die Tektonik der Erdrinde Veranlassung gebe.

## Gestalt des Erdbebenstrahles.

Der Erbebenheerd möge zunächst — denn es ist, um mit MALLET's Worten zu reden: «it is of the nature of all science, to be but the portal to greater and higher truth beyond» ein einfacher Punkt sein, von dem mit der variablen Geschwindigkeit $v$ Strahlen nach allen Richtungen ausgehen. Diese mögen einstweilen ohne Rücksicht auf die Axendrehung der Erde, ihre geoidische Gestalt, die Anziehung des Mondes und anderer Himmelskörper, ja selbst ohne Rücksicht auf den Einfluss der Oberflächengestalt der Erde betrachtet werden. Die Zeit, welche das Beben braucht um von dem festen Punkte $A$ zu dem ebenfalls festen Punkte $B$ zu gelangen ist dann

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}, \qquad 1)$$

wenn $ds$ ein Element des Strahles bedeutet. Im Sinne der Undulationstheorie repräsentiert dieses Integral einen Grenzfall, so dass dessen Variation Null wird. Führt man eine der Fortpflanzungsgeschwindigkeit reciproke Grösse $n$ unter dem Namen des Brechungs-

index ein, so wird

$$\delta \int_A^B n ds = 0, \qquad 2)$$

was unter Anwendung bekannter Vorschriften zu folgendem System von Differentialgleichungen führt:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}; \quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y}; \quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}; \qquad 3)$$

wenn $x, y, z$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Strahles bedeuten. Da die unabhängige Variable der Bogen $s$ selbst ist, so reduciert sich das System von drei Gleichungen auf zwei unabhängige Gleichungen.

Das Verhalten der Erde ist sowohl im astronomischen Sinne, als in Bezug auf die Schwere genügend genau durch die Annahme charakterisiert, dass die Dichte in concentrischen Kugelschichten dieselbe ist. Dasselbe möge auch für den Brechungsindex gelten. Dann aber ist $n$ nur eine Function des Radiusvectors und der Strahl weicht natürlich aus seiner Ebene nicht aus. Daher ist $z=0$, und von dem vorhergehenden Gleichungssystem eine einzige Gleichung genügend. Wird der Radiusvector mit $\rho$ bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{dn}{d\rho}\frac{x}{\rho}; \quad \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{dn}{d\rho}\frac{y}{\rho}; \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \qquad 4)$$

und unsere Gleichungen werden:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dn}{d\rho}\frac{x}{\rho}; \quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right) = \frac{dn}{d\rho}\frac{y}{\rho}. \qquad 5)$$

Multipliciert man die erste mit $y$, die zweite mit $-x$, und addiert, führt man weiter die angedeuteten Differentiationen aus, integriert hernach, so kommt:

$$n\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right) = C, \qquad 6)$$

oder bei Einführung von Polarcoordinaten:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi, \qquad 7)$$

und wenn der Winkel der im Punkte $xy$ an die Curve gezogenen Tangente mit der positiven Polaraxe $\phi$ genannt wird (Fig. 1):

$$n\rho \sin(\phi-\varphi)=C,$$

oder

$$n\rho \sin \zeta=C, \qquad 8)$$

wo $\zeta$ der Winkel der Tangente mit dem verlängerten Radiusvector ist. Da $\rho \sin \zeta=p$ das aus dem Punkte $O$ auf die Tangente gefällte Lot darstellt, kann auch

$$pn=C$$

geschrieben werden. Trägt man die Gleichung 7) in 6), so kommt durch Integration:

$$\varphi=\gamma+\int \frac{Cd\rho}{\rho\sqrt{n^2\rho^2-C^2}}, \qquad 9)$$

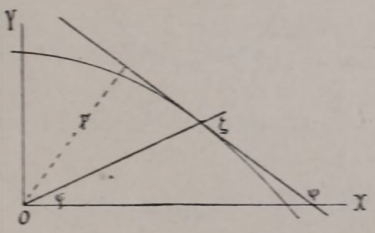



Fig. 1.

wo die Constante $C$ mit Hülfe von 8) leicht zu bestimmen ist. Man legt nämlich (Fig. 2) um den Mittelpunkt der Erde eine durch den Erdbebenheerd $C$ gehende Kugelfläche, deren Radius also $OC=\rho_0$ ist. Auf der Oberfläche dieser Kugel sei der Brechungsindex $n_0$, der Emersionswinkel oder die Höhe des Strahles $\varepsilon$. Als Polaraxe, die hier zugleich die Rotationsaxe sämmtlicher vorkommender Rotationsflächen ist, wählen wir die Verlängerung $OE$ des Radius $\rho_0$, die im Epicentrum $E$ in die Erdoberfläche einschneidet. Dann ist nach 8):

$$C=n_0\rho_0\cos\varepsilon; \qquad 10)$$

wodurch die Constante des Integrals 9) bestimmt ist.

Um die Abhängigkeit von $n$ und $\rho$ ausdrücken zu können, muss die Annahme gestattet werden, dass auch für die Bebenbewegung der NEWTON'sche Satz gilt. Ist nämlich $s$ die Dichte der Erde in der Entfernung $\rho$ von dem Mittelpunkte, — als Einheit der Entfernung soll stets der Erdradius gewählt werden — $s_1$ die Oberflächendichte und $n_1$ der Brechungsindex an der Erdober-

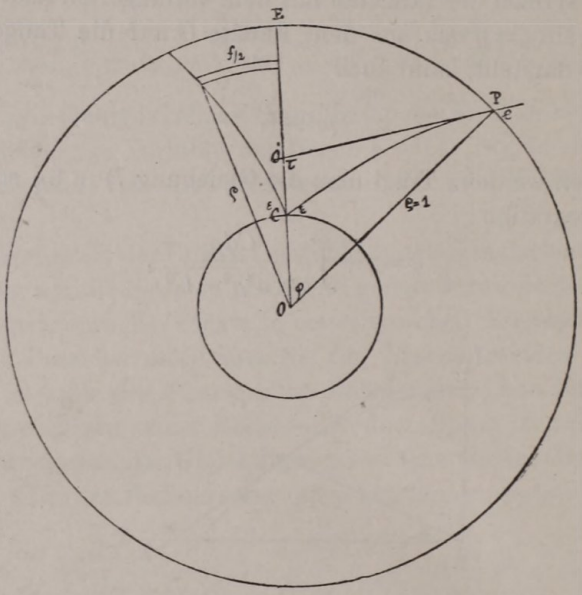



Fig. 2.

fläche, so soll ohne Rücksicht auf die etwa veränderliche stoffliche Beschaffenheit supponirt werden:

$$\frac{n^2-1}{s}=\frac{n_1^2-1}{s_1}, \qquad 11)$$

was nach allen unsern bisherigen Erfahrungen genug nahe erfüllt ist. Die Dichte der einzelnen Kugelschalen mag hier am bequemsten durch das ROCHE'sche Gesetz (Mémoire sur la loi de densité à l'intérieur de la Terre. Acad. d. Sc. de Montpellier, 1848 ausgedrückt werden, wonach:

$$s=S(1-a\rho^2), \qquad 12)$$

ist. Hiebei findet sich $S=10{,}10$ als Dichte im Erdmittelpunkte, und $a=0.764$. Dieses Gesetz ist viel bequemer als das vielleicht weiter bekannte Gesetz von LAPLACE-LEGENDRE,

$$s=4{\cdot}426\,\frac{\sin(2{\cdot}4727\rho)}{\rho},$$

welches, ohne dem ROCHE'schen überlegen zu sein, zu sehr verwickelten und unübersehbaren Integralen führte. Es mag übrigens erwähnt werden, dass beide Gesetze unter gewissen Bedingungen den Gleichgewichtszustand kosmischer Gaskugeln darstellen.

Unter Benützung der besagten Gleichung wird

$$n^2=1+(n_1^2-1)\,\frac{S}{s_1}-a\,\frac{S}{s_1}\,(n_1^2-1)\,\rho^2, \qquad 13)$$

oder indem man schreibt:

$$n_1^2-1=\mu, \quad \frac{S}{s_1}=\sigma, \qquad 14)$$

$$1+(n_1^2-1)\,\frac{S}{s_1}=1+\mu\sigma=N; \quad a\,(n_1^2-1)\,\frac{S}{s_1}=a\sigma\mu=p; \qquad 15)$$

einfacher

$$n^2=N-p\rho^2. \qquad 16)$$

Dabei bedeutet $\mu$ die brechende Kraft an der Erdoberfläche, $N$ den Brechungscoefficienten im Erdmittelpunkte. Da $s_1$ nahe zwischen 2,5 und 2,8 steht, weiter auch nach 12) $\sigma$ in der Form

$$\sigma=\frac{1}{1-a} \qquad 17)$$

geschrieben werden kann, und $a$ sehr nahe $^3/_4$ angenommen werden kann, so mag mit genügender Annäherung

$$\sigma=4, \quad a\sigma=3; \quad N=1+4\mu, \quad p=3\mu$$

gesetzt werden, so oft es sich der Uebersicht halber um numerische Werte handelt.

Nun geht das Integral 9) in die folgende Form über:

$$\varphi = \gamma + \sqrt{N - p\rho_0^2}\,\rho_0 \cos\varepsilon \int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{N\rho^2 - p\rho^4 - (N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}}, \quad 18)$$

welches durch die Substitution $\rho^2 = \frac{1}{x}$ leicht ausgewertet werden kann, und

$$\varphi = \gamma + \tfrac{1}{2}\arccos\frac{2(N - p\rho_0^2)\rho_0^2 x\cos^2\varepsilon - N}{\sqrt{N^2 - 4p(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}}; \quad 19)$$

oder durch Wiederherstellung des Wertes von $x = \frac{1}{\rho^2}$ auch

$$\rho^2 = \frac{2(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}{N + \sqrt{N^2 - 4p(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}\,.\cos 2(\varphi - \gamma)} \quad 20)$$

ergiebt. Es ist dies die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem der Erde zusammenfällt und deren kleine Axe in der Richtung der mit dem Uhrzeiger wachsenden Winkel mit der Axe $OE$ den Winkel $\gamma$ einschliesst. Da die Gleichung dieser Ellipse auch in der Form

$$\rho^2 = \frac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\cos 2(\varphi - \gamma)}$$

geschrieben werden kann, so sind die Quadrate ihrer Axen offenbar

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{2(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}{N - \sqrt{N^2 - 4p(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}}; \\ b^2 &= \frac{2(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}{N + \sqrt{N^2 - 4p(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

oder anders geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{N + \sqrt{N^2 - 4p(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}}{2p}; \\ b^2 &= \frac{N - \sqrt{N^2 - 4p(N - p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}}{2p}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

Der Winkel $\gamma$ ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass das Erdbebencentrum in der Axe $OE$ liegt. Wird nämlich $\rho=\rho_0$, so muss demgemäss $\varphi=0$ werden, was unter Berücksichtigung von 20) giebt:

$$\left.\begin{aligned}\cos 2\gamma &= \frac{2(N-p\rho_0^2)\cos^2\varepsilon - N}{\sqrt{N^2-4p(N-p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}};\\ \sin 2\gamma &= \frac{-(N-p\rho_0^2)\sin 2\varepsilon}{\sqrt{N^2-4p(N-p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}};\\ \operatorname{tang} 2\gamma &= \frac{-(N-p\rho_0^2)\sin 2\varepsilon}{2(N-p\rho_0^2)\cos^2\varepsilon - N};\end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad 23)$$

Der Wurzelausdruck in $\sin 2\gamma$ erhält infolge der getroffenen Wahl der Winkelzählung das negative Vorzeichen.

Die lineare Excentricität ist durch

$$e^2 = \frac{\sqrt{N^2-4p(N-p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}}{p}$$

gegeben, und beweist, dass die Gleichung 20) im Allgemeinen in der Tat einer Ellipse angehört. Der Erdbebenstrahl wird nur in dem Falle eine Hyperbel, als $e^2>a^2$, daher $p$ und $\mu$ negativ sind, oder $n_1<1$ ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit müsste dann allgemein — besondere geologische Verschiedenheiten können natürlich locale Ausnahmen verursachen — mit zunehmender Tiefe wachsen. Eine parabolische Form des Erdbebenstrahles kommt zu Stande, wenn $p=0$, daher auch $\mu=0$ oder $n_1=1$ ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist dann im ganzen Inneren der Erde constant, und der in der Erde gelegene parabolische Strahl kann als Gerade betrachtet werden. Endlich kann für $e=0$ der Strahl auch vollkommene Kreisform annehmen; dann muss bei vorgeschriebenem Brechungsindex der Strahl aus einem bestimmten Punkte der Axe unter bestimmtem Winkel austreten.

Die Annahme lediglich geradliniger Erdbebenstrahlen führt zur Theorie Mallet's, während sich der hyperbolische Unterfall der Theorie A. Schmidt's nähert. In dieser kehren die Strahlen ihre concave Seite gegen die Axe, was auf Grund der Gleichung 20)

nur hyperbolische Strahlen tun können. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass in beiden Fällen ein irgendwo im Inneren der Erde ausgelöstes Beben an der ganzen Erdoberfläche fühlbar werden muss; eine Schwächung könnte nur durch Absorption oder das Anwachsen der Entfernung eintreten. Im Falle elliptischer Strahlen erhält man aber, wie wir sogleich sehen werden, einen sehr beschränkten Schütterraum.

Die Gleichungen 22) und 23) bestimmen Gestalt und Lage des elliptischen Strahles. Ist demnach $\varepsilon=90°$, der Stoss also gerade gegen das Epicentrum gerichtet, so ist $a^2=\frac{N}{p}$, $b^2=0$ und tang $2\gamma=0$, wobei dieser Wert von der negativen Seite her erreicht wird. Der Erdbebenstrahl ist somit eine in die Axe $OE$ fallende Gerade von der Länge $\sqrt{\frac{N}{p}}$. Ist aber $\varepsilon=0$, daher $\gamma=0$, so wird auch $a=\sqrt{\frac{N}{p}-\rho_0^2}$, $b=\rho_0$, der Strahl wird eine die Kugel vom Radius $\rho_0$ berührende Ellipse, deren grosse Axe senkrecht auf die Erdbebenaxe $OE$ steht. Da ausserdem in den Gleichungen nur $\cos^2\varepsilon$ vorkommt, so wird der Radiusvector für $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ derselbe, ebenso auch für $90°+\varepsilon$ und $90°-\varepsilon$. Die Centralaxe sowohl, als die im Bebencentrum darauf errichtete Senkrechte bilden eine Symmetrieaxe der Erdbebenstrahlen.

Im Folgenden wird es auch nötig sein, die Apexcurve der Ellipsen zu untersuchen, d. h. jene Meridiancurve, welche die Apexe der zu den aufeinanderfolgenden $\varepsilon$ gehörigen Ellipsen einhüllt. Ist wieder $OE$ die Polaraxe, das Erdcentrum der Coordinatenanfang, so ist die Anomalie des Apexes einfach

$$\varphi=90°+\gamma \quad \text{oder} \quad \cos 2\varphi=-\cos 2\gamma, \tag{24}$$

was mit den Gleichungen 22) und 23) nach Elimination von $\varepsilon$ die geforderte Enveloppe giebt (Fig. 3 $AA'BB'$, pag. 430.):

$$2\frac{a^2}{\rho_0^2}(N-pa^2)=N+(N-2pa^2)\cos 2\varphi. \tag{25}$$

In rechtwinkeligen Coordinaten, deren Axe $OE$ ist, hat man

$$x=a\cos\varphi\,;\quad y=a\sin\varphi\,;\qquad 26)$$

und dem entsprechend:

$$p(x^4-y^4)-Nx^2+\frac{1}{\rho_0^2}(x^2+y^2)^2(N-p(x^2+y^2))=0,\qquad 27)$$

die ebenfalls die $X$ und $Y$ Axe als Symmetrieaxen haben. Das Maximum dieser Function ist selbstverständlich für $\varphi=0$: $a^2=\frac{N}{p}$ und das Minimum für $\varphi=90°$: $a^2=\frac{N}{p}-\rho_0^2$.

## Grenzdimensionen des Erdbebenstrahles.

Es ist klar, das sich die elliptische Gestalt des Erdbebenstrahles nur auf jenes Stück beziehen kann, das ganz im Inneren der Erde liegt; die Gestalt ist also jedenfalls weiterer Discussion fähig. Ist nämlich die Erde, oder überhaupt irgend ein Himmelskörper von solcher Beschaffenheit, dass für ihn beständig

$$n^2\rho^2>n_0^2\rho_0^2\cos^2\varepsilon$$

ist, so ist laut der Gleichung 9) $\varphi$ immer reell, und einer Zunahme von $\rho$ entspricht auch eine Zunahme von $\varphi$. Dann gelangt jeder unter beliebigem Winkel $\varepsilon$ sich von der Kugeloberfläche erhebende Strahl nicht nur zur Erdoberfläche, sondern dringt auch in die Luft ein und verfolgt seinen Weg bis zur Unendlichkeit, wenn die vorher angeschriebene Ungleichung auch für die Atmosphäre besteht. Ist $n^2$ eine continuirliche Function der Entfernung, so ist der Weg des Strahles sowohl in der Erde, als im Luftkreise eine stetige Curve, die nur an der Grenze beider Medien Brechung zeigt. Kann aber in irgend einem Punkte des Erdinneren

$$n^2\rho^2<n_0^2\rho_0^2\cos^2\varepsilon$$

sein, so giebt es Emersionswinkel, für welche die in dem Integralausdrucke für $\varphi$ vorkommende Wurzel imaginär wird. Dann muss der die Bedingung $\frac{\cos^2\varepsilon}{\rho^2}>\frac{n^2}{n_0^2\rho_0^2}$ erfüllende Strahl unter dem

Winkel $\varepsilon$ sich von der Kugelfläche $\rho_0$ bis zur Höhe $\rho$ erheben. Dann wird der Radicand 9) null, und im weiteren Verlaufe negativ, so dass $\varphi$ abzunehmen beginnt. Der Strahl kehrt daher, wie es bei der elliptischen Gestalt selbstverständlich ist, in der Höhe $\rho$ um, und senkt sich in einem dem aufsteigenden Aste symmetrischen Aste wieder zur Ausgangskugel zurück. Ist aber

$$\cos^2\varepsilon_0 = \frac{n^2\rho^2}{n_0^2\rho_0^2},$$

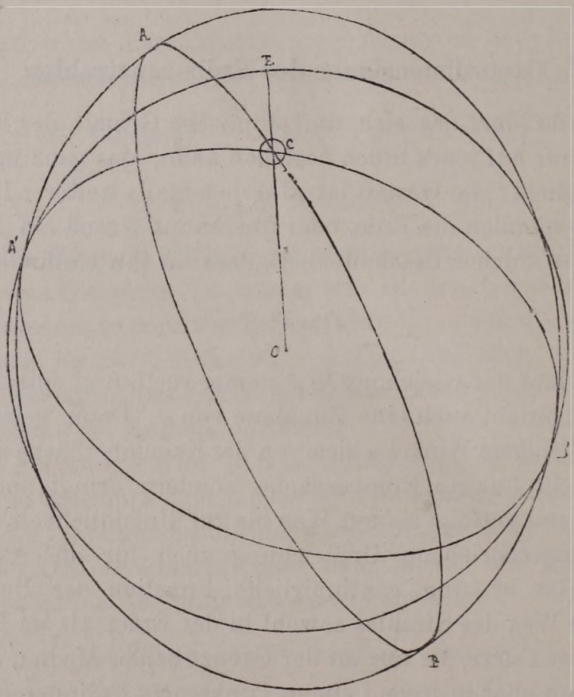



Fig. 3.

so erleidet der unter diesem Winkel $\varepsilon_0$ austretende Strahl circulare Brechung und umkreist die Kugel $\rho_0$ in unendlich vielen Windungen. Die kreisförmigen Strahlen bilden die Grenze zwischen jenen Strahlen, welche zwischen $\varepsilon = 90°$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$ liegend, zur Erdober-

fläche gelangen, und jenen, die zwischen $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\varepsilon = 0°$ austretend die Erdoberfläche nie erreichen. Die Energie dieser letzteren wird durch die ohne Ende anwachsende Absorption im Innern der Erde voll aufgezehrt.

Es ist daher im Vorhinein nicht ausgeschlossen, dass nur ein sehr schmaler Strahlenkegel eines im Inneren der Erde entstandenen Bebens wirksam zur Oberfläche kommt.

Das Integral 9) benützte schon KUMMER (Monatsber. d. Akad. d. Wiss. Berlin, Sitzg. 12. Juli 1860) beim Studium der atmosphärischen Strahlenbrechung; eine ganz neue und äusserst überraschende Theorie der Sonne gab AUG. SCHMIDT (Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik, Stuttgart, 1891) auf Grund der Gleichung 8) und auch OTTO KNOPF (Die SCHMIDT'sche Sonnentheorie und ihre Anwendung, Jena, 1893) fusst auf dem KUMMER'schen Integrale.

Während für die Erde der mehrfach erwähnte Radikand nachweisbar stets reell bleibt, lässt die Atmosphäre der Sonne und wahrscheinlich auch des Jupiter auch die zweite Möglichkeit zu. Ist demnach die Sonne ein gasförmiger Himmelskörper, dessen Dichtigkeit ohne jede physikalische Begrenzung bis zur Unendlichkeit abnimmt, so bilden die unter dem Emanationswinkel $\varepsilon_0$ austretenden Strahlen eine asymtotische Lichtkugelhülle als Scheide derjenigen Strahlen, die noch in den Weltraum gelangen, und stets im Innern der Sonne bleiben. Infolge dieses Umstandes muss die Sonne aus gewisser Entfernung betrachtet unbedingt den Eindruck einer scharf begrenzten Kugel machen.

Wir untersuchen nun die grosse Axe des elliptischen Strahles, da es von der Grösse dieser Linie abhängt, ob ein Beben auf der Erdoberfläche seismisch fühlbar wird. Ist nämlich $a > 1$, wie $AB$ in Fig. 3, so erreicht die Bebenwelle nicht nur die Erdoberfläche, sondern tritt sogar in die Luft über. Unter welchem Winkel dies auch immer geschehe, der Strahl wird der vorher erwähnten Eigenschaft der Luft halber nach den Gesetzen der astronomischen Strahlenbrechung abgelenkt, ohne dass er noch einmal auf dem wieder absteigenden Aste der Ellipse die Erdoberfläche seismisch beeinflussen könnte. Es folgte zugleich, dass die Bedingung $a > 1$ stets erfüllt gedacht, ein jedes wo immer ausgelöstes Beben auf der

ganzen Erde fühlbar sein müsste, was selbst den mikroseismischen Beobachtungen widerspricht. Wäre aber wenigstens in gewissen Fällen $a<1$, so könnte ein guter Teil der Erdbebenstrahlen ganz innerhalb der Erde verbleiben, ohne die Oberfläche im Mindesten zu erschüttern. Ein sehr intensives Beben kann in solchem Falle auf geringe Ausdehnungen beschränkt bleiben, und es ist sehr wahrscheinlich, dass die absorbierte Energie der endogenen Beben — welche bekanntlich die Rotation der Erde nicht beeinflussen — jene Massenumlagerungen bewirkt oder wenigstens vorbereitet, welche allgemein zur Erklärung der Polhöhenänderungen herbeigezogen werden. Dann wäre von vornherein der Gedanke nicht abzuweisen, dass zwischen den Perioden beider Erscheinungen gewisse, wenn auch entfernte Verwandtschaft bestehe.

Um die Verhältnisse zu untersuchen, unter welchen $a<1$ ist, genügt es den Grenzfall $a=1$ ($A'B'$ in der Fig. 3) zu betrachten. Für diese Annahme folgt aus 22):

$$2p-N=\sqrt{N^2-4p(N-p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}, \qquad 28)$$

und hieraus weiter

$$\cos^2\varepsilon=\frac{N-p}{(N-p\rho_0^2)\rho_0^2} \qquad 29)$$

als derjenige Emersionswinkel, unter welchem der Strahl austreten muss, um die Erdoberfläche eben zu berühren. Setzt man vorübergehend

$$z=\rho_0^2(N-p\rho_0^2), \qquad 30)$$

so sieht man zunächst wegen der in der Natur der Sache liegenden Bedingung: $1>\rho_0>0$, dass $\cos^2\varepsilon$ nicht negativ werden kann, da nach 15) bei positivem $\mu$: $N>p$ sein muss. Die Wurzeln der Gleichung $z=0$ sind weiter:

$$\rho_0'^2=0, \quad \text{und} \quad \rho_0''^2=\frac{N}{p}=\frac{1+\sigma\mu}{a\sigma\mu}. \qquad 31)$$

Der letztere Wert nimmt bei wachsendem $\mu$ stets ab, erlangt also sein Minimum für $\mu=\infty$ in der Grösse von $\frac{1}{a}=\frac{4}{3}$. Im Falle

geradliniger Strahlen ist dagegen $\mu=0$, was das Maximum von $\rho_0''$ bestimmt. Es ist daher

$$\rho_0'=0, \quad \text{und} \quad \infty>\rho_0''>\frac{2}{\sqrt{3}}=1{\cdot}1547, \tag{32}$$

so dass von den beiden positiven Wurzeln der Gleichung $z=0$ die eine stets in den Erdmittelpunkt fällt, die andere hingegen über die Erdoberfläche hinausragt. Für beide Wurzeln ist $\cos^2\varepsilon=\infty$, $\varepsilon$ daher imaginär. Zwischen beiden Wurzeln hat aber $z$, das in der Höhe

$$[\rho_0^2]=\frac{N}{2p}=\frac{1+\sigma\mu}{2\alpha\sigma\mu} \tag{33}$$

liegende Maximum

$$Z=\frac{N^2}{4p}=\frac{(1+\sigma\mu)^2}{4\alpha\sigma\mu}; \tag{34}$$

für welches $[\rho_0]$ schon in das Innere der Erde fallen kann. (Dies geschieht schon, sobald

$$\mu=\frac{1}{(2\alpha-1)\sigma}=\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}$$

wird, was für $\mu=\frac{1}{2}$ und $n_1=1{,}2247$ eintritt). Man hat nämlich für $\mu=0$ und $\mu=\infty$ die Bedingung:

$$\infty>[\rho_0]>\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}=0{\cdot}8165\,; \tag{35}$$

so dass der Erdbebenheerd in bisher nicht geahnte Tiefen versetzt werden kann, ohne dass ein bedeutender Teil der Oberfläche erschüttert würde. Nimmt man den Erdradius zu 6370 km an, so ist diese Tiefe 1169 km, oder bei dem genaueren Wert $\alpha=0{,}764$ geradezu 1217 km. Es ist natürlich möglich, dass ein den bisherigen Erfahrungen (über die mittlere Dichte der Erde, die Abplattung und das Verhältnis der Hauptträgheitsmomente) ebenfalls entsprechendes, vom Roche'schen verschiedenes Dichtigkeitsgesetz zu noch grösseren Tiefen des Erdbebenheerdes führen kann.

Das aus 29) folgende absolute Minimum $\cos^2\varepsilon$ wird daher für $\rho_0=[\rho_0]$:

$$\cos^2\varepsilon_0=\frac{4p}{N^2}(N-p); \qquad 36)$$

und hiebei ist zugleich $\zeta_0=90^\circ-\varepsilon_0$ die Maximalöffnung jenes mit seiner Spitze in der Höhe $[\rho_0]$ liegenden mit $OE$ coaxialen Kegels, innerhalb dessen Erdbebenstrahlen die Erdoberfläche überhaupt treffen können. Da

$$\frac{d}{d\mu}(\sin^2\zeta_0)=\frac{4\alpha\sigma^2\mu}{(1+\sigma\mu)^3}(1-2\alpha)$$

ei dem Werte von $\alpha$ für positive $\mu$ wesentlich negativ ist, so nimmt die Kegelöffnung für wachsendes $\mu$ fortwährend ab. Daher ist $\sin^2\zeta_0$ jedenfalls grösser, als dessen Wert 36) für $\mu=\infty$, d. h.:

$$\sin^2\zeta_0>4\alpha(1-\alpha)=\tfrac{3}{4},\quad \zeta_0>60^\circ; \qquad 37)$$

und ein von dem Roche'schen verschiedenes Dichtegesetz würde natürlich auch hier zu anderen Werten führen.

Da wesentlich $\cos^2\varepsilon<1$ sein muss, so erhält man schliesslich die Lage des Bebencentrums, dessen Wellen die Erdoberfläche nur zum Teil erreichen, wenn man $\rho_0$ so wählt, dass es 29) entsprechend zwischen den Wurzeln von

$$(N-p\rho_0^2)\rho_0^2=N-p$$

liege. Es muss daher

$$1>\rho_0^2>\frac{N}{p}-1 \qquad 38)$$

sein, oder wenn man für $\frac{N}{p}-$ den aus $\mu=\infty$ folgenden grösstmöglichen Wert einführt:

$$1>\rho_0>\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}=0{\cdot}5773. \qquad 39)$$

Wird also der minimale Flächeninhalt, der durch ein Beben erschüttert wird, überschritten, so kann der Heerd des Erdbebens

bis zur Tiefe von 2693 km hinabsteigen. Ein jedes Beben, dessen Centrum also nicht tiefer als $\sqrt{\frac{1}{a}-1}=0{,}5773$ liegt, kann nicht die ganze Erdoberfläche erschüttern.

Endlich folgt aus einfacher Betrachtung der Gleichung 22), dass ganz allgemein

$$\frac{N}{p}>a^2>\frac{N}{2p}$$

ist, und da die absoluten Extreme eintreten, wenn man für $\mu$ die Null und $\infty$ setzt, so hat man für alle Fälle:

$$\infty>a>0.8165. \qquad 40)$$

Da praktisch genommen der Spielraum von $\mu$ ein viel beschränkterer ist, so sind natürlich auch die Grenzen von $a$ bedeutend enger zu ziehen.

## Die Ausbreitung der Beben auf der Erdoberfläche; charakteristische Linien und Schüttergebiet.

Die Ausdehnung der Erdbebenbewegung auf der Erdoberfläche kann sehr einfach bestimmt werden, wenn man in 20) und 23) $\gamma$ eliminiert, und $\rho=1$ setzt. Man erhält zunächst den Schnitt der aufsteigenden Ellipsenhälfte mit der Erdoberfläche, d. h. den sphärischen Abstand $\varphi$ jenes Punktes vom Epicentrum, in welchem der unter dem Winkel $\varepsilon$ emanierte Strahl die Oberfläche trifft. Man hat vorerst:

$$\rho^2=\frac{(N-p\rho_0^2)\,\rho_0^2\cos^2\varepsilon}{N\sin^2\varphi+(N-p\rho_0^2)\cos\varepsilon\cos(2\varphi+\varepsilon)}; \qquad 41)$$

und $\rho=1$ gesetzt:

$$N\sin^2\varphi+(N-p\rho_0^2)\cos\varepsilon\,(\cos(2\varphi+\varepsilon)-\rho_0^2\cos^2\varepsilon)=0, \qquad 42)$$

was den zum Emersionswinkel $\varepsilon$ gehörigen Abstand $\varphi$ liefert. Numerisch bequemere Ausdrücke erhält man, indem man

$$M\sin m=(N-p\rho_0^2)\cos^2\varepsilon-\frac{N}{2};\quad M\cos m=(N-p\rho_0^2)\sin\varepsilon\cos\varepsilon \qquad 43)$$

setzt, worauf $\varphi$ aus

$$M \sin(2\varphi - m) = \frac{N}{2} - (N - p\rho_0^2)\rho_0^2 \cos^2\varepsilon \qquad 44)$$

gefunden wird.

Man berechnet natürlich auch ganz leicht die Grenzlinie des Schüttergebietes, wenn man an Stelle von $\varepsilon$ jenen aus 29) zu entnehmenden Winkel setzt, innerhalb dessen kein Strahl mehr zur Erdoberfläche gelangt. Setzt man daher 29) in 42) und nennt den Kugelradius des minimalen Gebietes $\varphi_0$, so kommt:

$$(2(N-p) - N\rho_0^2)\cos 2\varphi_0 -$$
$$-2\sqrt{1-\rho_0^2}\sqrt{N-p}\sqrt{p(1+\rho_0^2)-N}.\sin 2\varphi_0 = (N-2p)\rho_0^2, \qquad 45)$$

welche durch geeignete Hilfswinkel ebenfalls leicht lösbar ist. Das absolut kleinste Schüttergebiet erhält man bei möglichst grosser Tiefe des Erdbebencentrums, wenn mit den Werten $[\rho_0]$ und $\varepsilon_0$ aus 33) und 36) gerechnet wird. Den sphärischen Radius desselben zu $\Phi$ genommen, kommt

$$2\sqrt{p(N-p)}\sin 2\Phi + (2p-N)\cos 2\Phi = N. \qquad 46)$$

Die Gleichung braucht nicht näher discutiert zu werden, da sie sogleich in bequemerer Gestalt wieder erscheinen wird.

## Gleichung der Coseiste.

Ein wichtiges seismisches Element ist jener Winkel $e$, unter welchem der Stoss die Erdoberfläche verlässt, nämlich der (oberflächliche) Emersionswinkel. Die Gesammtheit aller Punkte, welche denselben Emersionswinkel besitzen, möge die Coseiste heissen. Ist Dichte und Brechungsindex der Erde nur eine Function der Entfernung vom Erdcentrum, dann wird wegen der symmetrischen Lage sämmtlicher Strahlen um die Axe $OE$ die Coseiste ein Kreis. Der Emersionswinkel bedingt weiter, eine wie grosse Componente der Bebenintensität in die horizontale und verticale Richtung falle.

Da derselbe identisch ist mit dem Höhenwinkel der an den Strahl in der Erdoberfläche gezogenen Tangente, so hat man aus

Fig 2, indem man den Winkel derselben mit dem nach Innen gelegenen Zweige der Axe $OE$ mit $\tau$ bezeichnet:

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\sin\varphi - \frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi}; \qquad 47)$$

und nach 41)

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{(N-p\rho_0^2)\cos\varepsilon\sin(2\varphi+\varepsilon) - N\sin\varphi\cos\varphi}{N\sin^2\varphi + (N-p\rho_0^2)\cos\varepsilon\cos(2\varphi+\varepsilon)}\rho; \qquad 48)$$

wobei noch für die Oberfläche $\rho=1$ zu setzen bleibt. Da aus dem Dreiecke $OPC'$

$$e=\tau+\varphi-90°, \qquad 49)$$

folgt, so ist einfacher

$$\operatorname{tang} e = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{1}{\rho}, \quad \rho=1,$$

mithin:

$$\operatorname{tang} e = \frac{(N-p\rho_0^2)\cos\varepsilon\sin(2\varphi+\varepsilon) - N\sin\varphi\cos\varphi}{N\sin^2\varphi + (N-p\rho_0^2)\cos\varepsilon\cos(2\varphi+\varepsilon)};$$

oder

$$\operatorname{tang} e = \frac{(N-p\rho_0^2)\cos\varepsilon\sin(2\varphi+\varepsilon) - N\sin\varphi\cos\varphi}{(N-p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon}; \qquad 50)$$

wie aus 41) für $\rho=1$ ersichtlich ist. Die zweite Form ist des einfacheren Nenners halber die vorteilhaftere. Um den Emersionswinkel in dem sphärischen Abstande $\varphi$ zu finden, muss $\varepsilon$ eliminiert werden. Man könnte zu dem Ende die Gleichung 42) benützen, kommt jedoch rascher mit Gleichung 10) zum Ziele. Diese giebt mit Rücksicht auf 16):

$$C^2 = (N-p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon$$

und genau dieselbe Constante muss man erhalten, wenn man die entsprechenden Grössen für die Erdoberfläche einsetzt. Es ist also $\rho_0=1$ und $\varepsilon=e$ zu setzen, und man erhält:

$$(N-p)\cos^2 e = (N-p\rho_0^2)\rho_0^2\cos^2\varepsilon, \qquad 51)$$

welche Gleichung den zu jedem Emanationswinkel gehörigen Emersionswinkel giebt. Hiemit kann aus 50) die folgende elegante Formel abgeleitet werden:

$$N(\cos^2 e-\rho_0^2\cos^2(\varphi-e))=p(\cos e-\rho_0^2\cos(2\varphi-e))\cos e, \quad 52)$$

welche die Gleichung der Coseiste wird, wenn man dem $e$ constanten, sonst aber beliebigen Wert beilegt.

Setzt man $e=0$, so erhält man selbstverständlich die Maximalausdehnung des Schüttergebietes, insofern als nur jene Strahlen der Erdoberfläche parallel schreiten können, deren Apex dieselbe eben berührt. Die darauffolgenden, zu einem kleineren $\varepsilon$ gehörenden Ellipsen liegen schon ganz im Innern der Erde. Gleichung 50) giebt für die Maximalausdehnung:

$$\operatorname{tang} 2\varphi=\frac{(N-p\rho_0^2)\sin 2\varepsilon}{N-2(N-p\rho_0^2)\cos^2\varepsilon}, \quad 53)$$

was nach 23) einfach mit $\operatorname{tang} 2\gamma$ identisch ist. Man hat unter Berücksichtigung des Umstandes, dass der Apex stets 90° von der kleinen Axe liegt, diese aber mit $OE$ den Winkel $\gamma$ einschliesst:

$$\varphi=\gamma+90°. \quad 54)$$

Setzt man dagegen in 52) $e=0$, so kommt

$$\sin^2\varphi=\frac{(N-p)(1-\rho_0^2)}{(2p-N)\rho_0^2}; \quad \cos^2\varphi=\frac{p\rho_0^2-(N-p)}{(2p-N)\rho_0^2}: \quad 55)$$

als Gleichung der Nullcoseiste und daher auch des Grenzkreises des Schüttergebietes. Leicht nachweislich sind die Gleichungen 55) und 45) identisch. Versetzt man endlich das Erdbebencentrum in die Tiefe $\rho_0=[\rho_0]$, so erhält man bei grösstmöglicher Tiefe des Heerdes die möglichst kleinste Ausdehnung des Bebens. Mit Rücksicht auf 33) kommt sofort:

$$\sin^2\varphi_0=1-\frac{p}{N}; \quad \cos^2\varphi_0=\frac{p}{N}, \quad 56)$$

oder anders geschrieben:

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = \sqrt{\frac{1+\sigma\mu}{\alpha\sigma\mu} - 1}. \qquad 57)$$

Die absolut kleinste Schütterzone erhält man, wenn $\mu = \infty$ wäre. Dann ist für $\alpha = \frac{3}{4}$ $\varphi_0 = 30°$, für den genaueren Wert $\alpha = 0{,}764$ nur mehr $\varphi_0 = 29°4'$. Man sieht daher, dass die Ausbreitung des Bebens sehr empfindlich für selbst kleine Veränderungen der Constanten $\alpha$ ist, so dass es leicht verständlich wird, dass die geringsten oberflächlichen Dichteänderungen der Erde den Coseisten kilometertiefe Buchten einprägen. Der vorerwähnte Schütterkreis beträgt übrigens den $\frac{1}{14{,}93}$, resp. $\frac{1}{15{,}88}$ Teil der Erdoberfläche, daher bedeutend weniger als der Kreis des grossen Lissaboner Bebens, der $\frac{1}{13}$ der Erde bedeckte. Das andere Extrem für $\mu$ ist $\mu = 0$, bei welchem Werte eine wo immer ausgelöste Erdbebenwelle an allen Punkten der Erde fühlbar wird.

Der Schnittpunkt $C'$ (Fig. 2) der Tangente des Erdbebenstrahles mit der Axe $OE$ ist übrigens jener Punkt, in welchen die Hypothese geradliniger Bebenstrahlen den aus dem Emissionswinkel gefolgerten Heerd des Bebens verlegt. Da $OP = 1$ ist, hat man für die Entfernung dieses Punktes von dem Centrum der Erde

$$\rho' = \frac{\cos e}{\cos(\varphi - e)},$$

so dass man für dem Epicentrum nahegelegene Orte stets zu solchen Werten geführt wird, die nur unwesentlich kleiner als 1 sind. Hieraus die Mallet'sche Schlussfolgerung, dass Erdbeben sehr oberflächlich liegende intracrustale Erscheinungen seien.

## Wellenfläche der Erdbeben, Gleichung der Homoseisten.

Die Wellenfläche der Beben ist die Gesammtheit aller jener Punkte, bis zu welchen ein Erdstoss vom Heerde des Bebens unter gegebener Zeit gelangt. Ist daher $v_1$ die Oberflächengeschwindigkeit

der Beben, und (nach 16) $n_1=\sqrt{N-p}$ der Brechungsindex ebendaselbst, dann wird

$$t=\frac{1}{v_1 n_1}\int_{\varrho_0}^{\varrho} n ds=\frac{1}{v_1 n_1}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{n^2\rho d\rho}{\sqrt{n^2\rho^2-C^2}},$$

oder nach Substitution des Wertes von $n^2$ aus 16):

$$t=\frac{1}{v_1 n_1}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{(N-p\rho^2)\rho d\rho}{\sqrt{N\rho^2-p\rho^4-C^2}}, \tag{58}$$

was durch die Substitution $\rho^2=x$ sogleich integrabel wird. Das unbestimmte Integral lautet:

$$t=\frac{1}{2v_1 n_1}\sqrt{N\rho^2-p\rho^4-C^2}+$$
$$+\frac{N}{4\sqrt{p}v_1 n_1}\arcsin\frac{2p\rho^2-N}{\sqrt{N^2-4pC^2}}+\text{const.} \tag{59}$$

und giebt sogleich die Gleichung der Wellenfläche, wenn man dem $t$ einen beliebigen, aber constanten Wert zuteilt. Durch gehörige Vereinigung der Constanten kommt:

$$2\sqrt{p}\sqrt{N\rho^2-p\rho^4-C^2}+N\arcsin\frac{2p\rho^2-N}{\sqrt{N^2-4pC^2}}=k: \tag{60}$$

wo $k$ die Charakteristik der Wellenfläche darstellt. Da $C^2$ nach 10) nur $\cos^2\varepsilon$ enthält, so ist die Wellenfläche eine Rotationsfläche, $OE$ deren Axe und die hierauf Senkrechte ebenfalls eine Symmetrieaxe der Meridiancurve.

Setzt man

$$4pC^2=x^2,\quad N\rho^2-p\rho^4-C^2=\frac{N^2}{4p}y^2, \tag{61}$$

so kommt zunächst

$$\rho^2=\frac{N}{2p}\left\{1\pm\sqrt{1-y^2-\frac{x^2}{N^2}}\right\}; \tag{62}$$

und die Gleichung wird:

$$\pm\sqrt{\frac{N^2(1-y^2)-4pC^2}{N^2-4pC^2}}=\sin\left(\frac{k}{N}-y\right);$$

oder durch Quadrierung und Subtraction von der Einheit:

$$\frac{\cos\left(\frac{k}{N}-y\right)}{y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{N^2}}}. \qquad 63)$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann aus dem zu jedem $\varepsilon$ gehörigen $x$ das $y$, hierauf mit 62) auch $\rho$ bestimmt werden. Man könnte wohl mit der Gleichung 41) statt $\varepsilon$ auch $\varphi$ einführen. Doch würde das unzweckmässige Verwickelungen herbeiführen.

Die Constante mag am zweckmässigsten so bestimmt werden, dass die Wellenfläche die Erdoberfläche im Epicentrum berühre; dann ist $\varepsilon=90°$ und $\rho=1$, daher

$$k=2\sqrt{p}\sqrt{N-p}+N\arcsin\frac{2p-N}{N}. \qquad 64)$$

Für geradlinige Erdbebenstrahlen ist $\mu=0$ und $\frac{k}{N}=-\frac{\pi}{2}$; für $\mu=\infty$ aber $\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{2}=79°37'.2$; ist $\mu=\frac{1}{2}$, so wird

$$\frac{k}{N}=1=57°17'.7.$$

Im Allgemeinen ist der Anfangswert von $\frac{k}{N}$: $-90°$, der Endwert $79°37'.2$. Für $\mu=3$, d. h. $n_1=2$ wird $\frac{k}{N}=75°31'.8$ und für $\mu=0{,}0695$, d. h. $n_1=1{,}0342$: $\frac{k}{N}=0$. Das Wachstum dieser Constanten ist mit zunehmendem $\mu$ ein sehr rasches, von $n_1=2$ angefangen aber bereits sehr langsames.

Die Wellenfläche ist jedenfalls geschlossen, wenn zu jedem beliebigen $\varepsilon$ ein endliches, reelles $\rho$ gehört. $\rho$ ist reell, wenn nach

62) $y^2<1-\frac{x^2}{N^2}$. Diese Ungleichung besteht aber in der Tat, ergiebt sich wieder aus 63), da ja $\cos\left(\frac{k}{N}-y\right)<1$ ist. Dieselbe Ueberlegung zeigt auch, dass die der Gleichung 62) entsprechenden beiden Wellenflächen keinen reellen Berührungspunkt besitzen.

Ist nun kurz

$$z=\frac{\cos\left(\frac{k}{N}-y\right)}{y}, \qquad 65)$$

so hat man $z=\infty$ für $y=0$; wird $y=2n\frac{\pi}{2}$, so ist $z=(-1)^n\frac{2\cos\frac{k}{N}}{2n\pi}$; und für $y=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ hat man $z=(-1)^n\frac{2\sin\frac{k}{N}}{(2n+1)\pi}$. Die durch 65) charakterisierte Curve ist daher eine rasch gedämpfte Sinuslinie, deren erster Nullwert zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ fällt. Nun ist aber nach 63) $z>1$, wo doch schon die Annahme $y=\frac{\pi}{2}$ zu dem Werte $z<1$ führt. Es folgt daraus, dass die uns interessierenden Lösungen der Gleichung 63) innerhalb der Grenzen $\frac{\pi}{2}>y>0$ zu suchen sind. Noch zu bemerken wäre, dass nach 34) der Maximalwert von $\frac{x^2}{N^2}$ nur $\cos^2\varepsilon$ sein kann; mithin ist die rechte Seite von 63) höchstens $\operatorname{cosec}\varepsilon$, also stets reell. Rein imaginäre Werte von $y$ können zwar einen der Strahlen der Wellenfläche in 62) imaginär gestalten.

$\rho$ und $\varepsilon$ bestimmen zusammen wohl die Wellenfläche, doch keineswegs in einer Form, dass die Fläche sogleich construiert werden kann. Man müsste nämlich aus dem Erdbebencentrum unter dem Winkel $\varepsilon$ austretende elliptische Strahlen mit den aus 22) zu folgernden Dimensionen ziehen, bis diese den aus dem Erdcentrum mit dem Radius 62) construierten Kreis treffen. Einfacher geht man vor, wenn man mit dem aus 62) schon bekannten Radius aus 20) den Winkel $\varphi-\gamma$ berechnet. Mit den in 61) angenommenen Bezeichnungen hat man dann

$$\cos 2(\varphi-\gamma)=\frac{\frac{N}{2p}\cdot\frac{x^2}{N^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{N^2}}}; \qquad 66)$$

was natürlich wegen der Zweideutigkeit von $\rho^2$ auch zu je zwei Werten von $\varphi$ führt.

Man kann übrigens auch so vorgehen, dass man mit dem Werte von $\rho$ aus 41) unmittelbar $\cos\varepsilon$ berechnet, und dies in die Gleichung der Wellenfläche einstellt; die Auflösung ergiebt:

$$\cos^2\varepsilon=\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{(N-p\rho_0^2)(\rho^4+\rho_0^4-2\rho^2\rho_0^2\cos 2\varphi)}(N(\rho^2+\rho_0^2)-2p\rho^2\rho_0^2\cos^2\varphi\pm$$

$$\pm 2\rho\rho_0\cos\varphi\sqrt{N^2-pN(\rho^2+\rho_0^2)+p^2\rho^2\rho_0^2\cos^2\varphi}), \qquad 67)$$

und führt die übliche Polargleichung der Wellenfläche herbei.

Die Wellenfläche ist, entsprechend dem in 62) vorkommenden Doppelzeichen, zweischalig: $AB$ und $A'B'$ (Fig. 4). Die dem positiven Vorzeichen entsprechende Fläche berührt der zur Bestimmung von $h$ getroffenen Massregel halber die Erdoberfläche in dem Epicentrum und in dessen Antipodenpunkte. Dann erhebt sich die Fläche über die Erde, verläuft aber in der durch die Erdbebenaxe vorgezeichneten Aequatorialzone innerhalb der Erde. Die ganze Erde wird von ihr daher in zwei, auf die Erdbebenaxe senkrechten Parallelkreisen geschnitten. Die dem negativen Vorzeichen entsprechende Schale hat nur geometrische Bedeutung, und bildet eine eigentümliche, um den Heerd der Erschütterung gelagerte offene Fläche, in der auch die imaginären Werte von $y$ der Gleichung 63) vorkommen.

Setzt man in der Gleichung der Wellenfläche $\rho=1$, so erhält man die Schnittcurve derselben mit der Erdoberfläche. Sie ist die Gesammtheit aller Punkte, welche den Erdbebenstoss zu derselben Zeit verspüren. Diese Curve heisst die Homoseiste, und ist unseren einfachen Annahmen zufolge ein Kreis. Nimmt man, wie es gewöhnlich geschieht, als Anfangspunkt der Zeit jenen Zeitpunkt, in welchem der Stoss ins Epicentrum gelangt, so hat man für die Fortpflanzungszeit vom Heerde bis zum Epicentrum nach

Gleichung 59):

$$t_0 = \frac{1}{4\sqrt{p}\, v_1 n_1}\left\{2\sqrt{p}\,(\sqrt{N-p}-\sqrt{(N-p\rho_0^2)\,\rho_0^2})+\right.$$
$$\left.+N\left(\arcsin\frac{2p-N}{N}-\arcsin\frac{2p\rho_0^2-N}{N}\right)\right\}. \qquad 68)$$

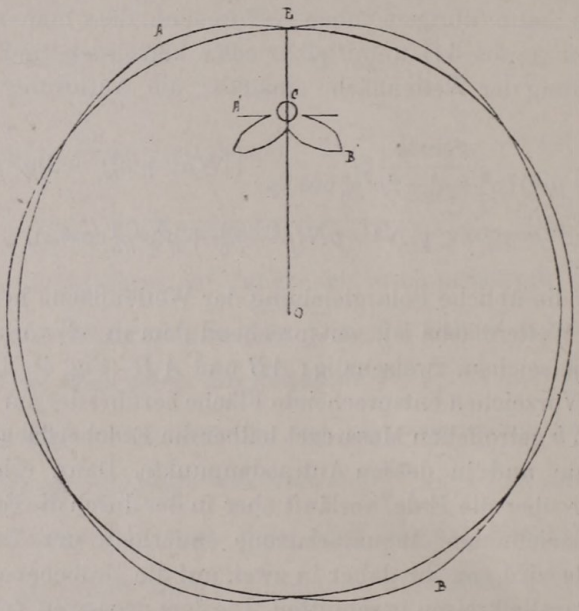


Fig. 4.

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem Integrale 58), wenn die obere Grenze $\rho=1$, $\varepsilon=90^\circ$ oder $C=0$ gesetzt wird. Im dem Strahle von beliebiger Emanation $\varepsilon$ ist dagegen die Fortpflanzungszeit vom Heerde bis zur Oberfläche

$$t' = \frac{1}{4\sqrt{p}\, v_1 n_1}\left\{2\sqrt{p}\,(\sqrt{N-p-C^2}-\sqrt{N\rho_0^2-p\rho_0^4-C^2})+\right.$$
$$\left.+N\left(\arcsin\frac{2p-N}{\sqrt{N^2-4pC^2}}-\arcsin\frac{2p\rho_0^2-N}{\sqrt{N^2-4pC^2}}\right)\right\}. \qquad 69)$$

Die Differenz beider Zeiten $t'-t_0=t$ ist offenbar die Zeit, um welche ein auf dem Strahle von dem Emersionswinkel $\varepsilon$ gelegener Ort den Stoss später fühlt, als das Epicentrum. Diese Zeit, deren Gleichung zugleich der Ausdruck der Homoseiste ist, wird

$$\left.\begin{aligned} t=\frac{1}{4\sqrt{p}\,v_1 n_1}\Big\{ & 2\sqrt{p}\,(\sqrt{N-p-C^2}-\sqrt{N-p})+ \\ & +N\arcsin\left(\frac{2\sqrt{p}(2p-N)}{N\sqrt{N^2-4pC^2}}\,(\sqrt{N-p}-\sqrt{N-p-C^2})\right)- \\ & -2\sqrt{p}\,(\sqrt{N\rho_0^2-p\rho_0^4-C^2}-\sqrt{N-p\rho_0^2}\,.\,\rho_0)- \\ & N\arcsin\left(\frac{2\sqrt{p}(2p\rho_0^2-N)}{N\sqrt{N^2-4pC^2}}\,(\rho_0\sqrt{N-p\rho_0^2}-\sqrt{N\rho_0^2-p\rho_0^4-C^2})\right)\Big\}; \end{aligned}\right\} \quad 70)$$

wo wieder das in $C^2$ vorkommende $\varepsilon$ durch 42) ausgedrückt werden kann. Das so einzuführende $\varphi$ bedeutet natürlich den sphärischen Radius der Homoseiste. Da aber diese Substitution wieder zu stark verwickelten Formeln führt, kann ein anderes, seismisch wichtiges Element, z. B. der Emanationswinkel $e$ eingeführt werden, am leichtesten durch Gleichung 51).

Schon im Falle der Wellenfläche sahen wir, und hier wiederholt sich natürlich der Vorgang, dass sowohl zu $\varepsilon$, als auch zu $180°+\varepsilon$ dieselbe Fortpflanzungszeit gehört. Es pflanzen sich daher aus dem Erdbebenheerde nicht nur gegen die nahe gelegenen Orte der Erdoberfläche Strahlen fort, sondern auch gegen das Innere der Erde, und zwar in derselben Ellipse nach oben und unten mit derselben Schnelligkeit. Dies der Grund, dass die Wellenfläche im Epicentrum und dessen Antipodenpunkt identisch gestaltet ist. Doch besteht die Erschütterung im Antipodenpunkte nur geometrisch, physisch ist sie, wie später nachgewiesen werden soll, gar nicht fühlbar. Jedenfalls ist es aber eine auffällige Erscheinung, dass von einem ziemlich oberflächlich liegenden Heerde ausgehende Wellen den nächst und weitest liegenden Punkt der Oberfläche in derselben Zeit erreichen. Es hängt dies mit einer anderen merkwürdigen Eigenschaft der Fortpflanzung zusammen: welches immer die Gestalt und Dimension der Strahlenellipse sein

mag, der zwischen den Axen liegende Ellipsenquadrant wird stets in derselben Zeit durchmessen; oder anders ausgedrückt: die volle Umlaufszeit eines Erdstosses in einem elliptischen Strahle von beliebiger Gestalt und Dimension ist unabhängig von der Lage des Erdbebenheerdes dieselbe. Die Zeit, welche das Beben braucht, um von dem Centrum $C$ zum Endpunkt der grossen und kleinen Axe zu gelangen, ergiebt sich aus 58) wenn für die obere Grenze aus 22) einmal $a$, das anderemal $b$ gesetzt wird. Das Resultat ist,

$$t = \pm \frac{N}{4\sqrt{p}\, v_1 n_1} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2v_1 n_1} \sqrt{N\rho_0^2 - p\rho_0^4 - C^2} - \\ - \frac{N}{4\sqrt{p}\, v_1 n_1} \arcsin \frac{2p\rho_0^2 - N}{\sqrt{N^2 - 4pC^2}}, \qquad 71)$$

wo sich das obere Zeichen auf die grosse, das untere auf die kleine Axe bezieht. Das Doppelte des Unterschiedes beider Zeiten ist

$$T = \frac{2N\pi}{4\sqrt{p}\, v_1 n_1}; \qquad 72)$$

die Umlaufszeit des Strahles, in welcher $\rho_0$ gar nicht vorkommt. Im Falle geradliniger Strahlen ist diese Zeit natürlich unendlich. Zwei Minima derselben treten aber für $\mu = \frac{1}{2}$, d. h. $n_1 = 1{,}2247$ und $\mu = \infty$ ein; sie sind

$$T' = \frac{\pi}{v_1} \quad \text{u.} \quad T'' = \frac{\pi}{2v_1\sqrt{a(1-a)}}. \qquad 73)$$

Ist z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf der Erdoberfläche 637 m, also $v_1 = 0{,}0001$ Erdradius, so ist $T' = 8^h 43^m 36^s$ und $T'' = 10^h 4^m 30^s$. Der nach der vollen Umlaufszeit wiederholte zweite oder gar mehrfache Stoss ist natürlich nur in der Nullkoseiste fühlbar, wenn die grosse Absorption nicht alle vorhandene Energie auslöscht. Die übrigen Strahlenellipsen liegen nämlich entweder ganz im Innern der Erde, oder greifen in deren Luftkreis über, von welchem es — wie schon früher bewiesen — keine Rückkehr mehr giebt.

Die letzte Homoseiste ist natürlich jene, für welche das $\varepsilon$ aus

Gleichung 29) entnommen wird; sie ist also einfach mit der Nullcoseiste identisch. Ihre Zeitangabe ist aus Gleichung 70) zu entnehmen, wenn $C^2=N-p$ gesetzt wird; sie ist die grösste Zeitdifferenz, welche bei einem Beben überhaupt vorkommen kann. Ihr Wert:

$$t=\frac{1}{4\sqrt{p}\,v_1 n_1}\left\{-2\sqrt{p}\sqrt{N-p}+N\arcsin\frac{2\sqrt{p}\sqrt{N-p}}{N}-\right.$$
$$-2\sqrt{p}\left(\sqrt{p(1+\rho_0^2)-N}\sqrt{1-\rho_0^2}-\rho_0\sqrt{N-p\rho_0^2}\right)-N\arcsin$$
$$\left.\left(\frac{2\sqrt{p}\,(2p\rho_0^2-N)}{N(2p-N)}\left(\rho_0\sqrt{N-p\rho_0^2}-\sqrt{p(1+\rho_0^2)-N}\sqrt{1-\rho_0^2}\right)\right)\right\}. \quad 74)$$

Das eigentümlichste Resultat ist jedenfalls, — und dies ist bei allen Beben beobachtet worden — dass man mit der Geschwindigkeitsformel der gleichförmigen Bewegung rechnend, punktweise zu andern, und zwar zu zu grossen Geschwindigkeiten gelangt. Ist nämlich $\varphi$ der sphärische Radius einer Homoseiste, $V$ die aus den Beobachtungen abzuleitende Oberflächengeschwindigkeit, so giebt die gewöhnliche Formel:

$$V=\frac{\pi}{180}\frac{\varphi}{t}, \quad 75)$$

die schon nach flüchtiger Betrachtung nicht mit der Oberflächengeschwindigkeit $v_1$ der Gleichung 70) identisch genannt werden darf. Es ist leicht zu sehen, dass die so gerechnete Geschwindigkeit in der Nähe des Epicentrums viel zu gross ist, gegen die Grenze des Schüttergebietes abnimmt, aber selbst dort noch immer zu gross ausfällt. Zu demselben Resultate gelangt auf praktischem Wege John Milne (Earthquakes and other earth movements, London, 1886, p. 93). Daher sind auch alle jene Folgerungen verbesserungsbedürftig, die aus bisherigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten auf den Elasticitätsmodulus gezogen wurden.

Endlich ist nach Gleichung 71) keine nähere Verwandtschaft zwischen der Apexenveloppe und der Wellenfläche anzunehmen.

## Intensität der Beben; Isoseiste.

Zur numerischen Bestimmung dieses auch praktisch wichtigen Elementes stand bisher fast ausschliesslich nur die willkürliche Skale von Rossi-Fovel zur Verfügung; gewiss ist es der Mangel eines die Intensität genau und zuverlässig messenden Instrumentes, der auch die Aufstellung eines geeigneten analytischen Ausdruckes hinhielt. Nach Holden und Milne ist die Intensität als Maass der verheerenden Wirkung eines Bebens einfach proportional der Beschleunigung, die ein Erdstoss irgend einem Punkte mitteilt. Setzt man die Bewegungen als harmonische voraus — und an dieser Hypothese muss vor der Hand festgehalten werden — so ergiebt sich für die Intensität

$$I = \frac{4\pi^2 a}{u^2}, \qquad 76)$$

wobei $a$ die Amplitude der Bewegung an der Erdoberfläche, $u$ die Schwingungsperiode bedeutet. Beide Daten, besonders die Maximalgeschwindigkeit der Beben sind verhältnismässig leicht beizubringen; die letztere ergiebt sich aus der Beobachtung fortgeschleuderter oder umgestürzter Körper, wie Mallet an zahlreichen Beispielen darlegte. Etwas anders geht Mendenhall (Proc. of the Americ. Assoc. for Adv. of Sciences 37. 1888) vor, der an die Intensitätsformel des Schalles von Rayleigh anknüpft. Betrachtet man nämlich als mechanisches Maass der Strahlung die durch die der Wellenfläche parallel gezogene Flächeneinheit in der Secunde austretende Energie, so kann diese $\frac{2\pi^2 a^2}{u^2} sv$ geschrieben werden, wenn neben den früheren Bezeichnungen $s$ die Dichte des Mediums bezeichnet, in welchem die Schwingung sich mit der Geschwindigkeit $v$ fortpflanzt. Bedeutet nun $f$ einen Teil der Wellenfläche, $h$ eine hierauf senrechte Länge, so ist die durch $f$ in der Zeit $t = \frac{h}{v}$ strömende Energie $\frac{2\pi^2 a^2}{u^2} sv \frac{hf}{v}$. Setzt man statt $hfs$ die Masse $m$, durch welche die Fortpflanzung geschieht, statt $\frac{2\pi^2 a^2}{u^2}$

die Maximalgeschwindigkeit der Schwingung $V^2$, so erhält man natürlich die Formel der lebendigen Kraft

$$I=\tfrac{1}{2}mV^2; \qquad 77)$$

und diese mag als Ausdruck der Intensität betrachtet werden. Man sieht hieraus, dass die Arbeit, durch welche in gegebener Masse harmonische Beben zustande kommen, gerade so gross ist, wie die Arbeit, mit welcher die ganze Masse mit der Maximalgeschwindigkeit der Schwingung bewegt werden könnte. Es ist wiederholt zu betonen, dass hiebei die neue Annahme gemacht wurde, dass die Erdbebenbewegung wenigstens in eine Reihe von harmonischen Schwingungen zerlegt werden kann, also anders ausgedrückt, durch eine FOURIER'sche Reihe ausdrückbar ist. Zur Schätzung dieser Arbeit dient die Masse jenes geraden Kegels mit kreisförmiger Basis und elliptischer Mantellinie, der auf dem Schüttergebiete steht und seine Spitze im Erbebencentrum hat. Innerhalb dieses Kegels liegen bekanntlich alle Strahlen, welche überhaupt zur Oberfläche der Erde gelangen.

Ist (Fig. 2) $f$ ein Stück der Kugelschale mit dem Radius $\rho$, welches zwischen den Strahlen vom Emanationswinkel $\varepsilon$ begriffen ist, so hat dessen Oberfläche die Grösse

$$f=2\pi\rho^2(1-\cos\varphi),$$

und da die Dichte im Abstande $\rho$ vom Centrum durch 12) gegeben ist, wird die Masse des besagten Kegels:

$$m=2\pi S\int_{\rho_0}^{1}\rho^2(1-a\rho^2)(1-\cos\varphi)\,d\rho, \qquad 78)$$

wo $\varphi$ der zu $\rho$ gehörende Polarwinkel ist. Bezeichnet man diesen mit $\psi$, wenn er von der kleinen Axe an gerechnet wird, so ist $\psi=\varphi-\gamma$; es sei weiter kurz

$$q=\sqrt{N^2-4pC^2}, \qquad 79)$$

so kann die Gleichung 20) auch in folgender Form geschrieben werden

$$x=N-q+2q\cos^2\psi=\frac{2C^2}{\rho^2},$$

woraus

$$\rho^2=\frac{2C^2}{x},\quad \cos^2\psi=\frac{x-N+q}{2q},\quad \sin^2\psi=\frac{N+q-x}{2q};$$

$$d\rho=\frac{4C}{\sqrt{2}}q\frac{\sin\psi\cos\psi}{x^{\frac{3}{2}}}d\psi=-\frac{C}{\sqrt{2}}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

folgt. Schreibt man also

$$I_n=\int_{\varrho_0}^{1}\rho^{2n}\cos\varphi d\rho=\cos\gamma\int_{\varrho_0}^{1}\rho^{2n}\cos\psi d\rho-\sin\gamma\int_{\varrho_0}^{1}\rho^{2n}\sin\psi d\rho,$$

so wird die Masse des Kegels:

$$m=2\pi S\left[\frac{1}{3}(1-\rho_0^3)-\frac{a}{5}(1-\rho_0^5)-I_1+aI_2\right].$$

Nach der Substitution wird

$$I_n=\frac{2^{n-1}C^{2n+1}}{\sqrt{q}}\sin\gamma\int\frac{\sqrt{N+q-x}}{x^{n+\frac{3}{2}}}dx-$$

$$-\frac{2^{n-1}C^{2n+1}}{\sqrt{q}}\cos\gamma\int\frac{\sqrt{x-N+q}}{x^{n+\frac{3}{2}}}dx,$$

mit $x=\frac{2C^2}{\rho_0^2}$ als unterer, $x=2C^2$ als oberer Grenze. Nach Berechnung und gehöriger Zusammenziehung hat man:

$$\frac{m}{2\pi S}=\frac{1}{3}(1-\rho_0^3)-\frac{a}{5}(1-\rho_0^5)+\frac{\sin\gamma}{3\sqrt{2q}\,(N+q)^2}\cdot$$

$$\left\{(N+q-2C^2)^{\frac{3}{2}}\left((N+q)-\frac{3a}{5}(N+q+\frac{4}{3}C^2)\right)\right.$$

$$\left.-\left(N+q-\frac{2C^2}{\rho_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}\rho_0^3\left((N+q)-\frac{3a}{5}(N+q+\frac{4C^2}{3\rho_0^2})\rho_0^2\right)\right\}+$$

$$+\frac{\cos\gamma}{3\sqrt{2q}\,(N-q)^2}\left\{(2C^2-N+q)^{\frac{3}{2}}\left((N-q)-\frac{3a}{5}(N-q+\frac{4}{3}C^2)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2C^2}{\rho_0^2}-N+q\right)^{\frac{3}{2}}\rho_0^3\left((N-q)-\frac{3a}{5}(N-q+\frac{4C^2}{3\rho_0^2})\rho_0^2\right\}.\right. \qquad 80)$$

Setzt man statt $\varepsilon$ dessen aus 29) zu entnehmenden Grenzwert, daher statt $C^2: N-p$, so erhält man die ganze Masse, innerhalb welcher Strahlen überhaupt zur Erdoberfläche gelangen. Durch diese Substitution wird $q=2p-N$. Man erhält:

$$\frac{m_0}{2\pi S}=\frac{1}{3}(1-\rho_0^3)-\frac{a}{5}(1-\rho_0^5)+\frac{\sin\gamma}{3p^2\sqrt{2p-N}}\cdot$$

$$\Big\{(2p-N)^{\frac{3}{2}}\Big(p-\frac{a}{5}(p+2N)\Big)-\Big(p-\frac{N-p}{\rho_0^2}\Big)^{\frac{3}{2}}\rho_0^3\cdot$$

$$\Big(p-\frac{a}{5}\Big(3p+2\frac{N-p}{\rho_0^2}\Big)\rho_0^2\Big)-\frac{\cos\gamma}{3\,(N-p)^2\sqrt{2p-N}}\cdot$$

$$\Big(\frac{N-p}{\rho_0^2}+p-N\Big)^{\frac{3}{2}}\rho_0^3\,\Big(N-p-\frac{a}{5}\Big(3N-3p+2\frac{N-p}{\rho_0^2}\Big)\rho\Big\};\quad 81)$$

während sich als Masse der ganzen Erde der Ausdruck

$$M=4\pi S\int_0^1\rho^2(1-a\rho^2)\,d\rho=\frac{4}{15}\pi S(5-3a)\qquad 82)$$

ergiebt.

Multipliciert man die Masse dieses Kegels, dessen halber Querschnitt in Fig. 3 durch $ECA'$ bezeichnet ist mit dem halben Quadrate der in ihm vorkommenden mittleren Geschwindigkeit, so erhält man die im ganzen Schütterraume fühlbare Bewegungsenergie. Die mittlere Schwingungsgeschwindigkeit ist wegen des Widerstandes der Materie natürlich nicht identisch mit der an der Erdoberfläche beobachteten Geschwindigkeit, daher auch die genauere Berechnung der Energie Schwierigkeiten bereitet. Da die Energie selbst in der Oberfläche $f$ nicht dieselbe ist, wegen der verschiedenen Entfernung ihrer Punkte vom Centrum des Bebens, so muss noch verwickelter vorgegangen werden:

Der Differentialquotient von 80) nach $\varepsilon$ multipliciert mit $d\varepsilon$, stellt die Masse derjenigen Kegelschale dar, welche zwischen die unendlich benachbarten Strahlen von dem Emersionswinkel $\varepsilon$ und $\varepsilon+d\varepsilon$ fallen. Der Schnitt dieser Schale mit der Kugelschale $f$ giebt

einen Ring von der Höhe $d\rho$, dessen sämmtliche Elemente als von dem Bebencentrum gleichabständig betrachtet werden können. Diese Ausdrücke müssen mit der Energie in dem betreffenden Ringe multipliciert werden, und die Integration muss von $\rho = \rho_0$ bis $\rho = 1$ und über alle möglichen $\varepsilon$Werte von $\varepsilon = 90°$ bis $\varepsilon = \arccos\sqrt{\frac{N-p}{C^2}}$ ausgedehnt werden. Zur tatsächlichen Berechnung brauchte man ausser den schon verwendeten Elementen noch die Amplitude der Bewegung an der Erdoberfläche, und deren Periode, sowie den Absorptionscoefficienten der Erdsubstanz.

Es lohnt sich vor der Hand natürlich nicht der Mühe, dieses complicierte Integral auszurechnen, da man auf bedeutend einfacherem Wege ebenfalls zum Ziel gelangt.

Da die Absorption der Bewegungsenergie nur von der Anzahl der auf dem Strahle liegenden körperlichen Teilchen, daher der Dichte der Schichten abhängt, so wird die Einheit der Intensität nach Durchlaufen des Weges $\varsigma$ bekanntlich $e^{-c\int_{\varrho_0}^{\varrho} d\varsigma(1-\alpha\varrho^2)}$. Dann bedeutet

$$\alpha = 1 - e^{-c}\,; \tag{83}$$

den Absorptionscoefficient der Materie, bezogen auf die Längeneinheit. Da die Intensität weiter wegen der räumlichen Ausbreitung dem Quadrate der Entfernung reciprok proportional ist, so hat man (Fig. 2.)

$$l^2 = 1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos\varphi, \tag{84}$$

wenn $\varphi$ den sphärischen Abstand des Punktes $P$ vom Epicentrum, $l$ den linearen Abstand vom Centrum $C$ bedeuten. Die Intensität wird also in diesem Punkte, wenn ihr Anfangswert $I$ ist:

$$i = \frac{I}{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos\varphi}\, e^{-c\int_{\varrho_0}^{1} d\varsigma(1-\alpha\varrho^2)} \tag{85}$$

Daraus entsteht die Intensität im Epicentrum $i_0$, wenn $\varepsilon = 90°$, $\varphi = 0$ gesetzt wird. Man hat

$$i_0 = \frac{I}{(1-\rho_0)^2} e^{-c\int_{\varrho_0}^{1} d\varrho\,(1-a\varrho^2)} = \frac{I}{(1-\rho_0)^2} e^{-c\left((1-\varrho_0)-\frac{a}{3}(1-\varrho_0^3)\right)} \quad 86)$$

so dass jetzt alle Intensitäten durch Division mit diesem Werte durch die Intensität im Epicentrum ausgedrückt werden können.

Das im Exponenten vorkommende Integral ist ein complicirtes elliptisches Integral, das folgendermaassen zu berechnen ist:

$$u = \int_{\varrho_0}^{1} d\varrho\,(1-a\rho^2) = \int_{\varrho_0}^{1} \frac{\sqrt{N-p\rho^2}}{\sqrt{N\rho^2-p\rho^4-C^2}}\rho\,(1-a\rho^2)\,d\rho. \quad 87)$$

Die Abkürzungen 79) weiter beibehaltend sei

$$\rho^2 = \frac{N-q\cos 2\chi}{2p},$$

welche Substitution, wie man leicht sieht, mit der Gleichung 20) verträglich ist. Daraus folgt:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int \sqrt{N+q\cos 2\chi}\,\left\{1-\frac{aN}{2p}+\frac{aq}{2p}\cos 2\chi\right\} d\chi,$$

zwischen den Grenzen

$$\chi_2 = \tfrac{1}{2}\arccos\frac{N-2p}{q}, \qquad \chi_1 = \tfrac{1}{2}\arccos\frac{N-2p\rho_0^2}{q}.$$

Setzt man $\cos 2\chi = 1-2\sin^2\chi$, und multipliciert Zähler und Nenner mit $1-\frac{2q}{N+q}\sin^2\chi$, schreibt man weiter Kürze halber:

$$\frac{2q}{N+q} = \varkappa^2; \qquad a = 1-\frac{a(N-q)}{2p}; \quad b = \frac{aq}{p}; \quad 88)$$

so erhält man mit der üblichen Bezeichnung der elliptischen Integrale:

$$u = \frac{1}{3k^3}\sqrt{\frac{q}{p}}\{(b+(3a-2b)k^2)(E(\chi_2,k)-E(\chi_1,k))-$$
$$-b(1-k^2)(F(\chi_2,k)-F(\chi_1,k))+\tfrac{1}{2}bk^2(\sin 2\chi_2 \Delta(\chi_2,k)-$$
$$-\sin 2\chi_1 \Delta(\chi_1,k))\}. \qquad 89)$$

Der Modul der Integrale ist einfach der numerischen Excentricität der Strahlenellipsen gleich. Die Intensität, verglichen mit jener des Epicentrums, ist nun:

$$i = i_0 \frac{(1-\rho_0)^2}{1+\rho_0^2-2\rho_0\cos\varphi} e^{-c\left(u-(1-\varrho_0)+\frac{a}{3}(1-\varrho_0^3)\right)}; \qquad 90)$$

und alle Punkte, welche dieselbe Intensität der Stösse verspüren, liegen auf einer Isoseiste. Die hingeschriebene Gleichung ist also zugleich der Ausdruck der Isoseisten, aus welchem der zur Intensität $i$ gehörige sphärische Radius $\varphi$ berechnet werden kann.

Die aufgeschriebene Intensität bezieht sich natürlich auf die Masseneinheit. Bedenkt man aber, dass längs des Strahlenweges die Einheitsmasse wegen der wechselnden Dichte stets andere Längen annimmt, so wäre folgendermaassen zu rechnen:

Ist der (hier constant zu nehmende) Querschnitt eines Strahles $Q$, so liegt längs derselben die Masse $QS\int_{\varrho_0}^{\varrho} d\varsigma(1-a\rho^2)$, was für die Masse längs des ganzen Strahles mit Rücksicht auf 87) $SQu$ giebt. Multipliciert man jedes Massenelement mit der dazugehörigen Intensität, und dividiert schliesslich wieder mit $SQu$, um auf die Masseneinheit zu reducieren, so kommt:

$$i = \frac{I_0}{u}\int_{\varrho_0}^{1} \frac{d\varsigma(1-a\rho^2)}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi} e^{-c\int_{\varrho_0}^{\varrho} d\varsigma(1-a\rho^2)}, \qquad 91)$$

worin natürlich $\rho$ und $\varphi$ durch Gleichung 20) oder 41) verbunden sind. Obwohl infolge der Construction nicht unbedeutende Vereinfachungen zu erwarten stehen, wird dasselbe gegebenen Falles doch eher durch mechanische Quadratur auszuwerten sein. Uebrigens dürfte ein beträchtlicher Unterschied zwischen den

beiden Intensitätsausdrücken nicht bestehen, und da ein völlig genügender Ausdruck derselben noch immer aussteht, kann man ruhig bei dem einfacheren ersten Ausdrucke stehen bleiben.

Die Seismometer geben natürlich nicht diese Intensität, sondern im Allgemeinen Daten, welche mit der horizontalen und verticalen Componente derselben in irgend einem (sicherlich nicht einmal einfachen) Verhältnisse stehen. Ist an einem Orte im sphärischen Abstande $\varphi$ vom Epicentrum der Emersionswinkel $e$, so ist die verticale und horizontale Componente der Intensität:

$$i_v = i \sin e; \quad i_h = i \cos e; \tag{92}$$

die letztere natürlich längs des nach dem Epicentrum führenden grössten Kreises gerechnet. Diese kann endlich in eine nordwärts und ostwärts gerichtete Componente zerlegt werden, und diese, sowie die Verticalcomponente sind es, die durch die modernen Seismographen verzeichnet werden. Ist die geographische Länge und Breite des Epicentrums $\lambda_0$, $\beta_0$, die des Beobachtungsortes $\lambda$ und $\beta$, so hat man nach wohlbekannten trigonometrischen Formeln:

$$\sin \alpha = \sin (\lambda - \lambda_0) \frac{\cos \beta_0}{\sin \varphi}; \quad \cos \alpha = \frac{\cos \varphi \sin \beta - \sin \beta_0}{\sin \varphi \cos \beta}; \tag{93}$$

worin $\alpha$ das von Nord nach Ost gezählte Azimuth des Stosses, und

$$i_n = i \cos e \sin \alpha; \quad i_e = i \cos e \cos \alpha; \tag{94}$$

die Nord- und Ostcomponente des Stosses vorstellen.

Kennte man die Abhängigkeit der Seismometerangaben von der Intensität des Bebens, so könnte aus den drei Componenten sowohl der Emersionswinkel, als das Azimuth bestimmt werden. Die letzte Angabe ist auch jetzt schon sicher, da beide horizontalen Componenten von demselben Apparate beschrieben werden, während die Verticalcomponente nach anderen Principien gemessen wird. In den meisten Fällen muss die Maximalgeschwindigkeit und der Emersionswinkel auch jetzt noch aus nicht gerade auf besondere Instrumente ausgeübten Wirkungen erschlossen werden.

Die Verticalcomponente der unter 76) gegebenen Beschleunigung, d. h.

$$\gamma = \frac{4\pi^2 a}{u^2} \sin e, \qquad 95)$$

ist zugleich die Veränderung, welche die Schwere während eines Bebens erleidet. Nach den Rechnungen HOLDEN's entspricht z. B. der Grad 1 der ROSSI-FOVEL'schen Skale 20, der Grad 9 dagegen schon 1200 mm Beschleunigung. Kräftewirkungen dieser Grössenordnung sind durch Schwerevariometer schon sehr leicht und sicher zu beobachten.

Der nun leider verstorbene eifrige Forscher REBEUR-PASCHWITZ erzielte mit einem Horizontalpendel vortreffliche Resultate.

Was endlich die im Innern der Erde verchwundene Intensität betrifft, so mag diese annäherungsweise durch die ganze erschütterte Masse, d. h. durch die innerhalb der Apexenveloppe liegende Stoffmenge geschätzt werden. Aus dem ganzen Körper der Erde bleibt nur ein auf das Epicentrum als Pol bezogener Aequatorialgürtel aus, innerhalb dessen das Beben auch absolut genommen unfühlbar ist. Im Antipodenpunkte des Epicentrums ist das Beben aber wenigstens theoretisch erkennbar; in einigen Fällen, z. B. der grossen Katastrophe von Krakataua war es wirklich zu bemerken, und ähnliche bedeutende Ausdehnung der Beben folgen auch aus den Beobachtungen von REBEUR-PASCHWITZ. Das westargentinische Beben vom 27. Oktober 1894 war auf 13,600 km fühlbar; das Beben von Iquique am 10. Mai 1877 wurde von NYRÉN am Passagerohr im ersten Verticale durch die Entfernung von 12,560 km beobachtet. Beide Fälle lassen das Beben schon nahe dem Antipodenpunkte bemerkbar erscheinen. Die Fortpflanzung geschah, wie dies auch der ungeheure, aus dem Quotient von Abstand und Zeit erschlossene Wert ergiebt, unbedingt durch den Körper der Erde hindurch. Auch der besagte Forscher fühlt die Haltlosigkeit der Annahme geradeliniger Fortpflanzung, und neigt in Ermangelung einer besseren Theorie zu der mathematisch nicht einmal ausgearbeiteten Theorie SCHMIDT's hin (Beiträge zur Geophysik, herausgegeben von Dr. GEORG GERLAND; Stuttgart, 1895.

II. Bd., pag. 495), von dieser die Erklärung der stets überraschend grossen Geschwindigkeitswerte erwartend.

Ist die Intensität im Antipodenpunkte des Epicentrums $i'$, so wird dessen Wert einmal absolut, das andermal durch die Intensität des Epicentrums ausgedrückt:

$$i' = \frac{I}{(1+\rho_0)^2} e^{-c\left((1+\varrho_0)-\frac{\alpha}{3}(1+\varrho_0^2)\right)};$$

$$i' = i_0 \left(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\right)^2 e^{-2c\varrho_0\left(1-\frac{\alpha}{3}\varrho_0^2\right)}. \qquad 96)$$

Wenn eine 1 m dicke Erdschichte nur so viel von der Bebenenergie absorbiert, wie eine ebenso dicke Luftschichte an der Erdoberfläche vom Lichte, so ist schon

$$e^{-c} = 1 \cdot 12.10^{-100};$$

und daher ist leicht verständlich, dass ein im Epicentrum verwüstend auftretendes Beben im Antipodenpunkte höchstens den Stand der Libelle alterieren kann.

## Ableitung der Erdbebenelemente.

Das Epicentrum kann aus irgend einer der seismischen Curven abgeleitet werden; ist dessen Lage einmal bekannt, so kann aus an mehreren Punkten angestellten Beobachtungen sowohl die Lage des Erdbebenheerdes, als die die Massenverteilung der Erde charakterisierenden Constanten, die oberflächliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Elasticitätsmodulus der Erdrinde in einem beliebigen Punkte bestimmt werden.

Als Ausgangspunkt kann am bequemsten die Gleichung 52) der Coseiste dienen, welche für zwei Punkte aufgeschrieben $\rho_0$ und $\frac{p}{N} = \frac{\sigma a \mu}{1+\sigma\mu}$ ergiebt. Schreibt man

$$\frac{p}{N-p} = \frac{a\sigma\mu}{1+\sigma\mu-a\sigma\mu} = w; \qquad 97)$$

was nebenbei gesagt, wegen dem Werte $\sigma$ auch

$$w = \frac{a\mu}{(1-a)(\mu+1)}$$

geschrieben werden kann, so kommt nach einigen Vereinfachungen aus 52)

$$\rho_0^2(\cos^2(\varphi-e)+w\sin^2\varphi)=\cos^2 e, \qquad 98)$$

deren Lösung, falls $e_1$ und $e_2$, die im Abstande $\varphi_1$ und $\varphi_2$ vom Epicentrum beobachteten Emersionswinkel bedeuten:

$$w=\frac{\cos^2 e_2\cos^2(\varphi_1-e_1)-\cos^2 e_1\cos^2(\varphi_2-e_2)}{\cos^2 e_1\sin^2\varphi_2-\cos^2 e_2\sin^2\varphi_1};$$

$$\rho_0^2=\frac{\cos^2 e_1\sin^2\varphi_2-\cos^2 e_2\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi_2\cos^2(\varphi_1-e_1)-\sin^2\varphi_1\cos^2(\varphi_2-e_2)}. \qquad 99)$$

Die Gleichung 70) der Homoseiste giebt ebenfalls nur das Verhältnis $\frac{p}{N}$; drückt man in ihr $\varepsilon$ entweder mittels 42) oder 67) (in welcher vorerst noch $\rho=1$ zu setzen ist) durch $\varphi$ aus, so kann aus den bekannten Zeitangaben $v_1$, die oberflächliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und damit der Brechungsindex berechnet werden, da man hat:

$$n_1^2=N-p=\frac{K}{v_1^2}, \qquad 100)$$

wenn nämlich die Constante $K$, welche die Oberflächenschicht der Erde ebenso charakterisiert, wie die Dichte, aus geeigneten Versuchen bekannt ist. Man bestimmt sie am leichtesten, indem man die Geschwindigkeitsänderung beobachtet, welche ein künstliches oder natürliches Beben beim Uebergange von Land und Wasser erleidet.

Wären die Coseisten sehr unzuverlässig, so kann die eine oder andere, vielleicht mit der Nullcoseiste zusammen wenigstens einen brauchbaren Näherungswert für $w$, $\rho_0$ und $\frac{p}{N}$ liefern, die dann mit Hilfe der genauer beobachteten Zeitangaben verbessert

werden können. Dazu bedarf es dreier Homoseisten, deren Quotient frei von $v_1$ zwei Gleichungen zwischen $\rho_0$ und $\frac{p}{N}$ geben. Bei ihrer transcendenten Natur können diese nur durch Versuche gelöst werden, ergeben aber die Geschwindigkeit $v_1$ in linearer Form.

Der Brechungsindex an der Oberfläche führt unmittelbar zur Kenntnis von $\mu$ und giebt nach 100) mit $\frac{p}{N}$ zugleich aus 15) gesondert $N$ und $p$, daher auch $\alpha$ und $\sigma$, zwischen denen übrigens die Bedingungsgleichung 17) besteht. Die Oberflächendichte der Erde giebt dann mit 14) noch die Mittelpunktsdichte $S$.

Die bekannte NEWTON'sche Formel

$$v^2 = \frac{gE}{s} \qquad 101)$$

der Fortpflanzungsgeschwindigkeit führt mit der Kenntnis der Schwerebeschleunigung auch zur Bestimmung des Elasticitätsmodulus, und zwar für beliebige Tiefen. Neben dem bekannten Dichtigkeitsgesetz kann $g$ für die Entfernung $\rho$ vom Erdmittelpunkt in der Form

$$g = \frac{4\pi f S}{\rho^2} \int_0^{\rho} \rho^2 (1 - \alpha\rho^2)\, d\rho$$

ausgedrückt werden. Bezeichnet man die der Oberfläche angehörigen Grössen mit einem Indexe, so kommt:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{(1-\alpha\rho^2)(5-3\alpha)(N-p)}{(1-\alpha)(5-3\alpha\rho^2)(N-p\rho^2)} \frac{1}{\rho}, \qquad 102)$$

welche Gleichung gegebenen Falls wohl Schlüsse auf den Zustand des Erdinnern zulässt. In jedem Falle wird es aber klar werden, dass alle bisher berechneten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bedeutend zu gross sind, wie dies auch REBEUR-PASCHWITZ bemerkte.

Die Gleichung der Isoseiste wurde bei der Bestimmung der Elemente absichtlich bei Seite gelassen, da sie eine leicht zu umgehende Unsicherheit einführen kann. Nichtsdestoweniger kann 90) zur Bestimmung des Absorptionscoefficienten $c$, und 95) zur Berechnung der Schwereänderung oder der Erdbebenbeschleunigung verwendet werden, wenn jene gerade beobachtet worden wäre. Mit Hilfe dieser Beschleunigung und der in 80) gegebenen Masse des Schütterkegels kann die beim Beben tätig gewesene Kraft, und die durch Absorption in der Erde verschwundene Energie geschätzt werden.

Man wird in jedem Falle bei der Ableitung der Elemente sich möglichst auf Angaben solcher Stationen stützen, die in einem durch das Epicentrum gehenden grössten Kreise liegen. Setzt man nämlich voraus, dass die sämmtlichen Elemente Functionen des Azimuthes der durch das Epicentrum gelegten Verticalebene sind — eine Voraussetzung, die der Parallelismus der seismischen Curven in den meisten Fällen zulässig erscheinen lässt — so erlaubt die ausgeführte Theorie eine bedeutende Verallgemeinerung. Es kann dann eine — natürlich willkürliche — Function des Azimuthes für jedes Element mit so vielen bestimmten Constanten aufgeschrieben werden, als Ableitungen der Elemente in den einzelnen Verticalebenen vorgenommen worden sind. Nur $\rho_0$, die geocentrische Entfernung des Erdbebenheerdes muss für alle Verticalebenen dasselbe bleiben. Die einzelnen Abweichungen geben teils ein Criterium für die Genauigkeit der Beobachtungen, teils ein Mittel den etwa nicht punktförmigen Heerd seinen verticalen Dimensionen nach näher zu bestimmen. Die genaue und volle Bestimmung der Gestalt des Heerdes ist mit den abgeleiteten Formeln natürlich nicht möglich, da wir ja die Abweichungen der seismischen Curven vom Kreise auf eine Abhängigkeit vom Azimuthe geworfen haben. Sie wäre aber denkbar, wenn man die Elemente in der Tat als constant betrachtete. Die Gestalt des Heerdes und die azimuthale Veränderlichkeit der Parameter kann zusammen nur dann abgeleitet werden, wenn man aus dem Gleichungssystem 3) ausgeht, die Strahlen als räumliche Curven betrachtet, und die Dichtigkeit der Erde nach allen drei geographischen Bestimmungsstücken veränderlich betrachtet.

Nimmt man — noch immer unter Voraussetzung eines punktförmigen Heerdes — mit der Oberfläche concentrische geologische Schichten an, in denen die vorkommenden physikalischen Constanten sprungweise Aenderungen erleiden, die aber den Schütterkegel ganz durchsetzen, dann bleibt die Bedeutung des Epicentrums ungestört bestehen. Die seismischen Curven sind auch weiter noch Kreise, deren Radius aber grösser oder kleiner als der normale ist, je nachdem der Brechungsindex dieser Schichten kleiner oder grösser ist, als es das Roche'sche Gesetz erforderte. Die Rücksichtnahme auf diesen Umstand geschieht genau nach den für die Brechung in kugelförmigen Medien geltenden Normen. Durchsetzt aber diese Schichte den Strahlenkegel nicht ganz, so kommen nicht nur Dimensionsänderungen in dem Curvensysteme vor, sondern auch den Talbot'schen Linien ähnliche Interferenzerscheinungen, welche das Beben stellenweise intensiver oder schwächer gestalten, als es aus den Erscheinungen der Umgebung zu erwarten wäre. Es entstehen daher die in dem Verlaufe der normalen Beben sonst unbekannten Pleistoseisten und Aseisten, oder Erdbebenbrücken. In noch höherem Grade gilt dies alles, wenn die störenden Schichten auf den Erdradius nicht senkrecht stehen, wodurch sogar der Ort des Epicentrums eine Verschiebung erleidet.

Ist endlich der Erdbebenheerd kein Punkt, sondern ein ausgedehnter Raum, so kommen auch — abgesehen von den Reflexionen an der Erdoberfläche, die für sich wesentliche Störung der Oberflächenerscheinung nicht bedingen — complicierte Interferenzerscheinungen zustande, die wahrscheinlich am meisten die Isoseisten beeinflussen dürften.

Die bei der Ableitung der Elemente in Anwendung kommenden Rechnungen sind zwar nicht besonders mühevoll, können aber durch Einführung des seismischen Hodographen auch ganz graphisch, wie in der von Seebach'schen Methode durchgeführt werden.

## Zahlenbeispiel.

Um den Verlauf eines Bebens auch numerisch zu illustrieren, mögen einige tabellarisch angeordnete Daten folgen, welche auch in den vorkommenden Figuren benützt wurden.

Es sei, wie bisher $\sigma=4$, $a=\frac{3}{4}$, und ein punktförmiges Bebencentrum in der geocentrischen Entfernung $\rho_0=0{,}7071$ gegeben, Der Brechungscoefficient an der Erdoberfläche sei $n_1=2$, so dass $\mu=3$, $N=13$ und $p=9$ wird. Die oberflächliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei weiter 637 m oder $v_1=0{,}0001$. Reiht man die Strahlen nach ihren Emersionswinkeln an der Oberfläche der Kugelfläche vom Radius $\varrho_0$ an, so erhält man die folgende Tabelle:

| $\varepsilon$ | $a$ | $b$ | $\gamma$ | $\varphi$ | $e$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0·9718 | 0·7071 | 0° 0'0 | imag. | imag. | imag. |
| 10 | 9871 | 6855 | —19 54.8 | imag. | imag. | imag. |
| 14°2'2 | 1·0000 | 6667 | —26 33.8 | 63°26'2 | 0° 0' | $2^h56^m41^s$ |
| 20 | 0226 | 6315 | —34 53.6 | 45 26.9 | 14 22 | 1 31 39 |
| 30 | 0637 | 5595 | —45 57.6 | 31 5.0 | 26 47 | 52 29 |
| 40 | 1030 | 4772 | —54 55.9 | 22 9.6 | 37 50 | 30 32 |
| 50 | 1374 | 3884 | —62 45.4 | 15 53.5 | 48 30 | 17 32 |
| 60 | 1651 | 2949 | —69 57.7 | 11 2.3 | 58 58 | 8 50 |
| 70 | 1854 | 1983 | —76 48.2 | 6 59.8 | 69 21 | 3 41.5 |
| 80 | 1977 | 0996 | —83 26.8 | 3 23.8 | 79 41 | 53.44 |
| 90 | 1.2019 | 0,0000 | —90 0.0 | 0 0.0 | 90 0 | 0.00 |

| $\varepsilon$ | $\varphi_1$ | $\varrho_1$ | $\varphi_2$ | $\varrho_2$ | $V$ | $y$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 14° 7'1 | 0·7172 | 82°25'4 | 0·9644 | — | 0·10893 | imag. |
| 10 | 4 16.4 | 6988 | 62 24·6 | 9778 | — | 13074 | imag. |
| 14°2'2 | 9 28·3 | 6833 | 55 39·4 | 9888 | 665 | 15128 | $4{,}1\cdot10^{-8}$ |
| 20 | 14 42·8 | 6561 | 47 7·8 | 1·0070 | 919 | 19333 | $1{\cdot}2.10^{-5}$ |
| 30 | 17 49·9 | 6107 | 35 37·5 | 0351 | 1097 | 29528 | $1{\cdot}13.10^{-3}$ |
| 40 | 15 20·1 | 5831 | 26 16·0 | 0509 | 1345 | 43441 | 0·014 |
| 50 | 10 0·1 | 5854 | 18 31·5 | 0497 | 1680 | 59138 | 0·079 |
| 60 | 5 10·1 | 6099 | 12 17·2 | 0356 | 2316 | 73379 | 0·400 |
| 70 | 2 8·9 | 6398 | 7 22·3 | 0174 | 3512 | 83945 | 0·614 |
| 80 | 0 43·1 | 6593 | 3 27·2 | 0048 | 7065 | 90235 | 0·778 |
| 90 | 0 0·0 | 6667 | 0 0·0 | 1·0000 | — | 92306 | 1·000 |

In dieser Tabelle ergeben $a$, $b$, $\gamma$ die Dimensionen und Lage der elliptischen Strahlen, $\varphi$ und $e$ den sphärischen Abstand und

den Emersionswinkel dieser Strahlen an der Erdoberfläche; letzterer ist stets kleiner als $\varepsilon$. $t$ giebt die Zeit, unter welcher das Beben vom Epicentrum in die Entfernung $\varphi$ gelangt, und $V$ die Geschwindigkeit in Metern, die man erhält, wenn man diese Entfernung einfach durch die Zeit dividiert. Wie ersichtlich, nimmt diese Geschwindigkeit vom Epicentrum weg sehr rasch ab, bleibt aber stets beträchtlich grösser, als der wahre Wert $v_1 = 637$ m. $\varphi_1, \rho_1$ und $\varphi_2, \rho_2$ geben die Meridiancurve für beide Schalen der Wellenfläche, unter der Voraussetzung, dass die geschlossene Schale die Erde im Epicentrum berühre. $y$ ist die im Bogen ausgedrückte Auflösung der Gleichung 63); die vorkommende Constante ist in diesem Falle $\frac{k}{N} = 75°30'5$.

Die Neigung des Strahles, der die Erdoberfläche gerade noch berührt, beträgt $14°2'2$; der dazugehörige sphärische Abstand $63°26'2$ ist der Radius des Schüttergebietes, zugleich der Radius der Nullcoseiste. Innerhalb dieser Neigung sind die Elemente des Erdbebens natürlich imaginär. Um den Aequator des Epicentrums erleidet eine $73°7'6$ breite Zone überhaupt keine Erschütterung; die Apexenveloppe bleibt an dieser Stelle noch immer 179.6 km unter der Erdoberfläche. Zugleich fing das Beben [68) Gleichung] $30^m39^s$ vor Ankunft des ersten Stosses im Epicentrum an, und jede (ganz im Innern der Erde gelegene) Strahlenellipse wird in $9^h27^m14^s$ durchlaufen. Es ist bemerkenswert, dass die angenommene Geschwindigkeit von 637 m nahezu jene ist, die auch geologische Experimente ergeben, und dass auch die Werte von $V$ nahe mit jenen stimmen, die aus tatsächlichen Beobachtungen mit den bisher üblichen Methoden erlangt wurden.

Die Masse des Kegels, dessen Strahlen innerhalb des Emersionswinkels von $\varepsilon = 14°2'2$ (also zwischen diesem Werte und $\varepsilon = 90°$) liegen, und welche den Schütterraum darstellen, beträgt 0,0392 Erdmassen, und etwas grösser als 0,8824, nämlich $1 - 3 \times 0{,}0392$ Erdmassen ist jene Masse, welche die nicht zur Erde gelangende Bewegung absorbierte. Für genauere Daten müsste die in der Apexenveloppe liegende Masse berechnet, und von ihr der Schütterkegel abgezogen werden.

Die letzte Columne der Tabelle giebt die Intensität unter der

Annahme, dass der auf den Erdradius als Einheit bezogene Absorptionscoefficient $c=50$ betrage. Dieser Wert kann näherungsweise aus jenen Beobachtungen abgeleitet werden, die MALLET bei Gelegenheit des grossen Bebens 1858 von Neapel anstellte. Die rasche und starke Dämpfung der Bewegung gegen die Grenze des Schüttergebietes ist augenscheinlich, und im Antipodenpunkte des Epicentrums beträgt die Intensität nur mehr den $40.10^{-30}$-ten Teil des Anfangswertes im Epicentrum. Dadurch ist wenigstens an einem Zahlenbeispiele dargetan, dass die durch die Theorie gegebene dem Practiker vielleicht verdächtig erscheinende Ausdehnung der Beben nicht für die unmittelbare Erfahrung, sondern höchstens für die empfindlichsten Seismometer besteht.

Magyar Tudományos Akadémia
Könyvtára 5146 /1951 sz.

*Der Fortbestand der*

MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN

# BERICHTE AUS UNGARN

*ist durch die Munificenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der K. Ung. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft vollständig gesichert.*

Um einem verspäteten Erscheinen vorzubeugen, hat sich die Redaction entschlossen, die Berichte von jetzt ab, nach Maassgabe der einlaufenden Manuscripte, *heftweise* oder wenigstens in Halbbänden erscheinen zu lassen und dürfte der nächste Halbband demnächst ausgegeben werden.

Preis dieses Halbbandes der

**Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn**

2 fl. 50 kr. ö. W. oder 4 Mark = 5 Francs.

---

*Im Commissionsverlage von*

R. FRIEDLÄNDER & SOHN, BERLIN, FRIEDRICH KILIAN, BUDAPEST,

*sind erschienen, und durch jede Buchhandlung zu beziehen:*

# Allgemeine Theorie des Electrodynamometers.

Ein Beitrag zur Anwendung und zur Integration der Differentialgleichungen der electrodynamischen Induction.

Von Dr. **I. Fröhlich,**

ö. ord. Professor an der Universität zu Budapest.

*Von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften aus der Bézsán-Stiftung gekrönte Preisschrift.*

Deutsche Ausgabe.

Gross-Quart, XVIII und 168 Seiten, mit drei Tafeln und Zeichnungen im Texte.

Preis stark cartonnirt 10 Mark.

---

# Monographia Chrysididarum orbis terrarum universi.

Von **Alexander Mocsáry,**

c. Mitglied der Ung. Akad. der Wissenschaften, Custos-Adjunct am Ung. Nationalmuseum.

Sonderausgabe der III. Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Gross-Quart, XV und 643 Seiten, mit zwei schönen Tafeln.

*Das Werk enthält die Beschreibung von 733 Chrysididenarten aus allen Teilen der Welt.*

Preis 32 Mark.

---

# Araneæ Hungariæ.

Secundum collectiones a Leone Becker pro parte perscrutatas conscriptæ a **Cornelio Chyzer** et **Ladislao Kulczyński.**

*Tomus I.*

Salticoidæ, Oxyopoidæ, Lycosoidæ, Heteropoidæ, Misumenoidæ, Euertrioidæ, Tetragnathoidæ, Uloboroidæ, Pholcoidæ, Scytodoidæ, Urocteoidæ, Eresoidæ, Dictynoidæ.

(Accedunt tabulæ sex.)

*Budapestini 1892. — Editio Academiæ Scientiarum Hungaricæ.*

Preis 10 Mark.

---

*Tomi II-di pars prior:*

# Theridioidæ.

(Accedunt tabulæ quinque.)

*Budapestini 1894. — Editio Academiæ Scientiarum Hungaricæ.*

Preis 10 Mark.

---

DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN